ESAMI E ESERCITAZIONI A.A. 2016-17

ANDREA RATTO

Sommario. In questo file presentiamo prove d'esame, esercitazioni ed esami relativi al Corso di Geometria e Algebra per Ingegneria Ambientale e Civile. Si noti che, durante tutte le prove d'esame, è ammessa la consultazione di qualunque materiale cartaceo (libri, appunti, formulari etc.) e l'uso di calcolatrici NON programmabili; viene invece fatto divieto di utilizzare computer portatili ed ogni altro dispositivo che consenta collegamento internet o video-audio con l'esterno (telefoni cellulari etc.).

1. Esercizi di preparazione alla prima prova intermedia

Tempo a disposizione: 120 minuti

Esercizio 1.1. Si considerino i vettori $\vec{u} = [1, 1, 2]$ e $\vec{v} = [4, 1, 2]$.

(i) Calcolare $\sin\vartheta$, dove ϑ è l'angolo formato dai vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(ii) Calcolare il volume del parallelepipedo individuato da $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{j}$.
(iii) Dare una rappresentazione parametrica del piano π che passa per $P = [0, 2, 3]$ ed è parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(iv) Scrivere un sistema di equazioni che definisce la retta r passante per l'origine e parallela a $\vec{v}$.
(v) Scrivere l'equazione della sfera S avente centro l'origine e tangente al piano π determinato rispondendo al quesito (iii) sopra.
(vi) Determinare, se possibile, il piano π^* che contiene la retta r di cui al (iv) sopra e la retta

$$r^* \ : \quad \begin{cases} x + 3y = 0 \\ z = 0 \ . \end{cases}$$

(vii) Calcolare la distanza tra l'origine e la retta

$$r^{**} \ : \quad \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ z = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 1.2. Siano $P(z) = z^5 + 10z^4 + 37z^3 + 63z^2 + 54z + 27$ e $z_0 = -3$. Calcolare $m_a(z_0)$ e determinare tutte le radici di $P(z)$ in $\mathbb{C}$.

Esercizio 1.3. Sia $z = 3 - 3i$: calcolare

$$\mathrm{Re}(1/z^4) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(1/z^4)$$

(svolgere l'esercizio sia usando $z = a + ib$ sia $z = \rho\, e^{i\,\vartheta}$..).

Esercizio 1.4. Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ di:

$$z^{12} = 64 \ .$$

Esercizio 1.5. Rappresentare graficamente nel piano cartesiano il seguente sottoinsieme di $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}(z) \geq 0,\ 2 \leq \mathrm{Im}(i - \overline{z}) \leq 4,\ 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Im}(z - i)\} \ .$$

Esercizio 1.6. Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 \ : \ \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases} \quad , \qquad r_2 \ : \ \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \quad .$$

(i) Verificare che r_1 e r_2 sono sghembe.
(ii) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2, precisando le coordinate dei punti $Q_i = r \cap r_i$, $i = 1, 2$.

Soluzione dell'Es. 1.1:

(i)

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}\ .$$

(ii) Volume = 6

(iii) $\pi\ :\quad 2y - z - 1 = 0$, per cui una sua rappresentazione parametrica è, **ad esempio**:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 2v - 1\ , \quad u,\, v\ \in\ \mathbb{R}\ . \end{cases}$$

(iv)

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ 2y - z = 0\ . \end{cases}$$

(v)

$$S\ :\quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{5}\ .$$

(vi) Dopo aver verificato che le due rette sono incidenti (in O) si ottiene $\pi^*\ :\ 2x + 6y - 7z = 0$.

(vii)

$$\mathrm{Dist}(r^{**},\, O) = \frac{1}{\sqrt{10}}\ .$$

Soluzione dell'Es. 1.2: $m_a(z_0) = 3$. Le altre due radici, entrambe con molteplicità algebrica 1, sono:

$$-\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

Soluzione dell'Es. 1.3:

$$\mathrm{Re}(1/z^4) = -\frac{1}{324} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(1/z^4) = 0\ .$$

Soluzione dell'Es. 1.4:

$$z_0 = \sqrt{2},\ z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2},\ z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}}{2},\ z_3 = \sqrt{2}\,i,\ z_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}}{2},\ z_5 = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_6 = -\sqrt{2},\ z_7 = \overline{z_5},\ z_8 = \overline{z_4},\ z_9 = \overline{z_3},\ z_{10} = \overline{z_2},\ z_{11} = \overline{z_1}\ .$$

Soluzione dell'Es. 1.5: A è il triangolo con vertici $[0,1]$, $[0,3]$ e $[2,3]$.

Soluzione dell'Es. 1.6:

$$Q_1 = \left[\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, 2\right]\ , \quad Q_2 = [3, -1, 2]\ .$$

$$r\ :\ \begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ z = 2\ . \end{cases}$$

2. Prova intermedia del 21 Aprile 2017

Tempo a disposizione: 60 minuti. Punteggio massimo:17.

Esercizio 2.1. (Punti: 3)

Sia $z = \sqrt[4]{3}\, e^{i\,(\pi/4)}$. Calcolare

$$\mathrm{Re}(1/z^8) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z^8)\ .$$

Esercizio 2.2. (Punti: 3+2+2+5)

Siano $P = [1, 7, 7]$ e r_1, r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 \,:\, \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases} \quad , \qquad r_2 \,:\, \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad .$$

(i) Calcolare $\mathrm{dist}(r_1, O)$.
(ii) Determinare l'equazione del piano Π che contiene l'origine ed è parallelo a r_1 e r_2.
(iii) Determinare l'equazione del piano Π' che contiene P e la retta r_2.
(iv) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2.

Esercizio 2.3. (Punti: 3)

Sia

$$P(z) = z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1\ .$$

Sapendo che $z_0 = i$ è una radice di $P(z)$, determinare tutte le radici di $P(z)$ in $\mathbb{C}$, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

Soluzioni della prova del 21 Aprile 2017

Soluzione dell'Es. 2.1: Si calcola $z^8 = \left(\sqrt[4]{3}\right)^8 \, e^{i\,8\,(\pi/4)} = 3^2 \, e^{i\,2\,\pi} = 9$, da cui ovviamente

$$\mathrm{Re}(1/z^8) = \frac{1}{9} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z^8) = 0 \; .$$

Soluzione dell'Es. 2.2:

(i) La proiezione ortogonale di O su r_1 è

$$Q = \left[\frac{1}{5}, \, \frac{2}{5}, \, 1\right] \; ,$$

da cui

$$\mathrm{dist}(r_1, \, O) = \mathrm{dist}(Q, \, O) = \sqrt{\frac{6}{5}} \; .$$

(ii) $\Pi \; : \qquad x + 2y - 2z = 0.$

(iii) $\Pi' \; : \qquad y - z = 0.$

(iv)

$$r \; : \; \begin{cases} x = t \\ y = (7/9) + 2t \\ z = (7/9) - 2t \qquad t \, \in \, \mathbb{R}, \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad r \; : \; \begin{cases} 18x - 9y + 7 = 0 \\ 18x + 9z - 7 = 0 \; . \end{cases}$$

Soluzione dell'Es. 2.3:

$P(z)$ ha coefficienti reali. Quindi, dato che $z_0 = i$ è una radice di $P(z)$, anche $\overline{z_0} = -i$ è una radice di $P(z)$. Da ciò si deduce che $P(z)$ è divisibile per $z^2 + 1$ e si calcola

$$P(z) = (z^2 + 1) \, \cdot \, (z^2 + z + 1) \; .$$

Ora è facile concludere che le radici di $P(z)$ sono

$$\pm \, i \quad \text{e} \qquad -\,\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \; ,$$

ognuna con molteplicità algebrica 1.

3. Esercitazione del 19 Maggio 2017

Esercizio 3.1. (Punti: 3)
Sia
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare una **matrice di rotazione** P tale che:

$$^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \ , \quad \text{con } \lambda_1 > \lambda_2 \ .$$

Esercizio 3.2. (Punti: 6) Usando i calcoli dell'Esercizio 3.1, svolgere lo studio completo dell'iperbole γ di equazione

$$x^2 + 8xy + y^2 - 5 = 0 \ , \tag{3.1}$$

esplicitando, in particolare, le equazioni degli asintoti rispetto alle coordinate x, y e le coordinate dei punti di intersezione di γ con gli assi x, y.

Esercizio 3.3. (Punti: 5) Determinare una base ortonormale $\mathcal{C}$ del sottospazio vettoriale $W \subsetneq \mathbb{R}^5$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2\,x_4 = 0 \\ x_3 + 2\,x_4 = 0 \\ x_1 - x_5 = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Esercizio 3.4. (Punti: 3) Calcolare la lunghezza dei semiassi dell'ellisse γ di equazione

$$4\,x^2 + 9\,y^2 + 40\,x + 36\,y + 100 = 0 \tag{3.3}$$

e rappresentarla graficamente.

Soluzioni dell'esercitazione del 19 Maggio 2017:

Soluzione dell'Es. 3.1: La matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

è tale che:

$$ {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 3.2: Rispetto alle coordinate x', y' , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

l'equazione dell'iperbole γ diventa:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

con $a = 1$ e $b = \sqrt{(5/3)}$. Si può inoltre osservare che, geometricamente, gli assi x', y' si ottengono da quelli di partenza mediante una rotazione, in senso antiorario, pari ad un angolo $\theta = \pi/4$. In particolare, l'asse x' coincide con la retta $y = x$, mentre l'asse y' è la retta $y = -x$. Gli asintoti di γ hanno equazione:

$$y = \left[\frac{1+b}{1-b}\right] x \qquad \text{e} \qquad y = \left[\frac{1-b}{1+b}\right] x$$

Inoltre, l'iperbole interseca gli assi di partenza in $[0, \pm\sqrt{5}]$ e $[\pm\sqrt{5}, 0]$. A questo punto non è difficile concludere realizzando la rappresentazione grafica di γ .

Soluzione dell'Es. 3.3: $\dim W = 1$ e una sua base ortonormale è

$$\mathcal{C} = \left\{ {}^t[\frac{3}{\sqrt{47}}, \frac{3}{\sqrt{47}}, \frac{4}{\sqrt{47}}, -\frac{2}{\sqrt{47}}, \frac{3}{\sqrt{47}}] \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 3.4: Completando i quadrati si riscrive l'equazione di γ come:

$$\frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

da cui si ricavano i semiassi

$$a = 3 , \quad b = 2$$

e si realizza il disegno.

4. Prova parziale del 26 Maggio 2017

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 4.1. (Punti: 3) Sia
$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare una **matrice di rotazione** P tale che:

$$^{t}P\cdot A\cdot P=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \ , \quad \text{con } \lambda_1 > \lambda_2 \ .$$

Esercizio 4.2. (Punti: 6) Usando i calcoli dell'Esercizio 4.1, svolgere lo studio completo della conica γ di equazione:

$$2\,x^2+4\,xy+2\,y^2+2\sqrt{2}\,x-2\sqrt{2}\,y+1=0 \ . \tag{4.1}$$

Esercizio 4.3. (Punti: 5) Determinare una base $\mathcal{C}$ del sottospazio vettoriale $W \subsetneq \mathbb{R}^4$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2\,x_4=0 \\ 2\,x_1+x_2-x_3+3\,x_4=0 \\ x_1-4\,x_2+4\,x_3-9\,x_4=0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Esercizio 4.4. (Punti: 3) Sia
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

Determinare (se possibile) una matrice $P \in M_4(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1}\cdot A\cdot P$ sia una matrice diagonale.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza espositiva.

Soluzioni della prova parziale del 26 Maggio 2017:

Soluzione dell'Es. 4.1: La matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

è tale che:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 4.2: La conica è non degenere e si tratta di una parabola. Rispetto alle coordinate x', y' , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

l'equazione della parabola γ diventa:

$$y' = x'^2 + \frac{1}{4} .$$

Si può inoltre osservare che, geometricamente, gli assi x', y' si ottengono da quelli di partenza mediante una rotazione, in senso **antiorario**, pari ad un angolo $\theta = (\pi/4)$. Si può verificare che le coordinate del vertice, nel sistema Oxy, sono $[-1/(4\sqrt{2}),\ 1/(4\sqrt{2})]$. Inoltre, la parabola risulta **tangente** all'asse x nel punto di ascissa $-(1/\sqrt{2})$ e **tangente** all'asse y nel punto di ordinata $(1/\sqrt{2})$.
Detto questo, è facile concludere passando alla rappresentazione grafica della parabola γ.

Soluzione dell'Es. 4.3: $\dim W = 2$ e una sua base è:

$$\mathcal{C} = \left\{ {}^t[0,\ 1,\ 1,\ 0\,],\ {}^t[-1,\ -7,\ 0,\ 3\,] \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 4.4: Il polinomio caratteristico di A è

$$P(\lambda) = -\,(1-\lambda)\,\lambda^3 ,$$

per cui abbiamo due autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Si calcola facilmente:

$$m_a(\lambda_1) = 3\,,\ m_g(\lambda_1) = 2 .$$

Quindi A non è diagonalizzabile e non si può determinare P.

5. Prova del 14 Giugno 2017

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 5.1. (Punti: 5+4) Siano $P = [\,2,\,0,\,1\,]$ e r la retta

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x + 2y = 0\ . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P,\,r)$.

(b) Determinare (se possibile) l'equazione del piano Π che contiene r e l'asse y .

Esercizio 5.2. (Punti: 11) Eseguire lo studio completo della conica γ di equazione:

$$x^2 + 2\,xy + y^2 + 3\sqrt{2}\,x - 3\sqrt{2}\,y + 2 = 0\ . \tag{5.1}$$

Esercizio 5.3. (Punti: 5) Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 2\ . \end{cases} \tag{5.2}$$

Esercizio 5.4. (Punti: 5) Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ della seguente equazione:

$$z^5 + 1 = 0$$

(esprimere le soluzioni in forma trigonometrica).

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 14 Giugno 2017:

Soluzione dell'Es. 5.1:

(a) La proiezione ortogonale di P su r risulta essere

$$Q = \left[\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{4}{9}\right] \ , \quad \text{da cui}$$

$$\mathrm{dist}(P,\, r) = \frac{\sqrt{41}}{3} \ .$$

(b) Le 2 rette sono incidenti nell'origine, quindi è possibile determinare il piano richiesto. Si trova $\Pi \ : \quad x + z = 0$.

Soluzione dell'Es. 5.2: Si tratta di una conica non degenere, in quanto $\det A' \neq 0$. Poiché $\det A = 0$, si può subito dedurre che γ è una parabola. Diagonalizzando A , si trova che la matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

è tale che:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

Rispetto alle coordinate x', y' , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \ ,$$

l'equazione della parabola γ diventa (fare il calcolo):

$$y' = \frac{1}{3}\, x'^2 + \frac{1}{3} \ .$$

Tenendo conto che le colonne di P rappresentano rispettivamente i versori degli assi x' e y', è ora facile eseguire il disegno di γ: gli assi x' e y' risultano ruotati, rispetto a quelli di partenza, di un angolo pari a $\pi/4$ in senso antiorario. La parabola γ interseca gli assi di partenza nei punti di coordinate $[-9 \pm (\sqrt{10}/2), 0]$ e $[0, 9 \pm (\sqrt{10}/2)]$. Il vertice della parabola ha coordinate $[-1/(3\sqrt{2}),\, 1/(3\sqrt{2})]$.

Soluzione dell'Es. 5.3: L'insieme delle soluzioni è:

$$\left\{ {}^t[2,\, 0,\, -2 - x_4,\, x_4] \ \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_4 \ \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 5.4: L'insieme delle soluzioni è:

$$z_0 = e^{i(\pi/5)}, \ z_1 = e^{i(3\pi/5)}, \ z_2 = e^{i\pi} = -1, \ z_3 = e^{i(7\pi/5)} = \overline{z_1}, \ z_4 = e^{i(9\pi/5)} = \overline{z_0} \ .$$

6. Prova del 5 Luglio 2017

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 6.1. (Punti: 7) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare P tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 6.2. (Punti: 7+3)

(a) Determinare la comune perpendicolare r alle rette:

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 \ : \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \ , \end{cases}$$

precisando le coordinate del punto di intersezione di r con r_1 e del punto di intersezione di r con r_2 .

(b) Calcolare la distanza tra r_1 e l'origine.

Esercizio 6.3. (Punti: 7) Eseguire lo studio completo della conica γ di equazione

$$4\,x^2 + y^2 - 24\,x + 6\,y + 37 = 0 \ . \tag{6.1}$$

Esercizio 6.4. (Punti: 6) Sia $z = 2 - 2i$. Calcolare

$$\mathrm{Im}(z^9) \ .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 5 Luglio 2017:

Soluzione dell'Es. 6.1: La matrice A ha 2 autovalori:

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 3 \ ,$$

con $m_a(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1)$, e $m_a(\lambda_2) = 2 = m_g(\lambda_2)$: pertanto A è diagonalizzabile e si costruisce, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione dell'Es. 6.2: (a) Si trova:

$$r \ : \qquad \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

La retta r interseca r_1 nel punto di coordinate $[-(3/2),\,(3/2),1]$, e r_2 nel punto di coordinate $[0,3,1]$.
(b) $\mathrm{Dist}(O,\, r_1) = 1$.

Soluzione dell'Es. 6.3: Mediante il metodo di completamento dei quadrati si trova che l'equazione equivale a

$$\frac{(x-3)^2}{2} + \frac{(y+3)^2}{8} = 1 \ ,$$

da cui si ricavano i semiassi a, b e il centro C:

$$a = \sqrt{2} \ , \quad b = 2\sqrt{2} \quad \text{e} \quad C = [3,\, -3] \ .$$

Infine, è ora facile realizzare la rappresentazione grafica (l'ellisse è interamente contenuta nel quadrante IV e, in particolare, NON interseca gli assi x, y).

Soluzione dell'Es. 6.4: I passaggi che lo Studente deve eseguire sono nell'ordine: $z = 2\sqrt{2}\, e^{-i\,\frac{\pi}{4}}$, da cui $z^9 = 2^{13}\sqrt{2}\, e^{-i\,\frac{9\pi}{4}}$ e infine

$$\mathrm{Im}(z^9) = -\, 2^{13} = -\, 8192 \ .$$

7. Prova del 26 luglio 2017

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 7.1. (Punti: 5+3) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

(a) Determinare (se possibile) una matrice invertibile $P \in M_4(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.
(b) Determinare (se possibile) una matrice invertibile $P \in M_4(\mathbb{R})$ tale che ${}^tP \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 7.2. (Punti: 4+4) Siano $P = [3, 1, 0]$ e

$$r \ : \quad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\operatorname{dist}(P, r)$.
(b) Determinare (se possibile) il piano Π che contiene r e l'asse y .

Esercizio 7.3. (Punti: 5) Disegnare la conica degenere γ definita da

$$2x^2 - y^2 - xy + x - y = 0$$

(Suggerimento: scomporre $2x^2 - y^2 - xy + x - y = (x - y)(ax + by + c)$).

Esercizio 7.4. (Punti: 3+4+5) Si consideri il sottospazio vettoriale $W \subsetneq \mathbb{R}^5$ definito da

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\dim W$.
(b) Determinare una base di W .
(c) Determinare una base **ortonormale** di W .

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 26 Luglio 2017:

Soluzione dell'Es. 7.1: La matrice A è simmetrica, quindi la matrice richiesta P esiste in entrambi i casi. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ (doppio), $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$.
Studiando i relativi autospazi si ottiene (ad esempio):
(a)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

Soluzione dell'Es. 7.2:
(a) $\mathrm{dist}(P, r) = (\sqrt{22}/2)$.
(b) $\Pi\ : x + z = 0$.

Soluzione dell'Es. 7.3: L'equazione equivale a

$$(x - y) \cdot (2x + y + 1) = 0 \ ,$$

per cui γ è l'unione di due rette incidenti in $C = [-(1/3),\ -(1/3)]$ ed è facile realizzare il disegno.

Soluzione dell'Es. 7.4:
(a) $\dim W = 2$.
(b) Una base di W è:

$$\{\,[1, 1, 0, 0, 0]\,,\,[-1, 0, 1, 0, 0]\,\}\ .$$

(c) Una base **ortonormale** di W è:

$$\left\{\,[(1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}), 0, 0, 0]\,,\,[-(1/\sqrt{6}), (1/\sqrt{6}), (2/\sqrt{6}), 0, 0]\,\right\}\ .$$

8. Prova del 20 Settembre 2017

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 8.1. (Punti: 4+4) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

(a) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile.
(b) Posto $\lambda_1 = 0$, determinare una base **ortonormale** di V_{λ_1} .

Esercizio 8.2. (Punti: 7+3) Siano r_1 e r_2 2 rette sghembe. Detta r la loro comune perpendicolare, denotiamo

$$Q_1 = r \cap r_1 \quad \text{e} \quad Q_2 = r \cap r_2 \ .$$

Allora, la distanza tra r_1 e r_2 è definita dall'uguaglianza seguente:

$$\mathrm{dist}(r_1, r_2) \ = \ \mathrm{dist}(Q_1, Q_2) \ .$$

Nel caso specifico in cui

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = t \ , \ t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \ , \end{cases} \qquad r_2 \ : \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \ , \end{cases}$$

(a) Determinare la comune perpendicolare r .
(b) Calcolare $\mathrm{dist}(r_1, r_2)$.

Esercizio 8.3. (Punti: 5) Risolvere (se possibile) il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3\,x_3 + 2\,x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3\,x_3 - 2\,x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3\,x_3 = 1 \quad . \end{cases}$$

Esercizio 8.4. (Punti: 7) Disegnare l'ellisse γ definita da

$$x^2 + 9y^2 + 2x - 18y + 1 = 0 \ ,$$

precisando la lunghezza dei semiassi e le coordinate del centro e di eventuali intersezioni con gli assi.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 20 Settembre 2017:

Soluzione dell'Es. 8.1: (a) Il polinomio caratteristico è:

$$P(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda^2 + 2) \ .$$

Quindi $P(\lambda)$ ha radici complesse, **non** reali $\pm i\sqrt{2}$. Ne segue che la matrice A **non** è diagonalizzabile.

(b) $\lambda_1 = 0$ ha molteplicità algebrica e geometrica pari a 2. L'autospazio V_{λ_1} risulta definito da:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ 2\,x_2 = 0 \\ 0 = 0 \ . \end{cases}$$

Ne segue facilmente che una base ortonormale di V_{λ_1} è, ad esempio,

$$\{\,[1,0,0,0]\,,\ [0,0,0,1]\,\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 8.2:

(a) La comune perpendicolare è la retta

$$r \ : \qquad \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y = 0 \ . \end{cases}$$

(b) Si trova:

$$Q_1 = [0,0,1] \ , \quad Q_2 = \left[-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right] \qquad \text{e} \qquad \operatorname{dist}(r_1,\, r_2) \ = \ \frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

Soluzione dell'Es. 8.3: $\rho(A) = 2$, mentre $\rho(A') = 3$: per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema **non** ammette soluzioni.

Soluzione dell'Es. 8.4: Usando il metodo del completamento dei quadrati si verifica facilmente che l'equazione di γ è equivalente a

$$\frac{(x+1)^2}{9} + (y-1)^2 = 1 \ ,$$

per cui γ è un'ellisse con semiassi paralleli agli assi x e y. Più precisamente, il centro dell'ellisse è il punto di coordinate $[-1,\, 1]$, il semiasse orizzontale a ha lunghezza 3, mentre il semiasse verticale è $b = 1$; da questi dati è immediato realizzare la rappresentazione grafica di γ. Infine, si dimostra facilmente che γ interseca l'asse x nel punto di ascissa -1 e l'asse y nei punti di ordinata $1 \pm (\sqrt{8}/3)$.

9. Prova del 22 Febbraio 2018

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 9.1. (Punti: 5+5)
Siano $P = [1, 3, 0]$ e

$$r \ : \qquad \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 1 \ . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P, r)$.
(b) Scrivere un sistema lineare che definisce la retta r_1 che passa per P ed è parallela a r.

Esercizio 9.2. (Punti: 8)
Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ \in \ M_3(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare P tale che ${}^tP \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 9.3. (Punti: 12)
Eseguire uno studio completo della conica γ definita da

$$5\,x^2 \, + \, 5\,y^2 - \, 8\,xy \, - \, 9 \, = 0$$

(nello studio della rotazione, porre $\lambda_1 < \lambda_2$).

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 22 Febbraio 2018:

Soluzione dell'Es. 9.1:

(a)

$$\mathrm{dist}(P,\, r) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \ .$$

(b)

$$r_1 \ : \qquad \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - 3 = 0 \ . \end{cases}$$

Soluzione dell'Es. 9.2: Per prima cosa si calcolano gli autovalori:

$$\lambda_1 = 0 \ ; \qquad \lambda_2 = -1 \ ; \qquad \lambda_3 = 3 \ .$$

Poi si costruisce

$$P = \begin{bmatrix} 0 & (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix} \ .$$

Soluzione dell'Es. 9.3 (traccia): Si tratta di un'ellisse ruotata. Più precisamente, si determina la rotazione di assi:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \ ,$$

dove

$$P \ = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix} \ .$$

Rispetto alle coordinate $[x', y']$ (assi ruotati di un angolo pari a $(\pi/4)$ in senso antiorario) l'equazione della conica diventa:

$$\frac{x'^2}{9} + y'^2 = 1 \ .$$

Dunque, nel sistema ruotato $Ox'y'$, si procede al disegno di un'ellisse con semiassi rispettivamente $a = 3$ e $b = 1$.

Riferimenti bibliografici

[1] A. Ratto, A. Cazzani. *Matematica per le Scuole di Architettura*, Liguori Editore, Napoli (2010) pp.1-636.

Università degli Studi di Cagliari, Dipartimento di Matematica e Informatica, Viale Merello 93, 09123 Cagliari, Italia
E-mail address: rattoa@unica.it