ESAMI A.A. 2014-15

ANDREA RATTO

SOMMARIO. In questo file presentiamo le prove d'esame relative al Corso di Geometria e Algebra per Ingegneria Ambientale e Civile (a.a.2014-15). Si noti che, durante tutte le prove d'esame, è ammessa la consultazione di qualunque materiale cartaceo (libri, appunti, formulari etc.) e l'uso di calcolatrici NON programmabili; viene invece fatto divieto di utilizzare computer portatili ed ogni altro dispositivo che consenta collegamento internet o video-audio con l'esterno (telefoni cellulari etc.).

1. Prova intermedia del 24 Aprile 2015 (Ore 08.15)

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 1.1. (Punti: 4+5)

Siano $P(z) = z^5 + z^4 + z^3 + 8z^2 + 8z + 8$, $P'(z) = z^2 + z + 1$:

(1) Calcolare quoziente $Q(z)$ e resto $R(z)$ della divisione di polinomi $P(z)/P'(z)$.
(2) Determinare le radici in $\mathbb{C}$ di $P(z)$, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

Esercizio 1.2. (Punti: 5+(3+3)+8+4)

Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 \, : \, \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} , \; t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad r_2 \, : \, \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} .$$

(1) Calcolare $\mathrm{dist}(r_2, O)$.
(2) Determinare l'equazione del piano π che contiene l'origine O e la retta r_1; dare una rappresentazione parametrica di π .
(3) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2 .
(4) Scrivere un sistema di equazioni che descrive la retta r' che passa per l'origine O ed è parallela a r_1 .

Esercizio 1.3. (Facoltativo, Punti: 7)
Si consideri la superficie regolare $\mathcal{S}$ in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$X(u,v) = \begin{cases} x = u\,v^2 \\ y = u - 1 \\ z = v \end{cases} .$$

Calcolare l'equazione del piano tangente $T_P(\mathcal{S})$ nel punto $P = [2, 1, 1]$.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza e la qualità dell'esposizione).

Soluzioni della prova del 24 Aprile 2015 (Ore 08.15):

Soluzione dell'Es. 1.1:

(1) $Q(z) = z^3 + 8$ e $R(z) \equiv 0$.

(2) Osservando che $P(z) = Q(z) \cdot P'(z)$ si trovano 5 radici in $\mathbb{C}$ (ognuna con molteplicità algebrica 1):

$$z_0 = -2 \ , \ z_1 = 1 + i\sqrt{3} \ , \ z_2 = \bar{z_1} = 1 - i\sqrt{3} \ ,$$
$$z_3 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \ , \quad z_4 = \bar{z_3} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Soluzione dell'Es. 1.2:

(i) $\mathrm{dist}(r_2, O) = 1$.

(ii) $\pi \ : \ 2y - z = 0$. In forma parametrica

$$\pi \ : \begin{cases} x = u \\ y = vz = 2v \end{cases} \quad , \quad u, v \ \in \ \mathbb{R} \ .$$

(iii)

$$r \ : \ \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \quad .$$

(iv)

$$r' \ : \ \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad .$$

Soluzione dell'Es. 1.3:

$$T_P(\mathcal{S}) \ : \qquad x - y - 4z + 3 = 0 \ .$$

2. Prova intermedia del 24 Aprile 2015 (Ore 09.30)

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 2.1. (Punti: 4+5)

Siano $P(z) = z^5 - z^4 + z^3 + 8z^2 - 8z + 8$, $P'(z) = z^2 - z + 1$:

(1) Calcolare quoziente $Q(z)$ e resto $R(z)$ della divisione di polinomi $P(z)/P'(z)$.
(2) Determinare le radici in $\mathbb{C}$ di $P(z)$, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

Esercizio 2.2. (Punti: 5+(3+3)+8+4)

Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} , \; t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} .$$

(1) Calcolare $\operatorname{dist}(r_2, O)$.
(2) Determinare l'equazione del piano π che contiene l'origine O e la retta r_1; dare una rappresentazione parametrica di π .
(3) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2 .
(4) Scrivere un sistema di equazioni che descrive la retta r' che passa per l'origine O ed è parallela a r_1 .

Esercizio 2.3. (Facoltativo, Punti: 7)
Si consideri la superficie regolare $\mathcal{S}$ in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$X(u, v) = \begin{cases} x = u^3 \, v \\ y = u \\ z = v + 1 \end{cases} .$$

Calcolare l'equazione del piano tangente $T_P(\mathcal{S})$ nel punto $P = [1, 1, 2]$.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza e la qualità dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 24 Aprile 2015 (Ore 09.30):

Soluzione dell'Es. 2.1:

(1) $Q(z) = z^3 + 8$ e $R(z) \equiv 0$.

(2) Osservando che $P(z) = Q(z) \cdot P'(z)$ si trovano 5 radici in $\mathbb{C}$ (ognuna con molteplicità algebrica 1):

$$z_0 = -2 \ , \ z_1 = 1 + i\sqrt{3} \ , \ z_2 = \bar{z_1} = 1 - i\sqrt{3} \ ,$$
$$z_3 = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \ , \quad z_4 = \bar{z_3} = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Soluzione dell'Es. 2.2:

(i) $\mathrm{dist}(r_2, O) = 1$.

(ii) $\pi \ : \ 2y + z = 0$. In forma parametrica

$$\pi \ : \begin{cases} x = u \\ y = vz = -2v \end{cases} \ , \quad u, v \ \in \ \mathbb{R} \ .$$

(iii)

$$r \ : \ \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \ .$$

(iv)

$$r' \ : \ \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \ .$$

Soluzione dell'Es. 2.3:

$$T_P(\mathcal{S}) \ : \qquad x - 3y - z + 4 = 0 \ .$$

3. Prova parziale del 29 Maggio 2015

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 3.1. (Punti: 12+2) Svolgere lo studio completo della conica γ di equazione:

$$x^2 + 14\,xy + 49\,y^2 + 7\sqrt{50}\,x - \sqrt{50}\,y + 100 = 0$$

(assumere che la conica sia NON degenere, porre $\lambda_1 > \lambda_2$).

La conica interseca uno dei due assi di partenza: quale? (Giustificare la risposta).

Esercizio 3.2. (Punti: 11) Determinare una base ortonormale del sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2\,x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_4 = 0\ . \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Esercizio 3.3. (Punti: 11) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in\ M_3(\mathbb{R})\ .$$

Determinare (se possibile) una matrice invertibile $P \in\ M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva.

Soluzioni della prova parziale del 29 Maggio 2015:

Soluzione dell'Es. 3.1: La conica è non degenere e si tratta di una parabola ($\lambda_1 = 50$, $\lambda_2 = 0$). Rispetto alle coordinate x', y' , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

dove

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{50}} & -\frac{7}{\sqrt{50}} \\ \\ \frac{7}{\sqrt{50}} & \frac{1}{\sqrt{50}} \end{bmatrix} ,$$

l'equazione della conica γ diventa:

$$50\, x'^{\,2} - 50\, y' + 100 = 0 ,$$

ovvero

$$y' = x'^{\,2} + 2 .$$

Osservando che le colonne di P rappresentano i versori degli assi ruotati si procede al disegno dei nuovi assi (l'asse x' ha equazione $y = 7\,x$ ..) e al disegno qualitativo della parabola.
La parabola non interseca l'asse y, in quanto l'equazione $49\, y^2 - \sqrt{50}\, y + 100 = 0$ ha $\Delta < 0$. Invece, interseca l'asse x dato che l'equazione $x^2 + 7\sqrt{50}\, x + 100 = 0$ fornisce soluzioni accettabili.

Soluzione dell'Es. 3.2: Il sistema ammette ∞^1 soluzioni:

$$W = \left\{ {}^t[\, x_4,\, -(2/3)\, x_4,\, -(2/3)\, x_4,\, x_4 \,] \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_4 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Quindi $\dim(W) = 1$ e una base di W è costituita, ad esempio, dal vettore $\vec{w}_1 =^t [3, -2, -2, 3]$.
Una base ortonormale quindi è costituita dal versore associato a $\vec{w}_1$, ovvero

$${}^t\left[\frac{3}{\sqrt{26}} , -\frac{2}{\sqrt{26}} , -\frac{2}{\sqrt{26}} , \frac{3}{\sqrt{26}} \right] .$$

Soluzione dell'Es. 3.3: Si trovano gli autovalori:

$\lambda_1 = 0 \quad (\, m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1)\,) \quad , \quad \lambda_2 = 2 \quad (\, m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2)\,)$.
Quindi A è diagonalizzabile e la matrice P richiesta dunque esiste. Si costruisce ora la matrice P:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

4. Prova dell'11 Giugno 2015

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 4.1. (Punti: 12) Eseguire lo studio completo (disegno compreso) della seguente conica:

$$\gamma : \quad 3\,x^2 + y^2 \,-\, 2\sqrt{3}\,xy -\, 2\,x \,-\, 2\sqrt{3}\,y \,=\, 0$$

(si ponga $\lambda_1 > \lambda_2$).

Esercizio 4.2. (Punti: 5+5) Siano $P = [\,1,\,0,\,1\,]$ e r la retta

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2z = 0\ . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P,\,r)$.
(b) Determinare (se possibile) l'equazione del piano Π che contiene r e l'asse z .

Esercizio 4.3. (Punti: 5) Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ del sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0\ . \end{cases} \tag{4.1}$$

Esercizio 4.4. (Punti: 5) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \ \in\ M_3(\mathbb{R})\ .$$

Stabilire se A è diagonalizzabile.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova dell'11 Giugno 2015:

Soluzione dell'Es. 4.1:
Si verifica preliminarmente che $\det(A') \neq 0$ e $\det(A) = 0$, per cui γ è una parabola (si trovano gli autovalori $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$) . Poi, diagonalizzando A, si determina la rotazione:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{3}/2) & (1/2) \\ -(1/2) & (\sqrt{3}/2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} .$$

Rispetto alle coordinate x', y', che si ottengono da x, y mediante rotazione di un angolo $\theta = (\pi/6)$ in senso orario, la conica γ ha equazione:

$$y' = x'^2 .$$

Ora è facile completare il disegno (si può notare che γ interseca gli assi di partenza rispettivamente in $[(2/3), 0]$ e $[0, 2\sqrt{3}]$) .

Soluzione dell'Es. 4.2:

(a) La proiezione ortogonale di P su r è

$$Q = [(2/3), -(2/3), (1/3)] ,$$

da cui si ricava $\mathrm{dist}(P, r) = 1$.

(b) Le 2 rette sono incidenti nell'origine, quindi è possibile determinare il piano richiesto. Si trova $\Pi : \quad x + y = 0$.

Soluzione dell'Es. 4.3: L'insieme delle soluzioni del sistema è:

$$\left\{ {}^t[-x_3, 0, x_3, 0] \in \mathbb{R}^4 : x_3 \in \mathbb{R} \right\} ,$$

per cui, ad esempio,

$$\mathcal{B} = \left\{ {}^t[(1/\sqrt{2}), 0, -(1/\sqrt{2}), 0] \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 4.4: La matrice A ha tre autovalori reali e distinti: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 0$, quindi è diagonalizzabile.

5. Prova del 15 Giugno 2015 (Ing. Biomedica)

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 5.1. (Punti: 2+(2+2)+3+3+3) Siano

$$\vec{u} = [1, 1, 0] \ , \quad \vec{v} = [0, 2, 0] \ , \quad \vec{w} = [0, 1, 1] \ .$$

(a) Calcolare $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v})$.
(b) Determinare la retta r che passa per il punto $P_1 = [1, 1, 4]$ ed è parallela a $\vec{w}$ (descrivere r sia in forma parametrica, sia attraverso un sistema lineare).
(c) Determinare l'equazione del piano Π_1 che passa per l'origine e contiene la retta r determinata al punto (b).
(d) Determinare l'equazione del piano Π_2 che passa per $P_2 = [4, 1, 0]$ ed è parallelo agli assi x e z .
(e) Scrivere l'equazione del piano Π_3 che passa per l'origine ed è parallelo a $\vec{u}$ e $(\vec{u} + \vec{w})$.

Esercizio 5.2. (Punti: 6+4) Siano ($t \in \mathbb{R}$)

$$A_t = \begin{bmatrix} t & (1-t) & 0 & 2 \\ 0 & t & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ , \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \ .$$

(a) Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il sistema lineare $A_t \cdot X = B$ ammette soluzione.
(b) Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema quando $t = 1$.

Esercizio 5.3. (Punti: 6) Studiare, in funzione del parametro $t \in \mathbb{R}$, la diagonalizzabilità di

$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2t \\ 0 & t & 0 \\ -t & 0 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 15 Giugno 2015:

Soluzione dell'Es. 5.1:

(a) $(\vec{u}+\vec{v}) \wedge (\vec{u}-\vec{v}) = [0, 0, -4]$.

(b)

$$r \ : \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 4 + t \end{cases} , \qquad \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - z + 3 = 0 \ . \end{cases}$$

(c) $\Pi_1 \ : \quad 3x + y - z = 0$.

(d) $\Pi_2 \ : \quad y - 1 = 0$.

(e) $\Pi_3 \ : \quad x - y + z = 0$.

Soluzione dell'Es. 5.2:

(a) Il sistema risulta risolubile se e solo se $t \neq (1/2)$. Più precisamente, il sistema ammette ∞^1 soluzioni se $t \neq 1$, e ∞^2 soluzioni se $t = 1$.

(b) Le soluzioni del sistema, quando $t = 1$, sono:

$$\left\{ {}^t[-2x_4, \, 1 - x_4, \, x_3, \, x_4] \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_3, \, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 5.3: Il polinomio caratteristico di A_t è

$$P(\lambda) = (t - \lambda) \, [\lambda^2 + 2t^2 \,] \ .$$

Ne segue che, se $t \neq 0$, $P(\lambda)$ ha radici complesse NON reali, quindi A_t non è diagonalizzabile per $t \neq 0$. Invece, se $t = 0$, la matrice è ovviamente diagonalizzabile in quanto è già diagonale.

6. Prova del 29 Giugno 2015

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 6.1. (Punti: 5) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

Stabilire se A è diagonalizzabile.

Esercizio 6.2. (Punti: 11) Siano

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 \ : \quad \begin{cases} y-z=0 \\ x-z+1=0 \ . \end{cases}$$

Determinare la comune perpendicolare r alle rette r_1 e r_2, precisando le coordinate del punto Q_1 di intersezione di r con r_1 e del punto Q_2 di intersezione di r con r_2 .

Esercizio 6.3. (Punti: 7) Disegnare l'ellisse γ di equazione

$$4\,x^2 + y^2 + 8\,x - 4\,y + 4 \;=\; 0 \ , \tag{6.1}$$

precisando le coordinate del suo centro C, le lunghezze dei due semiassi a, b , le coordinate dei punti di intersesezione tra γ e gli assi, e l'equazione della retta r tangente a γ in $P = [-\,1,\, 4]$.

Esercizio 6.4. (Punti: 5+5) Siano $P(z) = z^3 - 12\,z^2 + 81\,z - 122$, $P'(z) = z - 2$.

(a) Calcolare quoziente $Q(z)$ e resto $R(z)$ della divisione di polinomi $P(z) : P'(z)$.
(b) Determinare le radici di $P(z)$ in $\mathbb{C}$ (usare (a)).

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 29 Giugno 2015:

Soluzione dell'Es. 6.1: Il polinomio caratteristico di A è

$$P(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda - 1)^2 \ ,$$

per cui $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ (non ci sono radici complesse non reali). Ma $m_a(\lambda_2) = 2$, mentre $m_g(\lambda_2) = 1$, quindi A non è diagonalizzabile.

Soluzione dell'Es. 6.2: Si trova:

$$r \ : \qquad \begin{cases} 4z - 1 = 0 \\ 2x + 2y + 1 = 0 \ , \end{cases}$$

$$Q_1 = \left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right] \ , \qquad Q_2 = \left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right] \ .$$

Soluzione dell'Es. 6.3: Mediante il metodo di completamento dei quadrati si trova che l'equazione dell'ellisse γ equivale a

$$(x+1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \ ,$$

da cui si ricava:

$$a = 1 \, , \quad b = 2 \quad \text{e} \quad C = [-1, 2] \ .$$

Con questi dati è facile eseguire il disegno: la tangente richiesta r ha equazione $y = 4$, ed i punti di intersezione con gli assi sono $[-1, 0]$, $[0, 2]$.

Soluzione dell'Es. 6.4: (a)

$$Q(z) = z^2 - 10z + 61 \ , \qquad R(z) \equiv 0 \ .$$

(b)

$$z_0 = 2 \ , \quad z_1 = 5 + 6\,i \ , \quad z_2 = 5 - 6\,i \ .$$

7. Prova del 2 Luglio 2015

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 7.1. (Punti: 7) Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ del sottospazio vettoriale $W \subsetneq \mathbb{R}^4$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 7.2. (Punti: 5) Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

Esercizio 7.3. (Punti: 3+3+3) Sia $P = [1, 3, 0]$.

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P, \text{piano } xz)$.
(b) Determinare il piano Π che contiene P e l'asse z .
(c) Determinare l'equazione del piano Π' che passa per P ed è parallelo agli assi x e z.

Esercizio 7.4. (Punti:((2+2)+6) Sia

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

(a) Calcolare A^2 e $(A^2)^{-1}$.
(b) Determinare (se possibile) una matrice $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 2 Luglio 2015:

Soluzione dell'Es. 7.1: $\rho(A) = 2$, quindi $\dim(W) = 4 - 2 = 2$. Il sistema è infatti equivalente a:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \ , \end{cases}$$

e una sua base ortonormale è:

$$\mathcal{B} = \left\{ [(1/\sqrt{2}),\, 0,\, -(1/\sqrt{2}),\, 0\,] \ , \quad [0,\, (1/\sqrt{2}),\, 0, -(1/\sqrt{2})\,] \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 7.2: Il polinomio caratteristico di A è

$$P(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda^2 - 4\,\lambda + 4) = \lambda^2 \cdot (\lambda - 2)^2 \ ,$$

per cui abbiamo due autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$, entrambi con molteplicità algebrica 2 (il polinomio caratteristico non ha radici complesse non reali). Si verifica facilmente che $m_g(\lambda_2) = 1$, quindi A non è diagonalizzabile.

Soluzione dell'Es. 7.3:
(a) $\mathrm{dist}(P, \text{piano } xz) = 3$.
(b) $\Pi \ : \quad 3x - y = 0$.
(c) $\Pi' \ : \quad y - 3 = 0$.

Soluzione dell'Es. 7.4:
(a) $A^2 = I$, per cui (senza calcoli!) $(A^2)^{-1} = I$.
(b) A è simmetrica, quindi è diagonalizzabile. $P(\lambda) = -(\lambda+1)^2 \cdot (\lambda-1)$. Quindi abbiamo due autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$, con $m_a(\lambda_1) = 1$ e $m_a(\lambda_2) = 2$. L'autospazio V_{λ_1} risulta definito da

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \ , \end{cases}$$

mentre l'autospazio V_{λ_2} risulta definito da $x_2 + x_3 = 0$. Si arriva quindi, ad esempio, a

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \ .$$

8. Prova del 17 Luglio 2015

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 8.1. (Punti: 4+4) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

(a) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile.
(b) Posto $\lambda_1 = 0$, determinare una base **ortonormale** dell'autospazio V_{λ_1} .

Esercizio 8.2. (Punti: 4+5) Sia r la retta di equazione

$$r \ : \quad \begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \ .$$

(a) Determinare l'equazione del piano Π che contiene r e l'origine O.
(b) Calcolare $\text{dist}(r, O)$.

Esercizio 8.3. (Punti: 9) Disegnare l'iperbole γ definita da

$$x^2 - 4y^2 - 2x + 8y - 7 = 0 \ ,$$

precisando (rispetto alle coordinate x, y):

- Le coordinate del centro C di γ .
- Le equazioni degli asintoti di γ .
- Le coordinate degli eventuali punti di intersezione di γ con gli assi x, y .

Esercizio 8.4. (Punti: 2+2+2) Siano

$$\vec{u} = [1, 1, 2] \ , \quad \vec{v} = [2, 1, 0] \ \text{ e } \ \vec{w} = [-1, 1, 0] \ .$$

Calcolare:

(a) L'area A del parallelogramma individuato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (assumere che le coordinate dei vettori siano espresse in cm).
(b) $\sin\theta$, dove θ indica l'angolo formato dai vettori $\vec{u}$ e $\vec{w}$.
(c) Il volume V del parallelepipedo individuato da $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (assumere che le coordinate dei vettori siano espresse in cm).

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 17 Luglio 2015:

Soluzione dell'Es. 8.1: (a)

$$P(\lambda) = -\,\lambda^3 \ .$$

Quindi abbiamo un unico autovalore $\lambda_1 = 0$, con $m_a(\lambda_1) = 3$, ma $m_g(\lambda_1) = 2$. Ne segue che la matrice A **non** è diagonalizzabile.
(b) L'autospazio V_{λ_1} risulta definito da $x_2 = 0$. Ne segue facilmente che una base ortonormale di V_{λ_1} è, ad esempio,

$$\left\{ \, {}^t[1,0,0] \, , \, {}^t[0,0,1] \, \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 8.2:

(a)

$$\Pi \ : \quad x + y + z = 0 \ .$$

(b)

$$\mathrm{dist}(r,\, O) = \sqrt{\frac{3}{2}} \ .$$

Soluzione dell'Es. 8.3: Usando il metodo del completamento dei quadrati si verifica facilmente che l'equazione di γ è equivalente a

$$\frac{(x-1)^2}{4} - (y-1)^2 = 1 \ ,$$

per cui γ è un'iperbole con $a = 2$, $b = 1$ e centro $C = [1,\, 1]$. Le equazioni degli asintoti sono:

$$y = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad y = -\,\frac{1}{2}\,x + \frac{3}{2} \ .$$

L'iperbole interseca l'asse x nei punti di ascissa $1 \pm 2\sqrt{2}$, mentre non interseca l'asse y . Da questi dati è facile realizzare la rappresentazione grafica di γ .

Soluzione dell'Es. 8.4:

(a) $A = |\vec{u} \wedge \vec{v}|\, cm^2 \ = \ |[-2,4,-1]|\, cm^2 \ = \ \sqrt{21}\, cm^2$.
(b)

$$\sin\theta = \frac{|\vec{u} \wedge \vec{w}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{|[-2,-2,2]|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}} = 1 \ (\theta = \frac{\pi}{2}) \ .$$

(c) $V = |\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}|\, cm^3 \ = \ 6\, cm^3$.

9. Prova del 20 Luglio 2015

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 9.1. (Punti: 7) Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ del sottospazio vettoriale $W \subsetneq \mathbb{R}^4$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_4 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 9.2. (Punti: 6) Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

Esercizio 9.3. (Punti: 9) Disegnare l'iperbole γ definita da

$$4x^2 - y^2 + 8x - 2y - 1 = 0 \ ,$$

precisando (rispetto alle coordinate x, y):

- Le coordinate del centro C di γ .
- Le equazioni degli asintoti di γ .
- Le coordinate degli eventuali punti di intersezione di γ con gli assi x, y .

Esercizio 9.4. (Punti:(2+3+5) Siano

$$A = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \ .$$

(a) Calcolare A^2 e $(A^2)^{-1}$.

(b) Risolvere in $\mathbb{C}$ il sistema lineare

$$A \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ (-1+i) \end{bmatrix} \ .$$

.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 20 Luglio 2015:

Soluzione dell'Es. 9.1: $\rho(A) = 2$, quindi $\dim(W) = 4 - 2 = 2$. Il sistema è infatti equivalente a

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

e una sua base ortonormale è:

$$\mathcal{B} = \left\{ [(2/\sqrt{5}),\, 0,\, 0,\, (1/\sqrt{5})]\ , \quad [0,\, (1/\sqrt{10}),\, -(3/\sqrt{10}),\, 0] \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 9.2: Il polinomio caratteristico di A è

$$P(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda^2 - 5\,\lambda + 5)\ ,$$

per cui abbiamo tre autovalori: $\lambda_1 = 0$, con molteplicità algebrica 2; e poi

$$\lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\ , \qquad \lambda_3 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\ ,$$

entrambi con molteplicità algebrica 1 (il polinomio caratteristico non ha radici complesse non reali). Si verifica facilmente che $m_g(\lambda_1) = 4 - \rho(A) = 2$, quindi A è diagonalizzabile.

Soluzione dell'Es. 9.3: Usando il metodo del completamento dei quadrati si verifica facilmente che l'equazione di γ è equivalente a

$$(x+1)^2 - \frac{(y+1)^2}{4} = 1\ ,$$

per cui γ è un'iperbole con $a = 1$, $b = 2$ e centro $C = [-1,\, -1]$. Le equazioni degli asintoti sono:

$$y = 2\,x + 1 \qquad \text{e} \qquad y = -2\,x - 3\ .$$

L'iperbole interseca l'asse x nei punti di ascissa $-1 \pm (\sqrt{5}/2)$, mentre interseca l'asse y nel punto di ordinata -1. Da questi dati è facile realizzare la rappresentazione grafica di γ .

Soluzione dell'Es. 9.4:
(a)

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ (2-2i) & 1 \end{bmatrix}\ , \quad (A^2)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ (2-2i) & 1 \end{bmatrix}\ .$$

(b) $[z_1, z_2] = [2i,\, (-1-3i)]$.

10. Prova dell'11 Settembre 2015

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 10.1. (Punti: 8)

Sia
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare, se possibile, una matrice invertibile P tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 10.2. (Punti: 12)

Eseguire uno studio completo della conica γ definita da
$$13\,x^2 + 7\,y^2 - \,6\,\sqrt{3}\,xy - 16 = 0$$
(nello studio di γ porre $\lambda_1 > \lambda_2$).

Esercizio 10.3. (Punti: 7+4)

Siano
$$r_1 \ : \quad \begin{cases} x-3=0 \\ z-2=0 \end{cases} \ , \qquad r_2 \ : \quad \begin{cases} x-2=0 \\ y-2=0 \ . \end{cases}$$

(a) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2, precisando le coordinate dei punti $Q_i = r \cap r_i$, $i = 1, 2$.

(b) Scrivere l'equazione della retta r_1^* che passa per l'origine ed è parallela a r_1 .

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova dell'11 Settembre 2015:

Soluzione dell'Es. 10.1:
La matrice A possiede 3 autovalori reali e distinti, ovvero
$$\lambda_1 = 0\ ,\ \lambda_2 = 4 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -4\ ,$$
quindi è diagonalizzabile e si può determinare:
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}\ .$$

Soluzione dell'Es. 10.2:
Dopo aver verificato che la conica non è degenere si calcolano gli autovalori associati alla parte quadratica dell'equazione, ovvero alla matrice:
$$A = \begin{bmatrix} 13 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}\ .$$
Si trova:
$$\lambda_1 = 16 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 4\ ,$$
per cui la conica è un'ellisse. Diagonalizzando la matrice simmetrica A si ricava il cambio di coordinate:
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{3}/2) & (1/2) \\ -(1/2) & (\sqrt{3}/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\ .$$
Rispetto alle coordinate x' , y' (che rappresentano un sistema ruotato di un angolo pari a $(\pi/6)$ in senso **orario** rispetto al sistema di partenza) l'equazione di γ diventa:
$$x'^2 + \frac{y'^2}{4} = 1\ .$$
Quindi non è necessario operare alcuna traslazione, e si procede facilmente al disegno dell'ellisse nel sistema x', y' (i semiassi sono $a = 1$ lungo l'asse x' e $b = 2$ lungo l'asse y') .
Soluzione dell'Es. 10.3:
(a)
$$r\ :\ \begin{cases} y - 2 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}\ , \qquad Q_1 = [3, 2, 2] \quad \text{e} \quad Q_2 = [2, 2, 2]\ .$$
(b)
$$r_1^*\ : \qquad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0\ . \end{cases}$$

11. Prova del 16 Settembre 2015

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 11.1. (Punti: 3+5)
Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Determinare $\dim W$.
(b) Determinare una base di W .

Esercizio 11.2. (Punti: 3+3+3+3)
Si considerino i vettori $\vec{u} = [1, 0, 1]$, $\vec{v} = [2, 1, 0]$ e il punto $P = [1, 3, 1]$.
(a) Determinare l'equazione del piano Π che contiene P ed è parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(b) Calcolare la distanza tra l'origine O e il piano Π .
(c) Scrivere il fascio di piani generato dalla retta r che passa per P ed è parallela a $\vec{v}$.
(d) Calcolare $\sin\theta$, dove θ indica l'angolo formato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Esercizio 11.3. (Punti: 7)
Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 5\sqrt{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare, se possibile, una matrice invertibile P tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 11.4. (Punti: 3+3)
(a) Sia $z = 1 - i \ \in \ \mathbb{C}$: calcolare

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right) \ .$$

(b) Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ di

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \ .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 16 Settembre 2015:

Soluzione dell'Es. 11.1: (a) La matrice dei coefficienti ha rango 2, per cui $\dim W = n - \rho(A) = 4 - 2 = 2$. Conviene quindi osservare che W è definito semplicemente da

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \ . \end{array} \right. \tag{11.1}$$

(b) Da (11.1) si ricava immediatamente una base di W:

$$\mathcal{B} = \left\{ {}^t[1, 0, 0, 1],\ {}^t[1, 0, -1, 0] \right\} \ . \tag{11.2}$$

Soluzione dell'Es. 11.2:

(a) $\Pi \ : \qquad x - 2y - z + 6 = 0$.
(b) $\mathrm{dist}(O, \Pi) = \sqrt{6}$.
(c) $\lambda\,(x - 2y + 5) + \mu\,(z - 1) = 0$, dove λ e μ sono parametri reali, non entrambi nulli.
(d) $\sin\theta = (\sqrt{3}/\sqrt{5})$.

Soluzione dell'Es. 11.3:
La matrice A possiede 3 autovalori reali e distinti, ovvero

$$\lambda_1 = 0 \ , \ \lambda_2 = 5 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -5 \ ,$$

quindi è diagonalizzabile e si può determinare:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & \sqrt{5} \end{bmatrix} \ .$$

Soluzione dell'Es. 11.4:

(a) Si calcola facilmente $(1/z^2) = (i/2)$, per cui:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right) = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{2} \ .$$

(b)

$$z_1 = 1 + 2i \qquad \text{e} \qquad z_2 = 1 - 2i \ .$$

12. Prova del 14 Gennaio 2016

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 12.1. (Punti: 7) Determinare una base del sottospazio vettoriale definito dal seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0\ . \end{cases}$$

Esercizio 12.2. (Punti: 7) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})\ .$$

Determinare una matrice invertibile P tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 12.3. (Punti: 3+3+3) Sia $P = [-1, 0, 3]$.

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P, \text{asse } z)$.
(b) Determinare il piano Π che contiene P e l'asse y .
(c) Determinare l'equazione del piano Π' che passa per P ed è parallelo agli assi y e z.

Esercizio 12.4. (Punti: 7) Disegnare l'iperbole γ definita da

$$4x^2 - y^2 + 2y - 5 = 0\ ,$$

precisando:

(a) Le equazioni dei due asintoti.
(b) Le coordinate del centro C di γ e dei punti di intersezione tra γ e l'asse x .
(c) L'equazione della retta r tangente a γ nel punto $P = [1,\ 1]$.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 14 Gennaio 2016:

Soluzione dell'Es. 12.1: Il sistema ammette ∞^2 soluzioni:

$$\left\{ [-2x_4,\, -x_3,\, x_3,\, x_4] \ \in\ \mathbb{R}^4 \ :\ x_3,\, x_4 \ \in\ \mathbb{R} \right\} \ .$$

Ne segue che una base del sottospazio è formata, ad esempi0, dai due vettori seguenti:

$$w_1 = [-2,\, 0,\, 0,\, 1] \ , \quad w_2 = [0,\, -1,\, 1,\, 0] \ .$$

Soluzione dell'Es. 12.2: A è simmetrica e quindi diagonalizzabile. Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^2 \, [(3-\lambda)^2 - 1] \ ,$$

per cui ammette i seguenti autovalori: $\lambda_1 = 0$, con molteplicità due, e $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$ entrambi con molteplicità uno. Studiando i relativi autospazi si ricava facilmente:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

Soluzione dell'Es. 12.3:

(a) $\mathrm{dist}(P, \text{asse } z) = 1$.
(b) $\Pi \ : \quad 3x + z = 0$.
(c) $\Pi' \ : \quad x + 1 = 0$.

Soluzione dell'Es. 12.4: Usando il metodo di completamento dei quadrati si deduce che l'equazione di γ è equivalente a:

$$x^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \ ,$$

per cui γ è un'iperbole traslata di centro $C = [0,\, 1]$, con $a = 1$ e $b = 2$. I suoi asintoti hanno equazione rispettivamente

$$r_1 \ : \ y = 2x + 1 \ , \qquad r_2 \ : \ y = -2x + 1 \ ,$$

mentre le coordinate dei punti di intersezione di γ con l'asse x sono $[(\sqrt{5}/2),\, 0]$ e $[-(\sqrt{5}/2),\, 0]$. Con queste informazioni è facile realizzare il disegno, da cui appare evidente che la tangente r richiesta è la retta verticale $x = 1$.

13. Prova d'Esame del 4 Febbraio 2016

Tempo a disposizione: 60 minuti.

Esercizio 13.1. (5+5 punti) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

(i) Stabilire se A è diagonalizzabile.
(ii) Determinare una base dell'autospazio V_{λ_1}, dove $\lambda_1 = 1$.

Esercizio 13.2. (4+3+3 punti) Siano $P_1 = [0, 0, 1]$ e $P_2 = [3, 2, 0]$. Siano poi: r_1 la retta che passa per il punto P_1 ed è parallela all'asse y, e r_2 la retta che passa per P_2 ed è parallela all'asse z.

(i) Calcolare $\mathrm{dist}(r_1, O)$.
(ii) Dare una descrizione di r_2 come sistema lineare.
(iii) Determinare il piano π che contiene r_2 e l'origine.

Esercizio 13.3. (5 punti) Risolvere (se possibile) il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 = 1 \quad . \end{cases}$$

Esercizio 13.4. (5 punti) Risolvere (se possibile) il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2\,x_1 - x_2 + 2\,x_3 = 3 \\ x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 = 6 \quad . \end{cases}$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 4 febbraio 2016:

Soluzione dell'Es. 13.1: (i)

$$\lambda_1 = 1 \ , \qquad \lambda_2 = 3$$

con $m_a(\lambda_1) = 2$ e $m_a(\lambda_2) = 1$. Poi, si verifica che anche $m_g(\lambda_1) = 2$, da cui si deduce che A è diagonalizzabile.

(ii) $\dim(V_{\lambda_1}) = m_g(\lambda_1) = 2$. Una sua base è:

$$\vec{w}_1 = {}^t[0,\,1,\,0] \ , \quad \vec{w}_2 = {}^t[0,\,0,\,1].$$

Soluzione dell'Es. 13.2:

(i)

$$\mathrm{dist}(r_1, O) = 1 \ .$$

(ii)

$$r_2 \ : \qquad \begin{cases} x - 3 = 0 \\ y - 2 = 0 \ . \end{cases}$$

(iii)

$$\pi \ : \quad 2\,x \,-\, 3\,y \,=\, 0 \ .$$

Soluzione dell'Es. 13.3:

Il sistema **non** ammette soluzione.

Soluzione dell'Es. 13.4:

Sistema di Cramer: l'unica soluzione è $[1,\,1,\,1]$.

14. Prova d'Esame del 25 Febbraio 2016

Tempo a disposizione: 60 minuti.

Esercizio 14.1. (6 punti) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) .$$

Determinare, se possibile, una matrice invertibile $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 14.2. (5+5+5 punti) Siano $P_1 = [1, 0, 1]$, $P_2 = [0, 1, 3]$ e $P_3 = [1, 0, -1]$.

(i) Determinare l'equazione del piano π che contiene P_1, P_2 e P_3.
(ii) Dare una rappresentazione parametrica di π.
(iii) Calcolare $\mathrm{dist}(\pi, O)$.

Esercizio 14.3. (5 punti) Determinare una base del sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \quad . \end{cases}$$

Esercizio 14.4. (5 punti) Risolvere (se possibile) il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2\,x_1 - x_2 + 2\,x_3 = 3 \\ x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 = 6 \quad . \end{cases}$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 25 febbraio 2016:

Soluzione dell'Es. 14.1: A è simmetrica, quindi la matrice richiesta P esiste. Si trovano autovalori 0 (doppio) e 2, poi si costruisce, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 14.2:

(i)

$$\pi \ : \quad x + y - 1 \, = \, 0 \ .$$

(ii)

$$\pi \ : \qquad \begin{cases} x = s \\ y = 1 - s \quad \text{dove } s, t \, \in \, \mathbb{R} \ . \\ z = t \end{cases}$$

(iii)

$$\text{dist}(\pi, O) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

Soluzione dell'Es. 14.3:

$\dim(W) = 1$ e una sua base è, ad esempio, $\mathbf{B} = \{ {}^t[1, -1, 0, 0] \}$.

Soluzione dell'Es. 14.4:

Sistema di Cramer: l'unica soluzione è $[1,\ 1,\ 1]$.

Università degli Studi di Cagliari, Dipartimento di Matematica e Informatica, Viale Merello 93, 09123 Cagliari, Italia
E-mail address: `rattoa@unica.it`