ESAMI E ESERCITAZIONI A.A. 2013-14

ANDREA RATTO

Sommario. In questo file presentiamo prove d'esame, esercitazioni ed esami relativi al Corso di Geometria e Algebra per Ingegneria Ambientale e Civile (a.a.2013-14). Si noti che, durante tutte le prove d'esame, è ammessa la consultazione di qualunque materiale cartaceo (libri, appunti, formulari etc.) e l'uso di calcolatrici NON programmabili; viene invece fatto divieto di utilizzare computer portatili ed ogni altro dispositivo che consenta collegamento internet o video-audio con l'esterno (telefoni cellulari etc.).

1. Esercitazione del 16 Aprile 2014

Tempo a disposizione: 70 minuti

Esercizio 1.1. (Punti: 4)
Sia $z = -1 - i$: calcolare (utilizzando la rappresentazione dei numeri complessi in forma trigonometrica)

$$\mathrm{Re}(z^9) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z^9)\ .$$

Esercizio 1.2. (Punti: 2+8+3+5)
Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1\ :\ \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} ,\ t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad r_2\ :\ \begin{cases} x = -1 \\ y = z \end{cases} .$$

(i) Stabilire se r_1 e r_2 sono incidenti oppure sghembe.
(ii) Se la risposta corretta alla domanda (i) era **incidenti**, allora determinare il piano Π che contiene r_1 e r_2. Se, invece, la risposta corretta alla domanda (i) era **sghembe**, allora determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2.
(iii) Determinare l'equazione del piano Π' che contiene l'origine O e la retta r_2 .
(iv) Calcolare $\mathrm{dist}(r_2, O)$.

Esercizio 1.3. (Punti: 4)
Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} .$$

Calcolare (se possibile) A^{-1}.

Esercizio 1.4. (Punti: 4+6) Siano $P(z) = z^6 + z^5 + z^4 - z^2 - z - 1$ e $P'(z) = z^2 + z + 1$:
(1) Calcolare quoziente $Q(z)$ e resto $R(z)$ della divisione di polinomi

$$\frac{P(z)}{P'(z)} .$$

(2) Determinare le radici di $P(z)$ in $\mathbb{C}$, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

Soluzioni dell'esercitazione del 16 Aprile 2014:

Soluzione dell'Es. 2.1:

$$\mathrm{Re}(z^9) = -16 \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z^9) = -16 \ .$$

Soluzione dell'Es. 2.2:

(i) Sghembe .

(ii)

$$r \ : \ \begin{cases} 3x + 3y + 2 = 0 \\ 3y + 3z - 2 = 0 \end{cases} \ .$$

(iii) $\Pi' \ : \qquad y - z = 0$.

(iv) $\mathrm{dist}(r_2, O) = 1$.

Soluzione dell'Es. 2.3:

$\det(A) = -6 \neq 0$, per cui A è invertibile. Si calcola:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & (1/2) & 0 \\ (2/3) & (1/6) & (1/3) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 1.4:

$Q(z) = z^4 - 1$, $R(z) \equiv 0$. Ne segue che $P(z) = (z^4 - 1)\,(z^2 + z + 1)$, per cui è facile determinare le 6 radici in $\mathbb{C}$ di $P(z)$ (ognuna delle quali ha molteplicità algebrica 1):

$$\frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} \ , \ \pm 1 \text{ e } \pm i \ .$$

2. Prova intermedia del 23 Aprile 2014 (Ore 11.00)

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 2.1. (Punti: 4+5)

Siano $P(z) = z^5 + z^4 + z^3 - 8z^2 - 8z - 8$, $P'(z) = z^2 + z + 1$:

(1) Calcolare quoziente $Q(z)$ e resto $R(z)$ della divisione di polinomi $P(z)/P'(z)$.
(2) Determinare le radici in $\mathbb{C}$ di $P(z)$, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

Esercizio 2.2. (Punti: 5+4+8+4)

Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases} , \; t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases} .$$

(1) Calcolare $\mathrm{dist}(r_2, O)$.
(2) Determinare l'equazione del piano π che contiene l'origine O e la retta r_1 .
(3) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2.
(4) Scrivere un sistema di equazioni che descrive la retta r' che passa per l'origine O ed è parallela a r_1 .

Esercizio 2.3. (Punti: 5)
Sia

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Calcolare, se possibile, A^{-1} .

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 23 Aprile 2014 (Ore 11.00):

Soluzione dell'Es. 2.1:

(1) $Q(z) = z^3 - 8$ e $R(z) \equiv 0$.

(2) Osservando che $P(z) = Q(z) \cdot P'(z)$ si trovano 5 radici in $\mathbb{C}$ (ognuna con molteplicità algebrica 1):

$$z_0 = 2 \ , \ z_1 = -1 + i\sqrt{3} \ , \ z_2 = \bar{z_1} = -1 - i\sqrt{3} \ ,$$
$$z_3 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \ , \quad z_4 = \bar{z_3} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Soluzione dell'Es. 2.2:

(i) $\mathrm{dist}(r_2, O) = 1$.

(ii) $\pi \ : \ 2z - y = 0$.

(iii)

$$r \ : \ \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \ .$$

(iv)

$$r' \ : \ \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \ .$$

Soluzione dell'Es. 2.3:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

3. Prova intermedia del 23 Aprile 2014 (Ore 12.00)

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 3.1. (Punti: 4+5)

Siano $P(z) = z^5 - z^4 + z^3 + 64z^2 - 64z + 64$, $P'(z) = z^2 - z + 1$:

(1) Calcolare quoziente $Q(z)$ e resto $R(z)$ della divisione di polinomi $P(z)/P'(z)$.
(2) Determinare le radici in $\mathbb{C}$ di $P(z)$, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

Esercizio 3.2. (Punti: 5+4+8+4)

Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} , \ t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2 \\ z = 0 \end{cases} .$$

(1) Calcolare $\mathrm{dist}(r_2, O)$.
(2) Determinare l'equazione del piano π che contiene l'origine O e la retta r_1 .
(3) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2.
(4) Scrivere un sistema di equazioni che descrive la retta r' che passa per l'origine O ed è parallela a r_1 .

Esercizio 3.3. (Punti: 5)
Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} .$$

Calcolare, se possibile, A^{-1} .

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 23 Aprile 2014 (Ore 12.00):

Soluzione dell'Es. 3.1:

(1) $Q(z) = z^3 + 64$ e $R(z) \equiv 0$.

(2) Osservando che $P(z) = Q(z) \cdot P'(z)$ si trovano 5 radici in $\mathbb{C}$ (ognuna con molteplicità algebrica 1):

$$z_0 = 2 + 2\sqrt{3}\, i \ , \ z_1 = -4 \ , \ z_2 = \bar{z_1} = 2 - 2\sqrt{3}\, i \ ,$$

$$z_3 = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \ , \quad z_4 = \bar{z_3} = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Soluzione dell'Es. 3.2:

(i) $\mathrm{dist}(r_2, O) = 2$.

(ii) $\pi \ : \ x - y = 0$.

(iii)

$$r \ : \ \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \ .$$

(iv)

$$r' \ : \ \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \ .$$

Soluzione dell'Es. 3.3:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

4. Esercitazione di preparazione alla seconda prova parziale

Esercizio 4.1. Sia
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare una **matrice di rotazione** P tale che:

$$ {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \ , \quad \text{con } \lambda_1 > \lambda_2 \ .$$

Esercizio 4.2. Usando i calcoli dell'Esercizio 4.1, svolgere lo studio completo della conica γ di equazione:
$$x^2+4xy+y^2-3=0 \ . \tag{4.1}$$

Esercizio 4.3. Determinare una base ortonormale $\mathcal{C}$ del sottospazio vettoriale $W \subsetneq \mathbb{R}^4$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:
$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3+2\,x_4=0 \\ x_3-3\,x_4=0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Esercizio 4.4. Calcolare la lunghezza dei semi-assi dell'ellisse γ di equazione:
$$9\,x^2+4\,y^2+36\,x+40\,y+100=0 \ . \tag{4.3}$$

Esercizio 4.5. Sia
$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \ M_4(\mathbb{R}) \ .$$

(i) Stabilire se A è diagonalizzabile.
(ii) Determinare (se possibile) una base ortonormale $\mathcal{B}$ di V_{λ_1} , dove $\lambda_1=0$.

Soluzioni dell'esercitazione di preparazione alla seconda prova parziale:

Soluzione dell'Es. 4.1: La matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

è tale che:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 4.2: Rispetto alle coordinate x', y' , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

l'equazione dell'iperbole γ diventa:

$$(x')^2 - \frac{(y')^2}{3} = 1 .$$

Si può inoltre osservare che, geometricamente, gli assi x', y' si ottengono da quelli di partenza mediante una rotazione, in senso antiorario, pari ad un angolo $\theta = (\pi/4)$.
Detto questo, è facile concludere passando alla rappresentazione grafica, in cui si consiglia di prestare attenzione alla rappresentazione degli asintoti di γ .
Soluzione dell'Es. 4.3: $\dim W = 1$ e una sua base ortonormale è:

$$\mathcal{C} = \left\{ {}^t[\,(-3/\sqrt{98}),\,(7/\sqrt{98}),\,(6/\sqrt{98}),\,(2/\sqrt{98})\,] \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 4.4:

$$a = 2 , \quad b = 3 .$$

Soluzione dell'Es. 4.5:

(i) $P(\lambda) = \lambda^2\,(\lambda^2 - \lambda + 1)$: quindi $P(\lambda)$ ha radici non reali, da cui deduciamo che A non è diagonalizzabile.

(ii) $\lambda_1 = 0$ è un autovalore di A con molteplicità geometrica 2. Una base ortonormale di V_{λ_1} è:

$$\mathcal{B} = \left\{ {}^t[0,1,0,0],\ {}^t[0,0,1,0] \right\} .$$

5. Prova parziale del 30 Maggio 2014

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 5.1. (Punti: 14) Svolgere lo studio completo della conica γ di equazione:

$$x^2 + 9\,y^2 + 6\,xy + 30\,x - 10\,y = 0 \tag{5.1}$$

(porre $\lambda_1 > \lambda_2$).

Esercizio 5.2. (Punti: 10) Determinare una base $\mathcal{C}$ del sottospazio vettoriale $W \subsetneq \mathbb{R}^4$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2\,x_4 = 0 \\ 2\,x_1 - x_2 - x_3 + 3\,x_4 = 0 \\ 5\,x_1 - 2\,x_2 - x_3 + 4\,x_4 = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

Esercizio 5.3. (Punti: 10) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ \in \ M_4(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare una matrice ortogonale P tale che ${}^t\,P \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva.

Soluzioni della prova parziale del 30 Maggio 2014:

Soluzione dell'Es. 5.1: La conica è non degenere e si tratta di una parabola ($\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 0$). Rispetto alle coordinate x', y', legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

dove

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} ,$$

l'equazione della parabola γ diventa:

$$\sqrt{10}\, y' = x'^{\,2} .$$

Osservando che le colonne di P rappresentano i versori degli assi ruotati si procede al disegno qualitativo della parabola.

Soluzione dell'Es. 5.2: $\rho(A) = 3$, per cui $\dim W = 1$ e una sua base è:

$$\mathcal{C} = \left\{ {}^t[-1, 0, 7, 3] \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 5.3: A è simmetrica, per cui è diagonalizzabile. Si trovano gli autovalori:

$$\lambda_1 = 0 \quad (\text{doppio}) , \quad \lambda_2 = 2 \text{ e } \lambda_3 = -2 .$$

Poi si costruisce la matrice ortogonale P richiesta:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix} .$$

6. Prova del 13 Giugno 2014

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 6.1. (Punti: 12) Eseguire lo studio completo (disegno compreso) della seguente conica:

$$\gamma: \quad x^2 + 3\,y^2 - 2\sqrt{3}\,xy - 2\sqrt{3}\,x - 2\,y = 0$$

(si ponga $\lambda_1 > \lambda_2$).

Esercizio 6.2. (Punti: 5+5) Siano $P = [\,1,\,0,\,1\,]$ e r la retta

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - 2y = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P,\, r)$.
(b) Determinare (se possibile) l'equazione del piano Π che contiene r e l'asse y .

Esercizio 6.3. (Punti: 5) Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ del sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \ . \end{cases} \tag{6.1}$$

Esercizio 6.4. (Punti: 5) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

Stabilire se A è diagonalizzabile.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 13 Giugno 2014:

Soluzione dell'Es. 6.1:
Si verifica preliminarmente che $\det(A') \neq 0$ e $\det(A) = 0$, per cui γ è una parabola (si trovano gli autovalori $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 0$) . Poi, diagonalizzando A, si determina la rotazione:

$$\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} (1/2) & (\sqrt{3}/2) \\ -(\sqrt{3}/2) & (1/2) \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} x' \\ y' \end{array}\right] .$$

Rispetto alle coordinate x', y', che si ottengono da x, y mediante rotazione di un angolo $\theta = (\pi/3)$ in senso orario, la conica γ ha equazione:

$$y' = x'^2 .$$

Ora è facile completare il disegno (si può notare che γ interseca gli assi di partenza rispettivamente in $[2\sqrt{3}, 0]$ e $[0, (2/3)]$) .

Soluzione dell'Es. 6.2:
(a) $\mathrm{dist}(P, r) = \sqrt{2}$.
(b) Le 2 rette sono incidenti nell'origine, quindi è possibile determinare il piano richiesto. Si trova $\Pi \ : \quad x + z = 0$.

Soluzione dell'Es. 6.3: L'insieme delle soluzioni del sistema è:

$$\left\{ {}^t[-x_4, 0, 0, x_4] \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_4 \in \mathbb{R} \right\} ,$$

per cui, ad esempio,

$$\mathcal{B} = \left\{ {}^t[\,(1/\sqrt{2})\,,\ 0,\ 0,\ -(1/\sqrt{2})\,] \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 6.4: La matrice A presenta l'autovalore $\lambda_1 = 1$, con $m_a(\lambda_1) = 2$ e $m_g(\lambda_1) = 1$: quindi A non è diagonalizzabile.

7. Prova del 1º Luglio 2014

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 7.1. (Punti: 5) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

Stabilire se A è diagonalizzabile.

Esercizio 7.2. (Punti: 11) Siano

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 \ : \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z - 1 = 0 \ . \end{cases}$$

Determinare la comune perpendicolare r alle rette r_1 e r_2, precisando le coordinate del punto Q_1 di intersezione di r con r_1 e del punto Q_2 di intersezione di r con r_2 .

Esercizio 7.3. (Punti: 7) Disegnare l'ellisse γ di equazione

$$x^2 + 4\,y^2 - 4\,x + 8\,y + 4 \;=\; 0 \ , \tag{7.1}$$

precisando le coordinate del suo centro C, le lunghezze dei due semiassi a, b , le coordinate dei punti di intersesezione tra γ e gli assi, e l'equazione della retta r tangente a γ in $P = [4, -1]$.

Esercizio 7.4. (Punti: 5+5) Siano $P(z) = z^3 + 12\,z^2 + 81\,z + 122$, $P'(z) = z + 2$.

(a) Calcolare quoziente $Q(z)$ e resto $R(z)$ della divisione di polinomi $P(z) : P'(z)$.
(b) Determinare le radici di $P(z)$ in $\mathbb{C}$ (usare (a)).

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 1° Luglio 2014:

Soluzione dell'Es. 7.1: Il polinomio caratteristico di A è

$$P(\lambda) = \lambda^2 \, [\, (1-\lambda)^2 + 1 \,] \ ,$$

per cui ammette due radici complesse non reali $1 \pm i$. Quindi A non è diagonalizzabile.

Soluzione dell'Es. 7.2: Si trova:

$$r \ : \qquad \begin{cases} 4x - 1 = 0 \\ 2y + 2z + 1 = 0 \ , \end{cases}$$

$$Q_1 = \left[\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right] \ , \qquad Q_2 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right] \ .$$

Soluzione dell'Es. 7.3: Mediante il metodo di completamento dei quadrati si trova che l'equazione dell'ellisse γ equivale a

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \ (y+1)^2 = 1 \ ,$$

da cui si ricava:

$$a = 2 \, , \quad b = 1 \quad \text{e} \quad C = [2, -1] \ .$$

Con questi dati è facile eseguire il disegno: la tangente richiesta r ha equazione $x = 4$, ed i punti di intersezione con gli assi sono $[0, -1]$, $[2, 0]$.

Soluzione dell'Es. 7.4: (a)

$$Q(z) = z^2 + 10z + 61 \ , \qquad R(z) \equiv 0 \ .$$

(b)

$$z_0 = -2 \ , \quad z_1 = -5 + 6\,i \ , \quad z_2 = -5 - 6\,i \ .$$

8. Prova del 22 Luglio 2014

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 8.1. (Punti: 7) Determinare una base ortonormale $\mathcal{B}$ del sottospazio vettoriale $W \subsetneq \mathbb{R}^4$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 8.2. (Punti: 4) Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

Esercizio 8.3. (Punti: 3+3+3) Sia $P = [1, 0, 3]$.

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P, \text{asse } z)$.
(b) Determinare il piano Π che contiene P e l'asse y .
(c) Determinare l'equazione del piano Π' che passa per P ed è parallelo agli assi y e z.

Esercizio 8.4. (Punti: 13) Eseguire lo studio completo della conica γ definita da

$$\sqrt{2}\, x^2 + \sqrt{2}\, y^2 - 2\sqrt{2}\, xy + 2\,x + 2\,y + 2\sqrt{2} = 0$$

(porre $\lambda_1 > \lambda_2$).

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 22 Luglio 2014:

Soluzione dell'Es. 8.1: $\dim(W) = 2$ e una sua base ortonormale è:

$$\mathcal{B} = \left\{ [(1/\sqrt{2}), -(1/\sqrt{2}), 0, 0] , \quad [0, 0, (1/\sqrt{2}), -(1/\sqrt{2})] \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 8.2: Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^2 [(2-\lambda)^2 + 1] ,$$

per cui ammette due radici complesse, non reali, $2 \pm i$. Ne segue che la matrice non è diagonalizzabile.

Soluzione dell'Es. 8.3:
(a) $\mathrm{dist}(P, \text{asse } z) = 1$.
(b) $\Pi \ : \quad 3x - z = 0$.
(c) $\Pi' \ : \quad x - 1 = 0$.

Soluzione dell'Es. 8.4: γ è una parabola, con $\lambda_1 = 2\sqrt{2}$ e $\lambda_2 = 0$. Operando la rotazione (determinabile diagonalizzando la matrice A associata alla parte quadratica)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

si ottiene l'equazione di γ rispetto alle coordinate ruotate x', y' (rotazione pari ad un angolo di $(3/4)\,\pi$ in senso antiorario rispetto agli assi x, y di partenza) :

$$y' = x'^{\,2} + 1 ,$$

da cui non è difficile completare il disegno della parabola.

9. Prova del 10 Settembre 2014

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 9.1. (Punti: 4+4) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) .$$

(a) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile.

(b) Posto $\lambda_1 = 0$, determinare una base **ortonormale** dell'autospazio V_{λ_1} .

Esercizio 9.2. (Punti: 4+5+9) Siano r_1 e r_2 le rette di equazione rispettivamente

$$r_1 \; : \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} , \qquad r_2 \; : \quad \begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} .$$

(a) Determinare l'equazione del piano Π che contiene r_2 e l'origine O .

(b) Calcolare $\mathrm{dist}(r_2, O)$.

(c) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2 .

Esercizio 9.3. (Punti: 9) Disegnare l'iperbole γ definita da

$$x^2 - 4y^2 - 2x + 8y - 7 = 0 ,$$

precisando (rispetto alle coordinate x, y):

- Le coordinate del centro C di γ .
- Le equazioni degli asintoti di γ .
- Le coordinate degli eventuali punti di intersezione di γ con gli assi x, y .

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 10 settembre 2014:

Soluzione dell'Es. 9.1: (a)

$$P(\lambda) = -\lambda^3 \ .$$

Quindi abbiamo un unico autovalore $\lambda_1 = 0$, con $m_a(\lambda_1) = 3$, ma $m_g(\lambda_1) = 2$. Ne segue che la matrice A **non** è diagonalizzabile.
(b) L'autospazio V_{λ_1} risulta definito da:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 0 = 0 \ . \end{cases}$$

Ne segue facilmente che una base ortonormale di V_{λ_1} è, ad esempio,

$$\left\{ {}^t[1,0,0] \, , \, {}^t[0,1,0] \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 9.2:

(a)

$$\Pi \ : \quad x + y + z = 0 \ .$$

(b)

$$\mathrm{dist}(r_2, \, O) = \sqrt{\frac{3}{2}} \ .$$

(c) La comune perpendicolare è la retta

$$r \ : \qquad \begin{cases} x - z = 0 \\ 4x - y + 3 = 0 \ . \end{cases}$$

Soluzione dell'Es. 9.3: Usando il metodo del completamento dei quadrati si verifica facilmente che l'equazione di γ è equivalente a

$$\frac{(x-1)^2}{4} - (y-1)^2 = 1 \ ,$$

per cui γ è un'iperbole con $a = 2$, $b = 1$ e centro $C = [1, \, 1]$. Le equazioni degli asintoti sono:

$$y = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad y = -\,\frac{1}{2}\,x + \frac{3}{2} \ .$$

L'iperbole interseca l'asse x nei punti di ascissa $1 \pm 2\sqrt{2}$, mentre non interseca l'asse y . Da questi dati è facile realizzare la rappresentazione grafica di γ .

10. Prova dell'8 Gennaio 2015

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 10.1. (Punti: 8)
Sia
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$
Determinare P, con $\det(P) = 1$, tale che ${}^tP \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 10.2. (Punti: 5+5)
Siano $P = [1, 2, 0]$ e
$$r \ : \qquad \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 1 \ . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\operatorname{dist}(P, r)$.
(b) Scrivere un sistema lineare che definisce la retta r_1 che passa per P ed è parallela a r.

Esercizio 10.3. (Punti: 12)
Eseguire uno studio completo della conica γ definita da
$$5\,x^2 \,+\, 5\,y^2 - \,8\,xy \,-\, 9 \,= 0$$
(nello studio della rotazione, porre $\lambda_1 < \lambda_2$).

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova dell'8 Gennaio 2015:

Soluzione dell'Es. 10.1: Per prima cosa si calcolano gli autovalori:

$$\lambda_1 = 0 \; ; \qquad \lambda_2 = 3 \; ; \qquad \lambda_3 = 1 \; .$$

Poi si costruisce

$$P = \begin{bmatrix} 0 & (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \\ \\ 1 & 0 & 0 \\ \\ 0 & (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

e si verifica che $\det(P) = 1$ (se si fosse ottenuto $\det(P) = -1$, sarebbe stato sufficiente scambiare tra loro due colonne di P) (oppure cambiare il verso di un autovettore...(riflettere su cosa si sta facendo...)).

Soluzione dell'Es. 10.2:

(a) La proiezione otogonale di P su r è $Q = [(1/2),\, 1,\, -(1/2)]$. Quindi

$$\mathrm{dist}(P,\, r) = \mathrm{dist}(P,\, Q) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \; .$$

(b)

$$r_1 \;\; : \qquad \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \; . \end{cases}$$

Soluzione dell'Es. 10.3 (traccia): Si tratta di un'ellisse ruotata. Più precisamente, si determina la rotazione di assi:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \; ,$$

dove

$$P \; = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix} \; .$$

Rispetto alle coordinate $[x', y']$ (assi ruotati di un angolo pari a $(\pi/4)$ in senso antiorario) l'equazione della conica diventa:

$$\frac{x'^2}{9} + y'^2 = 1 \; .$$

Dunque, nel sistema ruotato $Ox'y'$, si procede al disegno di un'ellisse con semiassi rispettivamente $a = 3$ e $b = 1$.

11. Prova del 29 Gennaio 2015

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 11.1. (Punti: 4+4)
Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

(a) Stabilire se A è diagonalizzabile.
(b) Determinare una base ortonormale di V_{λ_1} , dove $\lambda_1 = 0$.

Esercizio 11.2. (Punti: 2+7+3)
Siano

$$r_1 \ : \ \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \ , \qquad r_2 \ : \ \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \ .$$

(a) Verificare che r_1 e r_2 sono sghembe.
(b) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2 .
(c) Determinare $Q_i = r \bigcap r_i$, $i = 1, 2$.

Esercizio 11.3. (Punti: 13)
Eseguire uno studio completo della conica non degenere γ definita da

$$x^2 + y^2 + 2\,xy - \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y = 0$$

(porre $\lambda_1 > \lambda_2$).

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 29 Gennaio 2015:

Soluzione dell'Es. 11.1: (a) Il polinomio caratteristico è:

$$P(\lambda) = -(1-\lambda)\,\lambda^3 .$$

Quindi abbiamo:

$$\lambda_1 = 0 \ , \ \ m_a(\lambda_1) = 3 \ ; \qquad \lambda_2 = 1 \ , \ \ m_a(\lambda_2) = 1 \ .$$

Dato che $m_g(\lambda_1) = n - \rho(A - \lambda_1 I) = 4 - \rho(A) = 2$, si può concludere che A NON è diagonalizzabile.
(b) Le 2 equazioni che definiscono V_{λ_1} sono $x_=0$, $x_4 = 0$. Quindi è immediato concludere che la base richiesta è:

$$\left\{ {}^t[1,0,0,0],\ {}^t[0,1,0,0] \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 11.2:

(a) Calcolo elementare...!!

(b)

$$r \ : \qquad \begin{cases} x - y + (4/3) = 0 \\ x + z + (2/3) = 0 \end{cases} .$$

(c) $Q_1 = [-(2/3),\ (2/3),\ 0]$, $Q_2 = [-(1/3),\ 1,\ -(1/3)]$.

Soluzione dell'Es. 11.3 (traccia): Si tratta di una parabola ruotata. Più precisamente, si determina la rotazione di assi:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

dove

$$P \ = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ & \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix} .$$

Rispetto alle coordinate $[x', y']$ (assi ruotati di un angolo pari a $(\pi/4)$ in senso antiorario) l'equazione della conica diventa:

$$y' = -\,x'^2 \ .$$

A questo punto, nel sistema ruotato $Ox'y'$, si procede al disegno della parabola, che risulta intersecare gli assi di partenza nei punti di coordinate (nel sistema Oxy) rispettivamente $[\sqrt{2},\ 0]$ e $[0,\ -\sqrt{2}]$.

12. Prova del 19 Febbraio 2015

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 12.1. (Punti: 3+3)
Sia
$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_5(\mathbb{R}) \ .$$

(a) Stabilire se A è diagonalizzabile.
(b) Determinare una base ortonormale di V_{λ_1} , dove $\lambda_1 = 0$.

Esercizio 12.2. (Punti: 4+2+2+7)
Sia
$$r_1 \ : \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -2t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(r_1, O)$.
(b) Determinare l'equazione del piano Π che contiene r_1 e O .
(c) Stabilire la reciproca posizione di r_1 e dell'asse z .
(d) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e all'asse z.

Esercizio 12.3. (Punti: 10)
Eseguire uno studio completo della conica γ definita da
$$2\,x^2 - 8\,y^2 + 4\,x + 32\,y - 32 = 0 \ .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 19 Febbraio 2015:

Soluzione dell'Es. 12.1: (a) Il polinomio caratteristico è:

$$P(\lambda) = -\lambda^5 \ .$$

Quindi abbiamo un unico autovalore:

$$\lambda_1 = 0 \ , \ \ m_a(\lambda_1) = 5 \ .$$

Dato che $m_g(\lambda_1) = n - \rho(A - \lambda_1 I) = 5 - \rho(A) = 3$, si può concludere che A NON è diagonalizzabile.

(b) L'autospazio V_{λ_1} ha dimensione 3 ed è definito dal sistema lineare:

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} .$$

Quindi una base ortonormale di V_{λ_1} è evidentemente:

$$\left\{ {}^t[1,0,0,0,0],\ {}^t[0,1,0,0,0],\ {}^t[0,0,0,1,0] \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 12.2:

(a) $\mathrm{dist}(r_1, O) = \mathrm{dist}(Q, O) = \sqrt{2}$, dove $Q = [1,1,0]$ è la proiezione ortogonale dell'origine O su r_1.

(b) $\pi \ : \quad x - y + 2z = 0$.

(c) Rette sghembe.

(d)

$$r \ : \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Soluzione dell'Es. 12.3 (traccia): Si tratta di un'iperbole traslata. Più precisamente, attraverso il metodo di completamento dei quadrati, si determina la traslazione di assi

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \end{cases} ,$$

rispetto alla quale l'equazione di γ è:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \ ,$$

con $a = 2$ e $b = 1$. In particolare, l'equazione dei due asintoti è $y' = \pm\,(b/a)x'$, ovvero:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{y} = -\,\frac{1}{2}\mathrm{x} + \frac{3}{2}\ .$$

A questo punto, nel sistema traslato $O'x'y'$, si procede al disegno dell'iperbole, che risulta intersecare gli assi di partenza nei punti di coordinate (nel sistema Oxy) rispettivamente

$$[-\sqrt{17} - 1,\ 0\,] \qquad \text{e} \qquad [\,\sqrt{17} - 1,\ 0\,]\ .$$

Si possono anche notare, nel disegno dei due rami di iperbole, i punti di coordinate (sempre con riferimento agli assi di partenza) rispettivamente $[-3,\ 2]$ e $[1,\ 2]$.