ESAMI E ESERCITAZIONI A.A. 2012-13

ANDREA RATTO

Sommario. In questo file presentiamo prove d'esame, esercitazioni ed esami relativi al Corso di Geometria e Algebra per Ingegneria Ambientale, Civile e Meccanica. Si noti che, durante tutte le prove d'esame, è ammessa la consultazione di qualunque materiale cartaceo (libri, appunti, formulari etc.) e l'uso di calcolatrici NON programmabili; viene invece fatto divieto di utilizzare computer portatili ed ogni altro dispositivo che consenta collegamento internet o video-audio con l'esterno (telefoni cellulari etc.).

1. Esercizi di preparazione alla prima prova intermedia

Tempo a disposizione: 45 minuti

Esercizio 1.1. Si considerino i vettori $\vec{u} = [1, -1, 2]$ e $\vec{v} = [4, 1, 3]$.

(i) Calcolare l'area A del parallelogramma individuato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(ii) Calcolare il volume V del parallelepipedo individuato da $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{k}$.
(iii) Scrivere l'equazione del piano π che passa per $P = [0, 2, 3]$ ed è parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(iv) Scrivere un sistema di equazioni che definisce la retta r passante per l'origine e parallela a $\vec{v}$.
(v) Scrivere l'equazione della sfera S avente centro l'origine e passante per il punto P di cui al (iii) sopra.
(vi) Scrivere l'equazione del piano π^* che contiene $P^* = [2, 1, 4]$ e la retta r di cui al (iv) sopra.

□

Esercizio 1.2. Risolvere in $\mathbb{C}$:

$$(z^2 + \sqrt{7}\, z + 4) \cdot (z^4 - 4) = 0$$

□

Esercizio 1.3. Sia $z = 3 - 4i$: calcolare

$$\mathrm{Re}(1/z) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(1/z) \; .$$

□

Soluzioni:

Soluzione dell'Es. 1.1:

(i) $A = 5\sqrt{3}$.

(ii) $V = 5$.

(iii) $\pi \quad : \quad x - y - z + 5 = 0$.

(iv)

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} .$$

(v) $S \quad : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 13$.

(vi) $\pi^* \quad : \quad x - 10y + 2z = 0$.

□

Soluzione dell'Es. 1.2: Abbiamo 6 soluzioni:

$$\frac{-\sqrt{7} \pm 3\,i}{2} \; ; \qquad \pm\sqrt{2} \; ; \qquad \pm\sqrt{2}\,i \; .$$

□

Soluzione dell'Es. 1.3:

$$\mathrm{Re}(1/z) = \frac{3}{25} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(1/z) = \frac{4}{25} \; .$$

□

2. Altri **IMPORTANTI** esercizi di preparazione alla prova intermedia del 12 Novembre 2012

Esercizio 2.1. Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 \,:\, \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases} \quad , \qquad r_2 \,:\, \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \quad .$$

(i) Stabilire se r_1 e r_2 sono incidenti oppure sghembe.
(ii) Se la risposta corretta alla domanda (i) era **incidenti**, allora determinare il piano Π che contiene r_1 e r_2. Se, invece, la risposta corretta alla domanda (i) era **sghembe**, allora determinare la comune perpendicolare a r_1 e r_2.

Esercizio 2.2. Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 \,:\, \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases} \quad , \qquad r_2 \,:\, \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \quad .$$

(i) Stabilire se r_1 e r_2 sono incidenti oppure sghembe.
(ii) Se la risposta corretta alla domanda (i) era **incidenti**, allora determinare il piano Π che contiene r_1 e r_2. Se, invece, la risposta corretta alla domanda (i) era **sghembe**, allora determinare la comune perpendicolare a r_1 e r_2.

Esercizio 2.3. Siano $P_0 = [2, 1, 0]$ e r la retta descritta da:

$$r \,:\, \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases} \quad .$$

(i) Calcolare $\text{dist}\,(P_0,\, r)$.
(ii) Scrivere l'equazione del piano Π che contiene P_0 e r.

Esercizio 2.4. Si considerino le seguenti matrici:

$$A \,=\, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B \,=\, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) Calcolare $A \cdot B$ e $B \cdot A$.
(ii) Calcolare

$$2\,A^2 - 3\,B \cdot A \cdot B \ .$$

3. Prova intermedia del 12 Novembre 2012 (Pari)

Tempo a disposizione: 60 minuti (Matricole Pari)

Esercizio 3.1. (Punti: 5)
Sia $z = -3 - 2i$: calcolare

$$\mathrm{Re}(1/z) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(1/z) \ .$$

$\square$

Esercizio 3.2. (Punti: 6+6+6+6)
Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases} \quad , \qquad r_2 : \begin{cases} x = -1 \\ y = z \end{cases} \quad .$$

(i) Stabilire se r_1 e r_2 sono incidenti oppure sghembe.
(ii) Se la risposta corretta alla domanda (i) era **incidenti**, allora determinare il piano Π che contiene r_1 e r_2. Se, invece, la risposta corretta alla domanda (i) era **sghembe**, allora determinare la comune perpendicolare a r_1 e r_2.
(iii) Determinare l'equazione del piano Π' che contiene l'origine O e la retta r_2 .
(iv) Calcolare $\mathrm{dist}(r_2, O)$.

$\square$

Esercizio 3.3. (Punti: 5)
Siano

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} , \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} .$$

Calcolare

$$A \cdot B \ \text{e} \ B \cdot A \ .$$

$\square$

Soluzioni della prova del 12 Novembre 2012 (Pari):

Soluzione dell'Es. 3.1:

$$\mathrm{Re}(1/z) = -\frac{3}{13} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(1/z) = \frac{2}{13} \ .$$

$\square$

Soluzione dell'Es. 3.2:

(i) Incidenti nel punto $P^* = [-1, 1, 1]$.

(ii) $\Pi \ : \qquad x + 2y - 2z + 1 = 0$.

(iii) $\Pi' \ : \qquad y - z = 0$.

(iv) $\mathrm{dist}(r_2, O) = 1$.

$\square$

Soluzione dell'Es. 3.3:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} , \qquad B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 9 & 7 \end{bmatrix} .$$

$\square$

4. Prova intermedia del 12 Novembre 2012 (Dispari)

Tempo a disposizione: 60 minuti (Matricole Dispari)

Esercizio 4.1. (Punti: 5)
Sia $z = -1 + 4i$: calcolare
$$\mathrm{Re}(1/z) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(1/z)\ .$$

□

Esercizio 4.2. (Punti: 6+6+6+6)
Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:
$$r_1 \ : \ \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -t \\ z = -1 \end{cases} \quad , \qquad r_2 \ : \ \begin{cases} x = 2 \\ y = -z \end{cases} \quad .$$

(i) Stabilire se r_1 e r_2 sono incidenti oppure sghembe.
(ii) Se la risposta corretta alla domanda (i) era **incidenti**, allora determinare il piano Π che contiene r_1 e r_2. Se, invece, la risposta corretta alla domanda (i) era **sghembe**, allora determinare la comune perpendicolare a r_1 e r_2.
(iii) Determinare l'equazione del piano Π' che contiene l'origine O e la retta r_2 .
(iv) Calcolare $\mathrm{dist}(r_2, O)$.

□

Esercizio 4.3. (Punti: 5)
Siano
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$
Calcolare
$$A \cdot B \ \text{e} \ B \cdot A\ .$$

□

Soluzioni della prova del 12 Novembre 2012 (Dispari):

Soluzione dell'Es. 4.1:

$$\mathrm{Re}(1/z) = -\frac{1}{17} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(1/z) = -\frac{4}{17} \ .$$

□

Soluzione dell'Es. 4.2:

(i) Incidenti nel punto $P^* = [2,\, 1,\, -1]$.

(ii) $\Pi \ : \qquad x - y - z - 2 = 0$.

(iii) $\Pi' \ : \qquad y + z = 0$.

(iv) $\mathrm{dist}(r_2,\, O) = 2$.

□

Soluzione dell'Es. 4.3:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \ , \qquad B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \ .$$

□

5. Esercitazione dell' 11 Dicembre 2012

Esercizio 5.1. (Punti: 7)
Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare una **matrice di rotazione** P tale che:

$$^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \ , \quad \text{con } \lambda_1 > \lambda_2 \ .$$

□

Esercizio 5.2. (Punti: 10) Usando i calcoli dell'Esercizio 5.1, svolgere lo studio completo dell'iperbole γ di equazione:

$$x^2 + 4xy + y^2 - 3 = 0 \ . \tag{5.1}$$

□

Esercizio 5.3. (Punti: 7) Determinare una base $\mathcal{C}$ del sottospazio vettoriale $W \subsetneq \mathbb{R}^4$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2\,x_4 = 0 \\ x_3 - 3\,x_4 = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

□

Esercizio 5.4. (Punti: 7) Calcolare la lunghezza dei semi-assi dell'ellisse γ di equazione:

$$9\,x^2 + 4\,y^2 + 36\,x + 40\,y + 100 = 0 \ . \tag{5.3}$$

□

Soluzioni dell'esercitazione dell'11 Dicembre 2012:

Soluzione dell'Es. 5.1: La matrice di rotazione
$$P = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$
è tale che:
$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \ .$$
□

Soluzione dell'Es. 5.2: Rispetto alle coordinate x', y' , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \ ,$$
l'equazione dell'iperbole γ diventa:
$$(x')^2 - \frac{(y')^2}{3} = 1 \ .$$
Si può inoltre osservare che, geometricamente, gli assi x', y' si ottengono da quelli di partenza mediante una rotazione, in senso antiorario, pari ad un angolo $\theta = (\pi/4)$.
Detto questo, è facile concludere passando alla rappresentazione grafica, in cui si consiglia di prestare attenzione alla rappresentazione degli asintoti di γ .
□

Soluzione dell'Es. 5.3: $\dim W = 1$ e una sua base è:
$$\mathcal{C} = \left\{ {}^t[\,-3,\, 7,\, 6,\, 2\,] \right\} \ .$$
□

Soluzione dell'Es. 5.4:
$$a = 2 \ , \quad b = 3 \ .$$
□

6. Prova parziale del 17 Dicembre 2012

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 6.1. (Punti: 7) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \; .$$

Determinare una **matrice di rotazione** P tale che:

$$^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \; , \quad \text{con } \lambda_1 < \lambda_2 \; .$$

□

Esercizio 6.2. (Punti: 10) Usando i calcoli dell'Esercizio 6.1, svolgere lo studio completo della conica γ di equazione:

$$2\,x^2 + 2\,xy + 2\,y^2 - 9 = 0 \; . \tag{6.1}$$

□

Esercizio 6.3. (Punti: 7) Determinare una base $\mathcal{C}$ del sottospazio vettoriale $W \subsetneq \mathbb{R}^4$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2\,x_4 = 0 \\ 2\,x_1 - x_2 - x_3 + 3\,x_4 = 0 \\ x_1 + 4\,x_2 + 4\,x_3 - 9\,x_4 = 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

□

Esercizio 6.4. (Punti: 7) Calcolare la lunghezza dei semi-assi dell'ellisse γ di equazione:

$$9\,x^2 + 4\,y^2 - 18\,x + 8\,y - 23 = 0 \; . \tag{6.3}$$

□

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva.

Soluzioni della prova parziale del 17 Dicembre 2012:

Soluzione dell'Es. 6.1: La matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \\ \\ -(1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

è tale che:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} .$$

□

Soluzione dell'Es. 6.2: La conica è non degenere e si tratta di un'ellisse. Rispetto alle coordinate x', y', legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

l'equazione dell'ellisse γ diventa:

$$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{3} = 1 .$$

Si può inoltre osservare che, geometricamente, gli assi x', y' si ottengono da quelli di partenza mediante una rotazione, in senso **orario**, pari ad un angolo $\theta = (\pi/4)$.
Detto questo, è facile concludere passando alla rappresentazione grafica dell'ellisse γ , i cui semi-assi hanno lunghezza rispettivamente 3 (lungo l'asse x') e $\sqrt{3}$ (lungo l'asse y').

□

Soluzione dell'Es. 6.3: $\dim W = 2$ e una sua base è:

$$\mathcal{C} = \left\{ {}^t[0, -1, 1, 0] , {}^t[-1, 7, 0, 3] \right\} .$$

□

Soluzione dell'Es. 6.4: Mediante il metodo di completamento dei quadrati si trova che l'equazione equivale a

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1 ,$$

da cui:

$$a = 2 , \quad b = 3 .$$

□

7. Prova del 14 Gennaio 2013, ore 10.00

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 7.1. (Punti: 12) Eseguire lo studio completo della conica γ di equazione:

$$x^2 + 2\,xy + y^2 + x - y = 0\ . \tag{7.1}$$

□

Esercizio 7.2. (Punti: 6+6) Siano $P = [\,2,\,0,\,1\,]$ e r la retta

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - 2y = 0\ . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P,\,r)$.

(b) Determinare (se possibile) l'equazione del piano Π che contiene r e l'asse y .

□

Esercizio 7.3. (Punti: 6) Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1\ . \end{cases} \tag{7.2}$$

□

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 14 Gennaio 2013, ore 10.00:

Soluzione dell'Es. 7.1: Si tratta di una conica non degenere, in quanto $\det A' \neq 0$. Poiché $\det A = 0$, si può subito capire che γ **è una parabola**. Diagonalizzando A , si trova che la matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

è tale che:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Rispetto alle coordinate x', y' , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = {}^tP \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ,$$

l'equazione della parabola γ diventa (fare il calcolo!!):

$$y' = \sqrt{2}\, x'^2 .$$

Tenendo conto che le colonne di P rappresentano rispettivamente i versori degli assi x' e y', è ora facile eseguire il disegno di γ (in pratica, gli assi x' e y' risultano ruotati, rispetto a quelli di partenza, in senso antiorario di un angolo pari a $\pi/4$; la parabola γ interseca gli assi **di partenza** nei punti di coordinate $[-1, 0]$ e $[0, 1]$. Non è necessario operare alcuna traslazione). □

Soluzione dell'Es. 7.2:

(a)

$$\mathrm{dist}(P, r) = \frac{\sqrt{41}}{3}$$

(b) Le 2 rette sono incidenti nell'origine, quindi è possibile determinare il piano richiesto. Si trova $\Pi \; : \quad x + z = 0$.

□

Soluzione dell'Es. 7.3: L'insieme delle soluzioni è:

$$\left\{ {}^t[\,-1 - x_4,\, 0,\, 1,\, x_4\,] \;\in\; \mathbb{R}^4 \;:\; x_4 \;\in\; \mathbb{R} \right\} .$$

□

8. Prova del 14 Gennaio 2013, ore 11.30

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 8.1. (Punti: 11) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare P tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

□

Esercizio 8.2. (Punti: 11) Determinare la comune perpendicolare r alle rette:

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 \ : \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \ , \end{cases}$$

precisando le coordinate del punto di intersezione di r con r_1 e del punto di intersezione di r con r_2 .

□

Esercizio 8.3. (Punti: 8) Calcolare centro C e semi-assi a, b dell'ellisse γ di equazione:

$$x^2 + 4\,y^2 + 6\,x - 24\,y + 37 = 0 \ . \tag{8.1}$$

□

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 14 Gennaio 2013, ore 11.30:

Soluzione dell'Es. 8.1: La matrice A ha 2 autovalori:

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2 \ ,$$

con $m_a(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1)$, e $m_a(\lambda_2) = 2 = m_g(\lambda_2)$: pertanto A è diagonalizzabile e si costruisce, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Osservazione: gli autospazi non risultano ortogonali fra loro, coerentemente col fatto che A , anche se è diagonalizzabile, **non è simmetrica**.

$\square$

Soluzione dell'Es. 8.2: Si trova:

$$r \ : \qquad \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

La retta r interseca r_1 nel punto di coordinate $[-1, 1, 1]$, e r_2 nel punto di coordinate $[0, 2, 1]$.

$\square$

Soluzione dell'Es. 8.3: Mediante il metodo di completamento dei quadrati si trova che l'equazione equivale a

$$(x + 3)^2 + 4\,(y - 3)^2 = 8 \ ,$$

da cui si ricava:

$$a = 2\sqrt{2} \ , \quad b = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad C = [-3,\, 3] \ .$$

$\square$

9. Prova dell' 1 Febbraio 2013

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 9.1. (Punti: 3+4+5) Si consideri il sottospazio vettoriale $W \subsetneq \mathbb{R}^5$ definito da

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\dim W$.
(b) Determinare una base di W .
(c) Determinare una base **ortonormale** di W .

□

Esercizio 9.2. (Punti: 5+5) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

(a) Determinare (se possibile) una matrice invertibile $P \in M_4(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.
(b) Determinare (se possibile) una matrice invertibile $P \in M_4(\mathbb{R})$ tale che ${}^tP \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

□

Esercizio 9.3. (Punti: 4+4) Siano $P = [3, 1, 0]$ e

$$r \ : \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P, r)$.
(b) Determinare (se possibile) il piano Π che contiene r e l'asse y .

□

Esercizio 9.4. (Punti: 6) Disegnare la conica degenere γ definita da

$$2x^2 - y^2 + xy = 0 \ .$$

□

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova dell' 1 Febbraio 2013:

Soluzione dell'Es. 9.1:

(a) $\dim W = 2$.
(b) Una base di W è:

$$\{\,[-1,1,0,0,0]\,,\,[-1,0,1,0,0]\,\}\ .$$

(c) Una base **ortonormale** di W è:

$$\Big\{\,[-(1/\sqrt{2}),(1/\sqrt{2}),0,0,0]\,,\,[-(1/\sqrt{6}),-(1/\sqrt{6}),(2/\sqrt{6}),0,0]\,\Big\}\ .$$

□

Soluzione dell'Es. 9.2: La matrice A è simmetrica, quindi la matrice richiesta P esiste in entrambi i casi. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ (doppio), $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$.
Studiando i relativi autospazi si ottiene (ad esempio):
(a)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

□

Soluzione dell'Es. 9.3:

(a) $\mathrm{dist}(P,r) = (\sqrt{22}/2)$.
(b) $\Pi\ : x + z = 0$.

□

Soluzione dell'Es. 9.4: L'equazione equivale a

$$(y-2x)\,\cdot\,(y+x) = 0\ ,$$

per cui γ è l'unione di due rette incidenti nell'origine:

$$r_1\ :\ y = 2x\ ,\qquad r_2\ :\ y = -x\ ,$$

□

10. Prova del 21 Febbraio 2013

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 10.1. (Punti: 5) Risolvere (se possibile) il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \quad . \end{cases}$$

□

Esercizio 10.2. (Punti: 4+4) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

(a) Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile.
(b) Posto $\lambda_1 = 0$, determinare una base **ortonormale** di V_{λ_1} .

□

Esercizio 10.3. (Punti: 7+4) Siano r_1 e r_2 2 rette sghembe. Detta r la loro comune perpendicolare, si ponga:

$$Q_1 = r \cap r_1 \quad \text{e} \quad Q_2 = r \cap r_2 \ .$$

Allora, la distanza tra r_1 e r_2 è definita dall'uguaglianza seguente:

$$\mathrm{dist}(r_1,\, r_2) \;=\; \mathrm{dist}(Q_1,\, Q_2) \ .$$

Nel caso specifico in cui

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \ , \end{cases} \qquad r_2 \ : \quad \begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \ , \end{cases}$$

(a) Determinare la comune perpendicolare r .
(b) Calcolare $\mathrm{dist}(r_1,\, r_2)$.

□

Esercizio 10.4. (Punti: 7) Disegnare la conica γ definita da

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0 \ .$$

□

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 21 Febbraio 2013:

Soluzione dell'Es. 10.1: $\rho(A) = 2$, mentre $\rho(A') = 3$: per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema **non** ammette soluzioni.

□

Soluzione dell'Es. 10.2: (a) Il polinomio caratteristico è:

$$P(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda^2 + 1) \ .$$

Quindi $P(\lambda)$ ha radici complesse, **non** reali $\pm i$. Ne segue che la matrice A **non** è diagonalizzabile.

(b) $\lambda_1 = 0$ ha molteplicità algebrica e geometrica pari a 2. L'autospazio V_{λ_1} risulta definito da:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0 = 0 \ . \end{cases}$$

Ne segue facilmente che una base ortonormale di V_{λ_1} è, ad esempio,

$$\{ [1, 0, 0, 0] \, , \, [0, 0, 0, 1] \} \ .$$

□

Soluzione dell'Es. 10.3:

(a) La comune perpendicolare è la retta

$$r \ : \qquad \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y = 0 \ . \end{cases}$$

(b) Si trova:

$$Q_1 = \left[\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right] \ , \quad Q_2 = [1, 0, 0] \ ,$$

da cui:

$$\mathrm{dist}(r_1, \, r_2) \ = \ \mathrm{dist}(Q_1, \, Q_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

□

Soluzione dell'Es. 10.4: Usando il metodo del completamento dei quadrati si verifica facilmente che l'equazione di γ è equivalente a

$$\frac{(x+1)^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \ ,$$

per cui γ è un'ellisse con semiassi paralleli agli assi x e y. Più precisamente, il centro dell'ellisse è il punto di coordinate $[-1,\, 1]$, il semiasse orizzontale a ha lunghezza 2, mentre il semiasse verticale è $b = 1$; da questi dati è immediato realizzare la rappresentazione grafica di γ .

$\square$

11. Prova del 12 Giugno 2013

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 11.1. (Punti: 8)
Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \, .$$

Determinare P tale che ${}^tP \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

□

Esercizio 11.2. (Punti: 5+5)
Siano $P = [1, 3, 0]$ e

$$r \; : \quad \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 1 \, . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P, r)$.
(b) Scrivere un sistema lineare che definisce la retta r_1 che passa per P ed è parallela a r.

□

Esercizio 11.3. (Punti: 12)
Eseguire uno studio completo della conica γ definita da

$$5\,x^2 + 5\,y^2 - 8\,xy - 9 = 0$$

(nello studio della rotazione, porre $\lambda_1 < \lambda_2$).

□

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 12 Giugno 2013:

Soluzione dell'Es. 11.1: Per prima cosa si calcolano gli autovalori:

$$\lambda_1 = 0 \ ; \qquad \lambda_2 = -1 \ ; \qquad \lambda_3 = 3 \ .$$

Poi si costruisce

$$P = \begin{bmatrix} 0 & (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix} .$$

□

Soluzione dell'Es. 11.2:

(a)

$$\mathrm{dist}(P,\, r) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \ .$$

(b)

$$r_1 \ : \qquad \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - 3 = 0 \ . \end{cases}$$

□

Soluzione dell'Es. 11.3 (traccia): Si tratta di un'ellisse ruotata. Più precisamente, si determina la rotazione di assi:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \ ,$$

dove

$$P \ = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix} .$$

Rispetto alle coordinate $[x', y']$ (assi ruotati di un angolo pari a $(\pi/4)$ in senso antiorario) l'equazione della conica diventa:

$$\frac{x'^2}{9} + y'^2 = 1 \ .$$

Dunque, nel sistema ruotato $Ox'y'$, si procede al disegno di un'ellisse con semiassi rispettivamente $a = 3$ e $b = 1$.

□

12. Prova del 28 Giugno 2013

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 12.1. (Punti: 4+4)
Sia
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

(a) Stabilire se A è diagonalizzabile.
(b) Determinare una base ortonormale di V_{λ_1} , dove $\lambda_1 = 0$.

$\square$

Esercizio 12.2. (Punti: 2+6+2)
Siano
$$r_1 \ : \ \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \ , \qquad r_2 \ : \ \begin{cases} x-y=0 \\ z=1 \end{cases} \ .$$

(a) Verificare che r_1 e r_2 sono sghembe.
(b) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2 .
(c) Determinare $Q_i = r \bigcap r_i$, $i = 1, 2$.

$\square$

Esercizio 12.3. (Punti: 12)
Eseguire uno studio completo della conica γ definita da
$$x^2 + y^2 + 2\,xy + \sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,y = 0 \ .$$

$\square$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 28 Giugno 2013:

Soluzione dell'Es. 12.1: (a) Il polinomio caratteristico è:
$$P(\lambda) = -\,(1-\lambda)\,\lambda^3\ .$$
Quindi abbiamo:
$$\lambda_1 = 0\ ,\ \ m_a(\lambda_1) = 3\ ; \qquad \lambda_2 = 1\ ,\ \ m_a(\lambda_2) = 1\ .$$
Dato che $m_g(\lambda_1) = n - \rho(A - \lambda_1\, I) = 4 - \rho(A) = 2$, si può concludere che A NON è diagonalizzabile.
(b)
$$\left\{{}^t[1,0,0,0],\ {}^t[0,0,1,0]\right\}\ .$$

Soluzione dell'Es. 12.2:

(a) Calcolo elementare...!!
(b)
$$r\ :\qquad \begin{cases} x + y + (2/3) = 0 \\ x - z + (4/3) = 0 \end{cases}\ .$$
(c) $Q_1 = [-\,(2/3),\ 0,\ (2/3)]\ , Q_2 = [-\,(1/3),\ -\,(1/3), 1]$.

Soluzione dell'Es. 12.3 (traccia): Si tratta di una parabola ruotata. Più precisamente, si determina la rotazione di assi:
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\ ,$$
dove
$$P\ =\ \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}\ .$$
Rispetto alle coordinate $[x', y']$ (assi ruotati di un angolo pari a $(\pi/4)$ in senso antiorario) l'equazione della conica diventa:
$$y' - x'^2 = 0\ .$$
A questo punto, nel sistema ruotato $Ox'y'$, si procede al disegno della parabola, che risulta intersecare gli assi di partenza nei punti di coordinate (nel sistema Oxy) rispettivamente $[-\,\sqrt{2},\ 0]$ e $[0,\ \sqrt{2}]$.

13. Prova del 19 Luglio 2013

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 13.1. (Punti: 3+3)
Sia
$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\in M_5(\mathbb{R})\ .$$

(a) Stabilire se A è diagonalizzabile.
(b) Determinare una base ortonormale di V_{λ_1} , dove $\lambda_1=0$.

$\square$

Esercizio 13.2. (Punti: 4+2+2+7)
Sia
$$r\ :\ \begin{cases}x=1-t\\y=1+t\\z=t\end{cases}\quad ,\quad t\in\mathbb{R}\ .$$

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(r,O)$.
(b) Determinare l'equazione del piano Π che contiene r e O .
(c) Stabilire la reciproca posizione di r e dell'asse z .
(d) Determinare la comune perpendicolare r_1 a r e all'asse z , precisando le coordinate del punto di intersezione tra r_1 e r, e quelle del punto di intersezione tra r_1 e l'asse z .

$\square$

Esercizio 13.3. (Punti: 9)
Eseguire uno studio completo dell'iperbole γ definita da
$$x^2-4\,y^2+2\,x+16\,y-16=0\ ,$$
precisando, in particolare, le equazioni dei 2 asintoti di γ nel sistema di riferimento Oxy .

$\square$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 19 Luglio 2013:

Soluzione dell'Es. 13.1: (a) Il polinomio caratteristico è:

$$P(\lambda) = -\lambda^5 \ .$$

Quindi abbiamo un unico autovalore:

$$\lambda_1 = 0 \ , \ \ m_a(\lambda_1) = 5 \ .$$

Dato che $m_g(\lambda_1) = n - \rho(A - \lambda_1 I) = 5 - \rho(A) = 3$, si può concludere che A NON è diagonalizzabile.

(b) L'autospazio V_{λ_1} ha dimensione 3 ed è definito dal sistema lineare:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} .$$

Quindi una base ortonormale di V_{λ_1} è evidentemente:

$$\left\{ {}^t[1,0,0,0,0],\ {}^t[0,0,1,0,0],\ {}^t[0,0,0,1,0] \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 13.2:

(a) $\text{dist}(r, O) = \text{dist}(Q, O) = \sqrt{2}$, dove $Q = [1,1,0]$ è la proiezione ortogonale dell'origine O su r.

(b) $\pi \ : \quad x - y + 2z = 0$.

(c) Rette sghembe.

(d)

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

$$r \cap r_1 = [1,1,0] \ ; \qquad r \cap \text{asse z} \ = [0,0,0] \ .$$

Soluzione dell'Es. 13.3 (traccia): Si tratta di un'iperbole traslata. Più precisamente, attraverso il metodo di completamento dei quadrati, si determina la traslazione di assi

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \end{cases} ,$$

rispetto alla quale l'equazione di γ è:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \ ,$$

con $a = 2$ e $b = 1$. In particolare, l'equazione dei due asintoti è $y' = \pm\,(b/a)x'$, ovvero:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{y} = -\,\frac{1}{2}\mathrm{x} + \frac{3}{2}\ .$$

A questo punto, nel sistema traslato $O'x'y'$, si procede al disegno dell'iperbole, che risulta intersecare gli assi di partenza nei punti di coordinate (nel sistema Oxy) rispettivamente

$$[-\sqrt{17}-1,\, 0\,] \qquad \text{e} \qquad [\,\sqrt{17}-1,\, 0\,]\ .$$

Si possono anche notare, nel disegno dei due rami di iperbole, i punti di coordinate (sempre con riferimento agli assi di partenza) rispettivamente $[-3,\, 2]$ e $[1,\, 2]$.

14. Prova del 4 Settembre 2013

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 14.1. (Punti: 8)

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare, se possibile, una matrice invertibile P tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

□

Esercizio 14.2. (Punti: 12)

Eseguire uno studio completo della conica γ definita da

$$7\,x^2 + 13\,y^2 - 6\sqrt{3}\,xy - 16 = 0$$

(nello studio di γ porre $\lambda_1 < \lambda_2$).

□

Esercizio 14.3. (Punti: 7+4)

Siano

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} x - 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \ , \qquad r_2 \ : \quad \begin{cases} x - 2 = 0 \\ y - 1 = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2, precisando le coordinate dei punti $Q_i = r \cap r_i$, $i = 1, 2$.

(b) Scrivere l'equazione della retta r_1^* che passa per l'origine ed è parallela a r_1 .

□

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 4 Settembre 2013:

Soluzione dell'Es. 14.1:

La matrice A possiede 3 autovalori reali e distinti, ovvero

$$\lambda_1 = 0 \ , \ \lambda_2 = 6 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -6 \ ,$$

quindi è diagonalizzabile e si può calcolare:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

Soluzione dell'Es. 14.2:

Dopo aver verificato che la conica non è degenere si calcolano gli autovalori associati alla parte quadratica dell'equazione, ovvero alla matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 13 \end{bmatrix} \ .$$

Si trova:

$$\lambda_1 = 4 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 16 \ ,$$

per cui la conica è un'ellisse. Diagonalizzando la matrice simmetrica A si ricava il cambio di coordinate:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sqrt{3}/2) & -(1/2) \\ (1/2) & (\sqrt{3}/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \ .$$

Rispetto alle coordinate x' , y' (che rappresentano un sistema ruotato di un angolo pari a $(\pi/6)$ in senso antiorario rispetto al sistema di partenza) l'equazione di γ diventa:

$$\frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1 \ .$$

Quindi non è necessario operare alcuna traslazione, e si procede facilmente al disegno dell'ellisse nel sistema x', y' (i semiassi sono $a = 2$ lungo l'asse x' e $b = 1$ lungo l'asse y' .

Soluzione dell'Es. 14.3:

(a)

$$r \ : \ \begin{cases} y - 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases} \ , \qquad Q_1 = [1, 1, 2] \quad \text{e} \quad Q_2 = [2, 1, 2] \ .$$

(b)

$$r_1^* \ : \qquad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \ . \end{cases}$$

15. Prova del 25 Settembre 2013

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 15.1. (Punti: 3+3+4)
Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Determinare $\dim W$.
(b) Determinare una base di W .
(c) Determinare una base ortonormale di W .

□

Esercizio 15.2. (Punti: 3+3+3+3)
Si considerino i vettori $\vec{u} = [1, 0, 1]$, $\vec{v} = [2, 1, 0]$ e il punto $P = [1, 3, 1]$.

(a) Determinare l'equazione del piano Π che contiene P ed è parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(b) Calcolare la distanza tra l'origine O e il piano Π .
(c) Scrivere il fascio di piani generato dalla retta r che passa per P ed è parallela a $\vec{v}$.
(d) Calcolare $\sin\theta$, dove θ indica l'angolo formato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

□

Esercizio 15.3. (Punti: 8)
Eseguire uno studio completo dell'iperbole γ definita da:

$$4x^2 - 9y^2 + 8x - 36y - 68 = 0$$

(in particolare, determinare l'equazione degli asintoti e le coordinate del centro RISPETTO AL SISTEMA DI PARTENZA Oxy).

□

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 25 Settembre 2013:

Soluzione dell'Es. 15.1: (a) La matrice dei coefficienti ha rango 2, per cui $\dim W = n - \rho(A) = 4 - 2 = 2$. Conviene quindi osservare che W è definito semplicemente da

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0\ . \end{array} \right. \tag{15.1}$$

(b) Da (15.1) si ricava immediatamente una base di W:

$$\mathcal{B} = \left\{ {}^t[1,0,0,1],\ {}^t[1,0,-1,0] \right\}\ . \tag{15.2}$$

(c) Ortonormalizzando $\mathcal{B}$ in (15.2) (si veda [1] p.289) si perviene a:

$$\mathcal{B}' = \left\{ {}^t[\,(1/\sqrt{2}), 0, 0, (1/\sqrt{2})\,],\ {}^t[\,(1/\sqrt{6}), 0, -(\sqrt{2}/\sqrt{3}), -(1/\sqrt{6})\,] \right\}\ .$$

Soluzione dell'Es. 15.2:

(a) $\Pi\ :\qquad x - 2y - z + 6 = 0$.
(b) $\mathrm{dist}(O, \Pi) = \sqrt{6}$.
(c) $\lambda\,(x - 2y + 5) + \mu\,(z - 1) = 0$, dove λ e μ sono parametri reali, non entrambi nulli.
(d) $\sin\theta = (\sqrt{3}/\sqrt{5})$.

Soluzione dell'Es. 15.3: Usando il metodo di completamento dei quadrati (si veda [1] p.593) si riconosce che l'equazione di γ equivale a:

$$\gamma\ :\ \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1\ . \tag{15.3}$$

Questa è la forma canonica

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1\ ,$$

con

$$x' = x + 1\ ,\ \ y' = y + 2\ ,\ \ a = 3 \quad \text{e} \quad b = 2\ .$$

Quindi concludiamo rapidamente che il centro ha coordinate $O' = [-1,\ -2]$ e gli asintoti sono:

$$y' = \pm\,\frac{b}{a}\,x' \qquad \text{ovvero} \qquad (y+2) = \pm\,\frac{3}{2}\,(x+1)\ ,$$

cioé:

$$y = \frac{3}{2}\,x - \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad y = -\,\frac{3}{2}\,x - \frac{7}{2}\ .$$

A questo punto si può procedere alla rappresentazione grafica (lo Studente dovrebbe riuscire a rappresentare correttamente il sistema di riferimento traslato rispetto al quale l'iperbole risulta in forma canonica, disegnando gli asintoti e facendo uno schizzo del grafico. In sede di studio a casa, è inoltre utile mettere in risalto alcuni punti notevoli, come ad esempio, rispetto alle coordinate di partenza,

$$[-\sqrt{18}-1, 0]\ , \quad [-4, -2]\ , \quad [2, -2]\ , \quad [\sqrt{18}-1, 0]\ .$$

Riferimenti bibliografici

[1] A. Ratto, A. Cazzani. *Matematica per le Scuole di Architettura*, Liguori Editore, Napoli (2010) pp.1-636.

Università degli Studi di Cagliari, Dipartimento di Matematica e Informatica, Viale Merello 93, 09123 Cagliari, Italia
E-mail address: `rattoa@unica.it`