ESAMI E ESERCITAZIONI A.A. 2011-12

ANDREA RATTO

Sommario. In questo file presentiamo prove d'esame, esercitazioni ed esami relativi al Corso di Geometria e Algebra per Ingegneria Biomedica e Meccanica. Si noti che, durante tutte le prove d'esame, è ammessa la consultazione di qualunque materiale cartaceo (libri, appunti, formulari etc.) e l'uso di calcolatrici NON programmabili; viene invece fatto divieto di utilizzare computer portatili ed ogni altro dispositivo che consenta collegamento internet o video-audio con l'esterno (telefoni cellulari etc.).

1. Esempio di Prova d'Esame

Tempo a disposizione: 60 minuti.

Esercizio 1.1. (8 punti) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Determinare gli autovalori di A e stabilire se A è diagonalizzabile. $\square$

Esercizio 1.2. (8 punti) Siano P_0 e r rispettivamente il punto di coordinate $[1, 0, 1]$ e la retta di equazione

$$\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \ . \end{cases} \tag{1.1}$$

Calcolare $\mathrm{dist}(P_0, r)$.

$\square$

Esercizio 1.3. (8 punti) Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ della seguente equazione:

$$(z^2 + z + 1) \cdot (z^3 + 8) = 0 \ . \tag{1.2}$$

$\square$

Esercizio 1.4. (6 punti) Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R}) \ . \tag{1.3}$$

Calcolare $\rho(A)$. $\square$

Soluzioni:

Esercizio 1.1. Il polinomio caratteristico (si veda [1], p.353) risulta essere:

$$P(\lambda) = \lambda^2 \cdot (2 - \lambda) \ .$$

Pertanto abbiamo 2 autovalori: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$, con $m_a(\lambda_1) = 2$. Per applicare il criterio di diagonalizzabilità (si veda [1], p.357) dobbiamo calcolare $m_g(\lambda_1)$. Si ottiene:

$$m_g(\lambda_1) = n - \rho(A - \lambda_1 I) = 3 - \rho(A) = 3 - 2 = 1 \ .$$

Poiché $m_a(\lambda_1) \neq m_g(\lambda_1)$, si conclude che A non è diagonalizzabile. $\square$

Soluzione dell'Es. 1.2: Il procedimento di soluzione è illustrato in [1], p. 91. La retta r risulta parallela a $[1, 0, -1]$; ne segue che l'equazione del piano Π che passa per P_0 ed è perpendicolare a r è:

$$\Pi : \quad x - z = 0 \ .$$

Ora, $\mathrm{dist}(P_0, r) = \mathrm{dist}(P_0, Q)$, dove $Q = \Pi \cap r$. Si trova

$$Q = \left[\frac{1}{2}, \, 2, \, \frac{1}{2}\right] \qquad \text{e} \qquad \mathrm{dist}(P_0, r) = \frac{3}{\sqrt{2}} \ .$$

$\square$

Soluzione dell'Es. 1.3: Si risolvono separatamente le due equazioni:

$$\text{(i)} \quad z^2 + z + 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \text{(ii)} \quad z^3 + 8 = 0 \ .$$

Per la (i) (si veda [1] p.116) si trovano:

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \qquad \text{e} \qquad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i \ .$$

Per la (ii) (si veda [1] p.121 e 127) si trovano:

$$z_3 = 1 + \sqrt{3}\, i \ , \qquad z_4 = -2 \qquad \text{e} \qquad z_5 = 1 - \sqrt{3}\, i \ .$$

In conclusione, le 5 soluzioni richieste sono $z_1, \ldots, z_5$.

$\square$

Soluzione dell'Es. 1.4: Si osserva che il minore di ordine 2 estratto da R_1, R_2, C_1 e C_2 è:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \ ,$$

per cui $\rho(A) \geq 2$. Poi, si verifica che i **3** minori di ordine 3 che lo **orlano** (si veda [1] p. 256) sono tutti nulli. Quindi, applicando il Teorema di Kronecker (si veda [1] p. 257) si può concludere che $\rho(A) = 2$.

□

2. Esempio di Prova d'Esame

Tempo a disposizione: 60 minuti.

Esercizio 2.1. (8 punti) Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \ . \tag{2.1}$$

□

Esercizio 2.2. (3+4+4 punti) Si consideri il sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$ definito dal seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \ . \tag{2.2}$$

- Calcolare $\dim(W)$;
- Determinare una base di W ;
- Determinare una base **ortonormale** di W .

□

Esercizio 2.3. (6 punti) Determinare la soluzione del seguente sistema di Cramer a coefficienti in $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} (1+i)x - y = 1 \\ (1+i)x + y = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Esercizio 2.4. (5 punti) Sia r la retta in $\mathbb{R}^3$ di equazione:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \ .$$

Determinare l'equazione del piano Π che contiene r e l'origine.

Soluzioni:

Soluzione dell'Es. 2.1: Bisogna controllare se sono soddisfatte le condizioni richieste dal criterio di diagonalizzabilità ([1], p. 357). Un calcolo fornisce il polinomio caratteristico:

$$P(\lambda) = -\,\lambda^3 \ .$$

Abbiamo un unico autovalore $\lambda_1 = 0$, con $m_a(\lambda_1) = 3$. D'altra parte, si ha:

$$m_g(\lambda_1) = n - \rho(A - \lambda_1\, I) = 3 - \rho(A) = 2 \ ,$$

per cui $m_g(\lambda_1) \neq m_a(\lambda_1)$ e, di conseguenza, la matrice A non risulta essere diagonalizzabile.

$\square$

Soluzione dell'Es. 2.2: La matrice dei coefficienti del sistema (2.2) è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

Poiché $\rho(A) = 2$, concludiamo (si veda [1] p. 271 e seguenti) che $\dim(W) = n - \rho(A) = 4 - 2 = 2$.

Risolvendo esplicitamente il sistema (x_3, x_4 incognite libere) si ottiene:
$W = \left\{ [(1/2)x_3 - (1/2)x_4, (1/2)x_3 + (1/2)x_4, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4 \, : \, x_3,\, x_4 \, \in \mathbb{R} \right\}$
Procedendo come illustrato in [1], p. 276, si arriva alla seguente **base** di W:

$$w_1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0 \right] \ , \qquad w_2 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1 \right] \ .$$

A questo punto, applicando il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt (si veda [1] p. 289), si perviene alla base **ortonormale** richiesta:

$$w_1' = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0 \right] \ , \qquad w_2' = \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}} \right] \ .$$

$\square$

Soluzione dell'Es. 2.3: Abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} (1+i) & -1 \\ (1+i) & 1 \end{bmatrix} \ , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \ . \tag{2.4}$$

Si ha: $\Delta = \det A = (2+2i) \neq 0$, per cui

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{(2+2i)} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{(2+2i)} = \frac{1}{4} - \frac{i}{4} \tag{2.5}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{(2+2i)} \begin{vmatrix} (1+i) & 1 \\ (1+i) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

In conclusione, $X = {}^t[\frac{1}{4} - \frac{i}{4}, -\frac{1}{2}]$. □

Soluzione dell'Es. 2.4: Il piano Π appartiene al fascio di piani generato da r (si veda [1] p. 80, 89) e pertanto è della forma:

$$\lambda(x - y + z - 1) + \mu(x + 2z) = 0 \ .$$

Imponendo che O appartenga a Π, si perviene a:

$$\Pi \ : \qquad x + 2z = 0 \ .$$

□

3. Esempio di Prova d'Esame

Tempo a disposizione: 60 minuti.

Esercizio 3.1. (7 punti) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

Stabilire se A è diagonalizzabile.

□

Esercizio 3.2. (8+3+3 punti) Siano P_0 e r rispettivamente il punto di coordinate $[1, 1, 0]$ e la retta di equazione

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z - 2 = 0 \ . \end{cases} \tag{3.1}$$

- Calcolare $\mathrm{dist}(P_0, r)$;
- Scrivere l'equazione del piano Π che contiene P_0 e l'asse z ;
- Scrivere l'equazione del piano Π' che contiene P_0 e l'asse y .

□

Esercizio 3.3. (4+5 punti) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ . \tag{3.2}$$

- Calcolare A^{-1} ;
- Risolvere (se possibile) il sistema lineare $A \cdot X = B$, dove:

$$B = {}^t[4, 4, 0] \ .$$

Soluzioni:

Soluzione dell'Es. 3.1: Il polinomio caratteristico è:

$$P(\lambda) = -\lambda \cdot [(1-\lambda)^2 + 1] \ ,$$

che ha due radici complesse, non reali, $1 \pm i$. Quindi A non è diagonalizzabile. $\square$

Soluzione dell'Es. 3.2: Il procedimento di soluzione è illustrato in [1], p. 91. La retta r risulta parallela a $[1, -1, 0]$; ne segue che l'equazione del piano Π che passa per P_0 ed è perpendicolare a r è:

$$\Pi : \quad x - y = 0 \ .$$

Ora, $\text{dist}(P_0, r) = \text{dist}(P_0, Q)$, dove $Q = \Pi \cap r$. Si trova

$$Q = [0,\ 0,\ 2] \qquad \text{e} \qquad \text{dist}(P_0, r) = \sqrt{6} \ .$$

Il piano Π appartiene al fascio di piani generato dall'asse z e pertanto la sua equazione è del tipo:

$$\lambda\, x + \mu\, y = 0 \ .$$

Imponendo il passaggio per P_0 si ottiene:

$$\Pi \ : \qquad x - y = 0 \ .$$

Il piano Π' appartiene al fascio di piani generato dall'asse y e pertanto la sua equazione è del tipo:

$$\lambda\, x + \mu\, z = 0 \ .$$

Imponendo il passaggio per P_0 si ottiene:

$$\Pi' \ : \qquad z = 0 \ .$$

$\square$

Soluzione dell'Es. 3.3: I calcoli sono svolti in dettaglio in [1], p. 281-2. Si trova:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} .$$

Il sistema lineare $A \cdot X = B$ è un sistema di Cramer e ammette l'unica soluzione:

$$X_0 = {}^t[1, 2, 1] .$$

4. Prova d'Esame del 25 Novembre 2011

Tempo a disposizione: 60 minuti.

Esercizio 4.1. (7 punti) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Stabilire se A è diagonalizzabile.

$\square$

Esercizio 4.2. (4+4+4 punti) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & -5 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcolare $\rho(A)$.
(b) Determinare l'insieme W delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A \cdot X = \vec{0}$ ($X = {}^t[x_1, \ldots, x_5]$) .
(c) Determinare una base $\mathcal{C}$ di W .

$\square$

Esercizio 4.3. (5+3+3 punti) Siano P_0 e r rispettivamente il punto di coordinate $[2, 1, 2]$ e la retta di equazione

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ x + z = 0 \ . \end{array} \right. \tag{4.1}$$

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P_0, r)$.
(b) Scrivere l'equazione del piano Π che contiene P_0 e la retta r .
(c) Scrivere l'equazione di una sfera S avente centro su r e passante per l'origine O .

$\square$

Soluzioni:

Soluzione dell'Es. 4.1: Il polinomio caratteristico è:

$$P(\lambda) = -\lambda \cdot (1 - \lambda)^2 ,$$

che ha radici reali $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$, con $m_a(\lambda_1) = 1$ e $m_a(\lambda_2) = 2$. Quindi bisogna calcolare $m_g(\lambda_2)$: si ha

$$m_g(\lambda_2) = n - \rho(A - \lambda_2 I) = 3 - 2 = 1 \quad (\neq m_a(\lambda_2)) \ .$$

Quindi A non è diagonalizzabile. □

Soluzione dell'Es. 4.2:

(a) $\rho(A) = 2$.

(b) $W = \{ {}^t[-2x_4 - 3x_5,\ -x_3 - x_4 - 4x_5,\ x_3,\ x_4,\ x_5\,] \in \mathbb{R}^5 \ :\ x_3,\ x_4,\ x_5 \in \mathbb{R} \}$.

(c) $\dim W = 3$ e $\mathcal{C} = \{ {}^t[0,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0\,],\ {}^t[-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0\,],\ {}^t[-3,\ -4,\ 0,\ 0,\ 1\,] \}$.

□

Soluzione dell'Es. 4.3:

(a) $\mathrm{dist}(P_0, r) = \mathrm{dist}(P_0, Q)$, dove $Q = [0, -1, 0]$. Si conclude poi $\mathrm{dist}(P_0, r) = 2\sqrt{3}$.

(b) $\Pi : \qquad x - 2y + z - 2 = 0$.

(c) **Ad esempio,** $C = [0, -1, 0]$ è un punto di r, quindi S può essere la sfera di equazione: $x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$. Più generalmente, dato che una rappresentazione parametrica di r è $[t, -1, -t]$, la generica sfera che ha centro su r e passa per l'origine ha equazione:

$$(x-t)^2 + (y+1)^2 + (z+t)^2 = 1 + 2t^2 ,$$

con il parametro t arbitrario in $\mathbb{R}$.

□

5. Prova d'Esame del 2 Dicembre 2011

Tempo a disposizione: 60 minuti.

Esercizio 5.1. (5+8 punti) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

(i) Calcolare gli autovalori di A e, per ciascuno di essi, determinare moltiplicità algebrica e geometrica.
(ii) Determinare, se possibile, $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

□

Esercizio 5.2. (6 punti) Se possibile, risolvere in $\mathbb{C}$:

$$\begin{cases} i\, z_1 + 2\, z_2 - i\, z_3 = 4 \\ z_1 - i\, z_2 = 1 - 2\, i \\ z_1 - z_3 = 0 \ . \end{cases}$$

□

Esercizio 5.3. (3+3+5 punti) Siano Π e P rispettivamente il piano di equazione $x - y = 0$ e il punto di coordinate $[2, 1, 3]$.

(i) Calcolare $\operatorname{dist}(\Pi,\, P)$.
(ii) Scrivere l'equazione del piano Π' che contiene l'asse z e P .
(iii) Sia $r = \Pi \cap \Pi'$: calcolare $\operatorname{dist}(r,\, P)$.

□

Soluzioni:

Soluzione dell'Es. 5.1: (i) Un calcolo fornisce:

$$P(\lambda) = -\lambda^2 (\lambda - 2) \ ,$$

per cui si deduce:

$$\lambda_1 = 0 \ , \quad m_a(\lambda_1) = 2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2 \ , \quad m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2) \ .$$

Poi, $m_g(\lambda_1) = 3 - \rho(A) = 2$.

(ii) Grazie ai calcoli della parte (i), si conclude (criterio di diagonalizzabilità, si veda [1] p.357) che A è diagonalizzabile e quindi P esiste. Seguendo il procedimento descritto in [1], p. 360, si costruisce P. Si ottiene:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

NOTA 1: Questa P soddisfa:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \ .$$

NOTA 2: P non è unica.....(rivedere bene [1], pp. 360-362).

□

Soluzione dell'Es. 5.2: Si tratta di un sistema di Cramer, con $\Delta = 2$. L'unica soluzione è:

$$^t[1, 2, 1] \ .$$

□

Soluzione dell'Es. 5.3:

(i) $\text{dist}(\Pi,\, P) = (1/\sqrt{2})$.
(ii) $\Pi' \ : \quad x - 2y = 0$.
(iii) r coincide con l'asse z e $\text{dist}(r,\, P) = \sqrt{5}$.

□

6. Prova d'Esame del 12 Gennaio 2012

Tempo a disposizione: 60 minuti.

Esercizio 6.1. (3+2+5 punti) Si consideri il cambio di coordinate

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

dove:

$$P = \begin{bmatrix} (2/\sqrt{7}) & -(\sqrt{3}/\sqrt{7}) \\ & \\ (\sqrt{3}/\sqrt{7}) & (2/\sqrt{7}) \end{bmatrix} .$$

(i) Calcolare P^{-1} .
(ii) Stabilire se P è una matrice di rotazione.
(iii) Sia γ l'ellisse di equazione:

$$2\,x'^{\,2} + y'^{\,2} = 1 .$$

Determinare l'equazione di γ rispetto alle coordinate x, y .

□

Esercizio 6.2. (4+8+4 punti) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

(i) Calcolare gli autovalori di A e, per ciascuno di essi, indicare molteplicità algebrica e geometrica.
(ii) Determinare, se possibile, $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.
(iii) Determinare, se possibile, $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che ${}^tP \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

□

Esercizio 6.3. (10 punti) Si considerino le rette r_1 e r_2 di equazione rispettivamente:

$$r_1 \ : \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 1 \ ; \end{cases} \qquad r_2 \ : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 1 \ . \end{cases}$$

Determinare l'equazione della comune perpendicolare r a r_1 e r_2 .

□

Soluzioni:

Soluzione dell'Es. 6.1: (i) Un semplice calcolo (si veda [1] p. 252) fornisce:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} (2/\sqrt{7}) & (\sqrt{3}/\sqrt{7}) \\ \\ -(\sqrt{3}/\sqrt{7}) & (2/\sqrt{7}) \end{bmatrix} .$$

(ii) Poiché $\det P = 1$ e $P^{-1} = {}^tP$ si può concludere ([1] p. 363) che P è una matrice di rotazione.

(iii) Ora

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = {}^tP \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} ,$$

ovvero:

$$\text{(6.1)} \qquad \begin{cases} x' = \frac{2}{\sqrt{7}}\, x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\, y \\ \\ y' = -\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\, x + \frac{2}{\sqrt{7}}\, y \ . \end{cases}$$

Usando (6.1) nell'equazione di γ si ottiene:

$$\gamma \ : \qquad 2\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\, x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\, y\right)^2 + \left(-\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\, x + \frac{2}{\sqrt{7}}\, y\right)^2 = 1 \ ,$$

ovvero:

$$\gamma : \qquad \frac{11}{7}\, x^2 + \frac{10}{7}\, y^2 + \frac{4\sqrt{3}}{7}\, xy = 1 \ .$$

$\square$

Soluzione dell'Es. 6.2: (i) Un semplice calcolo fornisce

$$P(\lambda) = -\lambda\,(\lambda^2 - 2) \ ,$$

per cui si hanno 3 autovalori reali e distinti, ognuno con molteplicità algebrica e geometrica pari a 1:

$$\lambda_1 = 0 \ , \quad \lambda_2 = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -\sqrt{2} \ .$$

(ii)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} .$$

(iii) (Si veda [1] pp. 364-365) Dato che gli autospazi hanno dimensione uno, l'ortonormalizzazione delle loro basi è immediata, per cui:

$$P = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & (1/2) & (1/2) \\ -(1/\sqrt{2}) & (1/2) & (1/2) \\ 0 & (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \end{bmatrix} .$$

□

Soluzione dell'Es. 6.3: Procedendo come indicato in [1], p. 111, si ricava:

$$r \ : \qquad \begin{cases} 3x + 3y - 2 = 0 \\ 3x - 3z + 2 = 0 \ . \end{cases}$$

Nota: una rappresentazione parametrica di r è:

$$[-(1/3) + t,\ 1 - t,\ (1/3) + t] \ .$$

□

7. Prova d'Esame del 2 Febbraio 2012

(Cognomi da A fino a Melis incluso)

Tempo a disposizione: 60 minuti.

Esercizio 7.1. (4+4 punti) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

(i) Stabilire se A è diagonalizzabile.
(ii) Determinare una base ortonormale dell'autospazio V_{λ_1} , dove $\lambda_1 = 1$.

□

Esercizio 7.2. (4+4+4+7 punti) Siano $P_1 = [1, 0, 2]$ e $P_2 = [0, 1, 4]$. Siano poi: r_1 la retta che passa per il punto P_1 ed è parallela all'asse x, e r_2 la retta che passa per P_2 ed è parallela all'asse z.

(i) Scrivere l'equazione del piano Π_1 che contiene l'asse y e P_1 .
(ii) Calcolare $\mathrm{dist}(r_1, O)$.
(iii) Scrivere l'equazione di una sfera S che ha centro su r_2 e passa per l'origine.
(iv) Determinare la comune perpendicolare* r a r_1 e r_2 .

□

Esercizio 7.3. (7 punti) Determinare le lunghezze dei semi-assi a, b dell'ellisse γ di equazione:

$$x^2 + \frac{y^2}{2} + 2x - y + 1 = 0 .$$

□

* **Nota:** Per comune perpendicolare si intende l'unica retta r che soddisfa le due condizioni seguenti:
(a) r è perpendicolare a r_1 e r_2;
(b) r è incidente a r_1 e r_2.

Soluzioni:

Soluzione dell'Es. 7.1: (i)

$$\lambda_1 = 1 \ , \qquad \lambda_2 = 0$$

con $m_a(\lambda_1) = 2$, mentre $m_g(\lambda_1) = 1$: A non è diagonalizzabile.

(ii) $\dim(V_{\lambda_1}) = m_g(\lambda_1) = 1$. Una sua base ortonormale è:

$$\vec{w} = {}^t[(1/\sqrt{3}),\ (1/\sqrt{3}),\ (1/\sqrt{3})] \ .$$

□

Soluzione dell'Es. 7.2:

(i)

$$\Pi_1 \ : \qquad 2x - z = 0 \ .$$

(ii)

$$\mathrm{dist}(r_1, O) = 2 \ .$$

(iii) La famiglia di sfere aventi centro su r_2 e passanti per l'origine è:

$$x^2 + (y-1)^2 + (z-t)^2 = 1 + t^2 \ ,$$

dove $t \in \mathbb{R}$. Per rispondere alla domanda, si può fissare arbitrariamente un valore di t .

(iv)

$$r \ : \qquad \begin{cases} x = 0 \\ z - 2 = 0 \ . \end{cases}$$

□

Soluzione dell'Es. 7.3: Siamo nel caso $a_{12} = 0$ (si veda [1] p.593): quindi, con un semplice completamento dei quadrati, si ricava:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \ ; \qquad b = 1 \ .$$

□

8. Prova d'Esame del 2 Febbraio 2012

(Cognomi da Melisa fino a ZZZ)

Tempo a disposizione: 60 minuti.

Esercizio 8.1. (4+4 punti) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

(i) Stabilire se A è diagonalizzabile.
(ii) Determinare una base ortonormale dell'autospazio V_{λ_1} , dove $\lambda_1 = 1$.

□

Esercizio 8.2. (4+4+4+7 punti) Siano $P_1 = [2, 0, 1]$ e $P_2 = [1, 1, 3]$. Siano poi: r_1 la retta che passa per il punto P_1 ed è parallela all'asse y, e r_2 la retta che passa per P_2 ed è parallela all'asse z.

(i) Scrivere l'equazione del piano Π_1 che contiene l'asse x e P_1 .
(ii) Calcolare $\mathrm{dist}(r_1, O)$.
(iii) Scrivere l'equazione di una sfera S che ha centro su r_2 e passa per l'origine.
(iv) Determinare la comune perpendicolare* r a r_1 e r_2 .

□

Esercizio 8.3. (7 punti) Determinare le lunghezze dei semi-assi a, b dell'ellisse γ di equazione:

$$x^2 + 4y^2 - 2x + 8y + 4 = 0 .$$

□

* **Nota:** Per comune perpendicolare si intende l'unica retta r che soddisfa le due condizioni seguenti:

(a) r è perpendicolare a r_1 e r_2;
(b) r è incidente a r_1 e r_2.

Soluzioni:

Soluzione dell'Es. 8.1: (i)

$$\lambda_1 = 1 \ , \qquad \lambda_2 = 0$$

con $m_a(\lambda_1) = 2$, mentre $m_g(\lambda_1) = 1$: A non è diagonalizzabile.

(ii) $\dim(V_{\lambda_1}) = m_g(\lambda_1) = 1$. Una sua base ortonormale è:

$$\vec{w} = {}^t[(1/\sqrt{3}), -(1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{3})] \ .$$

□

Soluzione dell'Es. 8.2:

(i)

$$\Pi_1 \ : \qquad y = 0 \ .$$

(ii)

$$\mathrm{dist}(r_1, O) = \sqrt{5} \ .$$

(iii) La famiglia di sfere aventi centro su r_2 e passanti per l'origine è:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-t)^2 = 2 + t^2 \ ,$$

dove $t \in \mathbb{R}$. Per rispondere alla domanda, si può fissare arbitrariamente un valore di t .

(iv)

$$r \ : \qquad \begin{cases} y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \ . \end{cases}$$

□

Soluzione dell'Es. 8.3: Siamo nel caso $a_{12} = 0$ (si veda [1] p.593): quindi, con un semplice completamento dei quadrati, si ricava:

$$a = 1 \ ; \qquad b = \frac{1}{2} \ .$$

□

9. Prova d'Esame del 23 Febbraio 2012

Tempo a disposizione: 60 minuti.

Esercizio 9.1. (8 punti) Risolvere in $\mathbb{C}$:

$$\left(z^2 + 3z + \frac{25}{4}\right) \cdot (z^4 + 16) = 0 \ .$$

□

Esercizio 9.2. (2+6 punti) Si consideri il cambio di coordinate

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \ ,$$

dove:

$$P = \begin{bmatrix} (\sqrt{3}/2) & -(1/2) \\ & \\ (1/2) & (\sqrt{3}/2) \end{bmatrix} \ .$$

(i) Calcolare P^{-1} .

(ii) Sia γ l'ellisse di equazione:

$$x'^{\,2} + 2\,y'^{\,2} = 1 \ .$$

Determinare l'equazione di γ rispetto alle coordinate x, y .

□

Esercizio 9.3. (8 punti) Si consideri la seguente famiglia di matrici dipendenti dal parametro $t \in \mathbb{R}$:

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ (t^2-1) & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \in M_{3,5}(\mathbb{R}) \ .$$

Calcolare $\rho(A_t)$ in funzione di $t \in \mathbb{R}$. □

Esercizio 9.4. (5+3 punti) Siano P_0 e Π rispettivamente il punto di coordinate $[1, 1, 2]$ e il piano di equazione

$$\Pi \ : \qquad x + 2z - 1 = 0 \ .$$

(i) Determinare le coordinate del punto P' simmetrico di P_0 rispetto a Π .

(ii) Scrivere l'equazione della sfera S avente centro in P_0 e tangente al piano Π .

□

Soluzioni:

Soluzione dell'Es. 9.1: Si trovano sei soluzioni in $\mathbb{C}$ (si veda [1], p.120 e p.116):

$$w_0 = -\frac{3}{2} + 2\,i\ ,\ w_1 = -\frac{3}{2} - 2\,i\ (= \bar{w_0})\ ;$$

e

$$z_0 = \sqrt{2} + i\,\sqrt{2}\ ,\ z_1 = -\sqrt{2} + i\,\sqrt{2}\ ,$$
$$z_2 = \bar{z_1} = -\sqrt{2} - i\,\sqrt{2}\ ,\ z_3 = \bar{z_0} = \sqrt{2} - i\,\sqrt{2}\ .$$

□

Soluzione dell'Es. 9.2: (i)

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} (\sqrt{3}/2) & (1/2) \\ \\ -(1/2) & (\sqrt{3}/2) \end{bmatrix} .$$

(ii) Usando (i) si ricava:

$$\begin{cases} x' = (\sqrt{3}/2)\,x + (1/2)\,y \\ y' = -(1/2)\,x + (\sqrt{3}/2)\,y\ . \end{cases}$$

Ora, sostituendo queste relazioni nell'equazione dell'ellisse si ricava:

$$\gamma\ :\qquad 5\,x^2 + 7\,y^2 - 2\,\sqrt{3}\,xy - 4 = 0\ .$$

□

Soluzione dell'Es. 9.3: Il minore

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} ,$$

estratto da R_1, R_2 e C_2, C_3 , è $\neq 0$, per cui $\rho(A_t) \geq 2\ \forall\ t \in \mathbb{R}$. Orlando questo minore con C_4 o con C_5 si ottengono minori di ordine 3 nulli. Orlando invece con C_1 , si ottiene (semplice calcolo!) un minore di ordine 3 che si annulla se e solo se $t^2 - 1 = 0$.
Conclusione: $\rho(A_t) = 2$ se $t = 1$ oppure $t = -1$. Invece $\rho(A_t) = 3$ per tutti gli altri valori di t .

□

Soluzione dell'Es. 9.4: (i) (Si veda [1] p.107). La proiezione ortogonale di P_0 su Π risulta essere il punto

$$Q = \left[\frac{1}{5},\ 1,\ \frac{2}{5}\right] .$$

Da ciò si calcola

$$P' = 2\,Q - P = \left[-\frac{3}{5},\ 1,\ -\frac{6}{5}\right] .$$

(ii) Il raggio R di S è pari alla distanza tra P_0 e Π, ovvero:

$$R^2 = |P_0 - Q|^2 = \frac{16}{5} \ .$$

Quindi l'equazione della sfera S è:

$$S \ : \qquad (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = \frac{16}{5} \ .$$

$\square$

10. Esame del 12 giugno 2012

Tempo a disposizione: 60 minuti.

Esercizio 10.1. (7 punti) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Determinare gli autovalori di A e stabilire se A è diagonalizzabile.

$\square$

Esercizio 10.2. (7+3 punti) Siano P_0 e r rispettivamente il punto di coordinate $[1, 0, 1]$ e la retta di equazione

$$\left\{ \begin{array}{l} x + z - 1 = 0 \\ y + z + 2 = 0 \end{array} \right. . \tag{10.1}$$

(i) Calcolare $\mathrm{dist}(P_0, r)$.
(ii) Determinare il punto P' simmetrico di P_0 rispetto a r .

$\square$

Esercizio 10.3. (7 punti) Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ della seguente equazione:

$$z^8 = 1 . \tag{10.2}$$

$\square$

Esercizio 10.4. (8 punti) Si consideri la seguente famiglia di matrici:

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & t & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R}) . \tag{10.3}$$

Calcolare $\rho(A_t)$ in funzione del parametro $t \in \mathbb{R}$.

$\square$

Soluzioni:

Esercizio 10.1. Il polinomio caratteristico è:

$$P(\lambda) = (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda) \ .$$

Pertanto abbiamo 2 autovalori: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$, con $m_a(\lambda_1) = 2$. Dobbiamo calcolare $m_g(\lambda_1)$:

$$m_g(\lambda_1) = n - \rho(A - \lambda_1 I) = 3 - 2 = 1 \ .$$

Poiché $m_a(\lambda_1) \neq m_g(\lambda_1)$, si conclude che A non è diagonalizzabile. $\square$

Esercizio 10.2. La proiezione ortogonale di P_0 su r risulta essere

$$Q = \left[\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{1}{3} \right] \ .$$

Da ciò si ricava:

$$\mathrm{dist}(P_0, r) = \mathrm{dist}(P_0, Q) = \sqrt{\frac{14}{3}}$$

$$P' = 2\,Q - P_0 = \left[\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{5}{3} \right] \ .$$

$\square$

Esercizio 10.3. L'equazione ha 8 soluzioni in $\mathbb{C}$:

$$\pm 1 \ , \quad \pm i \ , \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{2}}{2} \ , \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

$\square$

Esercizio 10.4. Il rango di A_t è 2 se $t = 0$, mentre vale 3 se $t \neq 0$. $\square$

11. Prova d'Esame del 29 Giugno 2012

Tempo a disposizione: 60 minuti.

Esercizio 11.1. (12 punti) Si consideri la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$
Determinare (se possibile) una matrice invertibile $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

□

Esercizio 11.2. (12 punti) Siano r_1 e r_2 le rette definite rispettivamente da:
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$
Determinare la comune perpendicolare* r a r_1 e r_2 .

□

Esercizio 11.3. (6+6 punti) Si consideri l'ellisse γ di equazione:
$$x^2 + 4\,y^2 - 2\,x + 8\,y + 4 = 0 \ .$$
(i) Determinare coordinate traslate
$$\begin{cases} x' = x + c \\ y' = y + d \end{cases}$$
rispetto alle quali γ risulti in forma canonica.

(ii) Determinare la lunghezza dei semi-assi di γ .

□

* **Nota:** Per comune perpendicolare si intende l'unica retta r che soddisfa le due condizioni seguenti:

(a) r è perpendicolare a r_1 e r_2;
(b) r è incidente a r_1 e r_2.

Soluzioni:

Soluzione dell'Es. 11.1: A è simmetrica, per cui è diagonalizzabile. Un semplice calcolo fornisce:

$$\lambda_1 = 0 \ , \qquad \lambda_2 = 3$$

con $m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1)$, mentre $m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2)$.
Una base di $\dim(V_{\lambda_1})$ è, ad esempio:

$$w_1 = {}^t[1,\, 0,\, -1] \ , \ w_2 = {}^t[1,\, -1,\, 0] \ .$$

Invece, una base di $\dim(V_{\lambda_2})$ è, ad esempio:

$$w_3 = {}^t[1,\, 1,\, 1] \ .$$

In conclusione:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

□

Soluzione dell'Es. 11.2:

$$r \ : \qquad \begin{cases} y = (1/2) \\ x + z - 1 = 0 \ . \end{cases}$$

□

Soluzione dell'Es. 11.3: Siamo nel caso $a_{12} = 0$ (si veda [1] p.593). Quindi, con un semplice completamento dei quadrati, si ricava che i semi-assi dell'ellisse sono

$$a = 1 \ ; \qquad b = \frac{1}{2} \ ,$$

mentre le coordinate traslate richieste sono:

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 1 \ . \end{cases}$$

□

12. Prova d'Esame del 16 Luglio 2012

Tempo a disposizione: 60 minuti.

Esercizio 12.1. (3+6 punti) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ . \tag{12.1}$$

(i) Calcolare, se possibile, A^{-1} .

(ii) Risolvere, se possibile, il sistema lineare $A \cdot X = B$, dove:

$$B = {}^t[0, 0, 1] \ .$$

□

Esercizio 12.2. (3+9 punti) Siano r_1 e r_2 le rette definite rispettivamente da:

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad\qquad r_2 \ : \quad \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

(i) Verificare che r_1 e r_2 sono sghembe.

(ii) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2 .

□

Esercizio 12.3. (6 punti) Si consideri l'iperbole γ di equazione:

$$\gamma \ : \qquad x^2 - 2\,y^2 + 2\,x + 8\,y - 8 = 0 \ .$$

Determinare coordinate traslate

$$\begin{cases} x' = x + c \\ y' = y + d \end{cases}$$

rispetto alle quali γ risulti in forma canonica.

□

Esercizio 12.4. (6 punti) Si consideri il piano Π in $\mathbb{R}^3$ di equazione:

$$\Pi \ : \qquad x - y = 0 \ .$$

Determinare una base ortonormale di Π . □

Soluzioni:

Soluzione dell'Es. 12.1: (i) $\det A = 0$, quindi A non è invertibile.

(ii) Il sistema non ammette soluzione, in quanto $\rho(A) \neq \rho(A')$.

$\square$

Soluzione dell'Es. 12.2: (i) Mettendo a sistema le equazioni che definiscono le due rette si arriva molto facilmente alla conclusione che esse non hanno punti in comune. Poi, dato che non sono parallele, si conclude che sono sghembe (lo Studente è invitato a riflettere bene e a capire ognuna di queste affermazioni).

(ii)

$$r \ : \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y - z - 2 = 0 \ . \end{cases}$$

$\square$

Soluzione dell'Es. 12.3: Siamo nel caso $a_{12} = 0$ (si veda [1] p.593). Quindi, con un semplice completamento dei quadrati, si ricavano le coordinate traslate richieste:

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \ . \end{cases}$$

$\square$

Soluzione dell'Es. 12.4:

$$\vec{w}_1 = {}^t[\,(1/\sqrt{2}),\, (1/\sqrt{2}),\, 0\,] \ , \quad \vec{w}_2 = {}^t[\,0,\, 0,\, 1\,] \ .$$

$\square$

13. Prova d'Esame del 6 Settembre 2012

Tempo a disposizione: 60 minuti.

Esercizio 13.1. (5+5 punti) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

(i) Stabilire se A è diagonalizzabile.
(ii) Determinare una base **ortonormale** dell'autospazio V_{λ_1} , dove $\lambda_1 = 1$.

$\square$

Esercizio 13.2. (4+6+4 punti) Siano $P_1 = [4, 0, 1]$ e $P_2 = [3, 1, 5]$. Siano poi: r_1 la retta che passa per il punto P_1 ed è parallela all'asse y, e r_2 la retta che passa per P_2 ed è parallela all'asse z.

(i) Scrivere l'equazione del piano Π_1 che contiene l'asse x e P_1 .
(ii) Calcolare $\text{dist}(r_1, O)$.
(iii) Scrivere l'equazione di una sfera S che ha centro su r_2 e passa per l'origine.

$\square$

Esercizio 13.3. (6 punti) Determinare le lunghezze dei semi-assi a, b dell'ellisse γ di equazione:

$$9\,x^2 + y^2 - 36\,x - 2y + 28 = 0 \ .$$

$\square$

Soluzioni:

Soluzione dell'Es. 13.1: (i)

$$\lambda_1 = 1 \ , \qquad \lambda_2 = 0$$

con $m_a(\lambda_1) = 2$, mentre $m_g(\lambda_1) = 1$: A non è diagonalizzabile.

(ii) $\dim(V_{\lambda_1}) = m_g(\lambda_1) = 1$. Una sua base ortonormale è:

$$\vec{w} = {}^t[0, \ 1, \ 0] \ .$$

$\square$

Soluzione dell'Es. 13.2:

(i)

$$\Pi_1 \ : \qquad y = 0 \ .$$

(ii)

$$\mathrm{dist}(r_1, O) = \sqrt{17} \ .$$

(iii) La famiglia di sfere aventi centro su r_2 e passanti per l'origine è:

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-t)^2 = 10 + t^2 \ ,$$

dove $t \in \mathbb{R}$. Per rispondere alla domanda, si può fissare arbitrariamente un valore di t .

$\square$

Soluzione dell'Es. 13.3: Attraverso il metodo di completamento dei quadrati si ricava la seguente forma equivalente per descrivere l'ellisse γ :

$$(x-2)^2 + \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \ .$$

Ne segue che

$$a = 1 \ ; \qquad b = 3 \ .$$

$\square$

14. Prova d'Esame del 21 Settembre 2012

Tempo a disposizione: 60 minuti.

Esercizio 14.1. (5+6 punti) Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

(i) Stabilire se A è diagonalizzabile.
(ii) Determinare una base **ortonormale** dell'autospazio V_{λ_1} , dove $\lambda_1 = 1$.

$\square$

Esercizio 14.2. (4+9 punti) Siano $P_1 = [0,0,1]$ e $P_2 = [3,2,0]$. Siano poi: r_1 la retta che passa per il punto P_1 ed è parallela all'asse y, e r_2 la retta che passa per P_2 ed è parallela all'asse z.

(i) Calcolare $\mathrm{dist}(r_1, O)$.
(ii) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2 .

$\square$

Esercizio 14.3. (6 punti) Risolvere (se possibile) il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 = 1 \quad . \end{cases}$$

$\square$

Soluzioni:

Soluzione dell'Es. 14.1: (i)

$$\lambda_1 = 1 \ , \qquad \lambda_2 = 2$$

con $m_a(\lambda_1) = 2$ e $m_a(\lambda_2) = 1$. Poi, si verifica che anche $m_g(\lambda_1) = 2$, da cui si deduce che A è diagonalizzabile.

(ii) $\dim(V_{\lambda_1}) = m_g(\lambda_1) = 2$. Una sua base ortonormale è:

$$\vec{w}_1 = {}^t[0,\, 1,\, 0] \ , \quad \vec{w}_2 = {}^t[0,\, 0,\, 1].$$

□

Soluzione dell'Es. 14.2:

(i)

$$\mathrm{dist}(r_1, O) = 1 \ .$$

(ii)

$$r \ : \qquad \begin{cases} y - 2 = 0 \\ z - 1 = 0 \ . \end{cases}$$

□

Soluzione dell'Es. 14.3:

Il sistema **non** ammette soluzione.

□

Riferimenti bibliografici

[1] A. Ratto, A. Cazzani. *Matematica per le Scuole di Architettura*, Liguori Editore, Napoli (2010) pp.1-636.

Università degli Studi di Cagliari, Dipartimento di Matematica e Informatica, Viale Merello 93, 09123 Cagliari, Italia
E-mail address: rattoa@unica.it