# ESAMI A.A. 2018-19

ANDREA RATTO

SOMMARIO. In questo file presentiamo esercitazioni e prove d'esame relative al Corso Integrato di Matematica, Modulo B, per Scienze dell'Architettura (a.a.2018-19). Si noti che, durante tutte le prove d'esame, è ammessa la consultazione di qualunque materiale cartaceo (libri, appunti, formulari etc.) e l'uso di calcolatrici NON programmabili; viene invece fatto divieto di utilizzare computer portatili ed ogni altro dispositivo che consenta collegamento internet o video-audio con l'esterno (smartphones, tablets etc.).

## 1. Esercizi di preparazione alla prima prova intermedia

**Tempo a disposizione: 120 minuti**

**Esercizio 1.1.** Si considerino i vettori $\vec{u} = [1, -1, 0]$ e $\vec{v} = [0, 1, 3]$ .

(i) Calcolare l'area $A$ del parallelogramma individuato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(ii) Calcolare il volume $V$ del parallelepipedo individuato da $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{j}$ .
(iii) Scrivere l'equazione del piano $\pi$ che passa per $P = [0, 2, 3]$ ed è parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ .
(iv) Scrivere un sistema di equazioni che definisce la retta $r$ passante per l'origine e parallela a $\vec{v}$ .
(v) Scrivere l'equazione della sfera $S$ avente centro l'origine e passante per il punto $P$ di cui al (iii) sopra.
(vi) Scrivere l'equazione del piano $\pi^*$ che contiene $P^* = [2, 0, 4]$ e la retta $r$ di cui al (iv) sopra.

**Esercizio 1.2.** Sia

$$P(Z) = (z^2 + 4\sqrt{2}\, z + 12)^4 \cdot (z^4 + 16)^3 \,.$$

Determinare le radici di $P(z)$ in $\mathbb{C}$, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

**Esercizio 1.3.** Sia $z = 3 + 4i$. Calcolare

$$\mathrm{Re}(1/z^2) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(1/\overline{z}^2) \,.$$

**Esercizio 1.4.** Siano $\pi : x + z = 0$ e $P = [0, 0, 2]$.

(i) Determinare la proiezione ortogonale $Q$ di $P$ sul piano $\pi$.
(ii) Calcolare $\mathrm{dist}(P, \pi)$.
(iii) Scrivere l'equazione della sfera $S$ di centro $P$ e tangente a $\pi$;
(iv) Determinare il punto $P'$ simmetrico di $P$ rispetto a $\pi$.

**Esercizio 1.5.** Siano $r_1$ e $r_2$ le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 \,:\, \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad , \qquad r_2 \,:\, \begin{cases} z - 1 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad .$$

Verificare che $r_1$ e $r_2$ sono sghembe e determinare la comune perpendicolare $r$ a $r_1$ e $r_2$, precisando le coordinate dei punti di intersezione $Q_i = r \cap r_i$, $i = 1, 2$.

**Esercizio 1.6.** Siano $r_1$ e $r_2$ le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 \,:\, \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 \end{cases} \quad , \qquad r_2 \,:\, \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \quad .$$

Verificare che $r_1$ e $r_2$ sono incidenti e precisare le coordinate del punto di intersezione $Q = r_1 \cap r_2$. Poi, determinare il piano $\pi$ che contiene $r_1$ e $r_2$.

**Esercizio 1.7.** Siano $P_0 = [1, 1, 0]$ e $r$ la retta descritta da:

$$r \, : \, \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases} .$$

(i) Calcolare $\operatorname{dist}(P_0, r)$ .
(ii) Scrivere l'equazione del piano $\Pi$ che contiene $P_0$ e $r$.

**Esercizio 1.8.** Siano $P_0 = [2, 1, 0]$, $P_1 = [-1, 1, 1]$ e $P_2 = [0, 2, 0]$.
(i) Determinare il piano $\pi$ asse del segmento $\overline{P_0 P_2}$.
(ii) Determinare il piano $\Pi$ che contiene $P_0$ e $P_1$ e $P_2$.

**Esercizio 1.9.** Siano $r_1$ e $r_2$ le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 \, : \, \begin{cases} x = 4 \\ z = 2 \end{cases} , \qquad r_2 \, : \, \begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases} .$$

Determinare la comune perpendicolare $r$ a $r_1$ e $r_2$, e poi ragionare sul risultato trovato.

**Esercizio 1.10.** Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ delle seguenti equazioni:

$$\text{(i) } z^8 = 81\,; \qquad \text{(ii) } z^6 = -8\,.$$

**Esercizio 1.11.** Si consideri il polinomio

$$P(z) = z^5 + 4z^4 + 7z^3 + 7z^2 + 4z + 1\,.$$

Dopo aver verificato che $z_0 = -1$ è una radice di $P(z)$, determinare $m_a(z_0)$. Poi, determinare le altre radici in $\mathbb{C}$ di $P(z)$.

**Esercizio 1.12.** Rappresentare graficamente in $\mathbb{R}^2$ il seguente sottoinsieme di $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \, : \, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 3 \operatorname{Re}(z) \ \text{ e } \ |z| \leq 1\}$$

## Soluzioni degli esercizi di preparazione alla prima prova intermedia:

**Soluzione dell'Es. 1.1:**

(i) $A = \sqrt{19}$ .
(ii) $V = 3$ .
(iii) $\pi \ : \quad 3x + 3y - z - 3 = 0$ .
(iv)

$$r \ : \quad \begin{cases} x = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} .$$

(v) $S \ : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 13$ .
(vi) $\pi^* \ : \quad 2x + 3y - z = 0$ .

**Soluzione dell'Es. 1.2:**

$$\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}\,, \ -\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$$

ognuna con molteplicità algebrica 3, e

$$-2\sqrt{2} \pm 2i\,,$$

ognuna con molteplicità algebrica 4.

**Soluzione dell'Es. 1.3:**

$$\mathrm{Re}(1/z^2) = -\frac{7}{625} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(1/\overline{z}^2) = \frac{24}{625} \ .$$

**Soluzione dell'Es. 1.4:**

(i) $Q = [-1, 0, 1]$.
(ii) $\mathrm{dist}\,(P, \pi) = \sqrt{2}$;
(iii) $S \ : \ x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$;
(iv) $P' = [-2, 0, 0]$.

**Soluzione dell'Es. 1.5:**

$$r \ : \quad \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

e

$$Q_1 = [-1, 2, 2] \ , \quad Q_2 = [-1, 2, 1] \ .$$

**Soluzione dell'Es. 1.6:**

$$\pi \ : \quad x + y - 1 = 0\,, \quad Q = [2, -1, 2] \ .$$

**Soluzione dell'Es. 1.7:**

(i) $\operatorname{dist}(P_0,\, r) = 3/\sqrt{2}$;
(ii) $\Pi \ : \ 2x + 2y + z - 4 = 0$.

**Soluzione dell'Es. 1.8:**

(i) $\pi \ : \ 4x - 2y - 1 = 0$;
(ii) $\Pi \ : \ x + 2y + 3z - 4 = 0$;

**Soluzione dell'Es. 1.9:**

$$r \ : \quad \begin{cases} x - 4 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

**Soluzione dell'Es. 1.10:**

(i)

$$\pm\sqrt{3}\,, \ \pm\sqrt{3}i\,, \ \frac{\sqrt{6}}{2} \pm i\frac{\sqrt{6}}{2}\,, \ -\frac{\sqrt{6}}{2} \pm i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

.

(ii)

$$\pm\sqrt{2}i\,, \ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}\,, \ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

.

**Soluzione dell'Es. 1.11:**

$$P(z) = (z+1)^3\,(z^2 + z + 1)$$

da cui $m_a(z_0) = 3$ e le altre radici di $P(z)$ sono $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$ con molteplicità algebrica 1.

**Soluzione dell'Es. 1.12:**

$$A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le y \le 3x \ \text{ e } \ x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

per cui si può procedere facilmente alla realizzazione del disegno.

## 2. Simulazione prima prova intermedia

**Tempo a disposizione: 60 minuti, Punteggio Massimo 17**

**Esercizio 2.1. (Punti: 2+2+2+3+3)** Si considerino i vettori $\vec{u} = [1,1,2]$ e $\vec{v} = [4,1,2]$ .

(i) Calcolare $\sin\vartheta$, dove $\vartheta$ è l'angolo formato dai vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(ii) Scrivere un sistema di equazioni che definisce la retta $r$ passante per l'origine e parallela a $\vec{v}$.

(iii) Determinare l'equazione del piano $\pi$ che passa per $P = [0,2,3]$ ed è parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(iv) Scrivere l'equazione della sfera $S$ avente centro l'origine e tangente al piano $\pi$ determinato rispondendo al quesito (iii) sopra.

(v) Calcolare la distanza tra l'origine e la retta

$$r^* \ : \quad \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ z = 0 \ . \end{cases}$$

**Esercizio 2.2. (Punti: 4)**
Siano $P(z) = z^5 + 10z^4 + 37z^3 + 63z^2 + 54z + 27$ e $z_0 = -3$. Calcolare $m_a(z_0)$ e determinare tutte le radici di $P(z)$ in $\mathbb{C}$, precisando per ognuna di esse la molteplicità algebrica.

**Esercizio 2.3. (Punti: 2+2)** Sia $z = \sqrt{2}\, e^{i\,(\pi/4)}$. Calcolare

$$\mathrm{Re}(1/z^4) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z^4) \ .$$

**Soluzione dell'Es. 2.1:**

(i)

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \ .$$

(ii)

$$r \ : \quad \begin{cases} x - 4y = 0 \\ 2y - z = 0 \ . \end{cases}$$

(iii) $\pi \ : \quad 2y - z - 1 = 0.$

(iv)

$$S \ : \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{5} \ .$$

(v)

$$\mathrm{Dist}(r^*, O) = \frac{1}{\sqrt{10}} \ .$$

**Soluzione dell'Es. 2.2:** $m_a(z_0) = 3$. Le altre due radici, entrambe con molteplicità algebrica 1, sono:

$$-\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

**Soluzione dell'Es. 2.3:**

$$\mathrm{Re}(1/z^4) = -\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z^4) = 0 \ .$$

## 3. Seconda simulazione prima prova intermedia

**Tempo a disposizione: 60 minuti, Punteggio Massimo 17**

**Esercizio 3.1. (Punti: 2+2+3+3)** Si considerino i vettori $\vec{u} = [1,1,2]$, $\vec{v} = [3,1,2]$ e $\vec{w} = [1,1,0]$ .

(i) Calcolare il volume $V$ del parallelepipedo individuato dai vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(ii) Determinare l'equazione del piano $\pi$ che è parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{w}$ e passa per $O$.

(iii) Siano $P = [1,2,3]$ e $\pi$ il piano determinato al punto (ii). Determinare la proiezione ortogonale $Q$ di $P$ su $\pi$ e il punto $P'$ simmetrico di $P$ rispetto a $\pi$.

(iv) Determinare l'equazione del piano $\pi^*$ che contiene l'origine e la retta

$$r^* \ : \quad \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ z = 0 \ . \end{cases}$$

**Esercizio 3.2. (Punti: 2+2)** Sia $z = 1 - i$. Calcolare

$$\mathrm{Re}(1/z^4) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z^4) \ .$$

**Esercizio 3.3. (Punti: 4)** Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ di:

$$z^6 = -1 \ .$$

**Esercizio 3.4. (Punti: 2)** Siano $r_1$ e $r_2$ le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 \ : \ \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad , \qquad r_2 \ : \ \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad .$$

Stabilire se $r_1$ e $r_2$ sono parallele, incidenti o sghembe (motivare la risposta).

**Soluzione dell'Es. 3.1:**

(i) $V = 4$.

(ii) $\pi \ : \quad x - y = 0$.

(iii)

$$Q = \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3\right] \ , \quad P' = [2, 1, 3] \ .$$

(iv) $\pi^* \ : \quad z = 0$.

**Soluzione dell'Es. 3.2:**

$$\mathrm{Re}(1/z^4) = -\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z^4) = 0 \ .$$

**Soluzione dell'Es. 3.3:**

$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $z_1 = i$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $z_4 = -i$, $z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ .

**Soluzione dell'Es. 3.4:** Le due rette sono incidenti in $Q = [0, -1, 2]$.

## 4. Prima prova intermedia (9 Aprile 2019)

**Tempo a disposizione: 60 minuti. Punteggio massimo 17.**

**Esercizio 4.1. (Punti: 3+3+3)**

Si considerino il piano $\pi : x + z = 0$, il punto $P = [1, 2, 1]$ e la retta

$$r \ : \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -t \\ z = t \ , \quad t \in \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

(i) Determinare la proiezione ortogonale $Q$ di $P$ su $\pi$ e dedurne $\mathrm{dist}(P, \pi)$.
(ii) Determinare l'equazione del piano $\pi_1$ che contiene $r$ e $P$ .
(iii) Calcolare $\mathrm{dist}(P,\, r)$.

**Esercizio 4.2. (Punti: 3+3)**
Siano $P(z) = z^4 + 7z^2 + 12$ e $P'(z) = z^2 + 4$:

(1) Calcolare quoziente e resto della divisione di polinomi
$$\frac{P(z)}{P'(z)} \ .$$
(2) Determinare le radici di $P(z)$ in $\mathbb{C}$, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

**Esercizio 4.3. (Punti: 3)**
Siano $r_1$ e $r_2$ le due rette definite rispettivamente da

$$r_1 \ : \ \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2t \\ z = -1 \end{cases} \ , \ t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad r_2 \ : \ \begin{cases} x + 2 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \ .$$

Stabilire se le due rette sono parallele, incidenti o sghembe, precisando le coordinate dell'eventuale punto di intersezione $Q = r_1 \bigcap r_2$ .

**NOTA:** Verrà attribuito un punteggio compreso tra $-2$ e $+2$ per valutare la qualità e la chiarezza dell'esposizione (scrivere molto **NON** equivale a qualità e chiarezza dell'esposizione).

## Soluzioni:

**Soluzione dell'Es. 4.1:**

(i)

$$Q = [0, 2, 0] \quad \text{e} \quad \operatorname{dist}(P, \pi) = \sqrt{2}\,.$$

(iii) $\pi_1 \ : \ 3x - 2y - 2z + 3 = 0$ .

(iii) $\operatorname{dist}(P,\, r) = \sqrt{(17/2)}\,.$

**Soluzione dell'Es. 4.2:**

(1) Quoziente e resto sono rispettivamente:

$$Q(z) = z^2 + 3 \ \ ; \qquad R(z) \equiv 0 \ .$$

(2) In base a (1), $P(z) = (z^2 + 4)\,(z^2 + 3)$, per cui abbiamo 4 radici:

$$z_0 = 2i,\ z_1 = -2i \quad \text{e} \quad z_3 = \sqrt{3}i\,, \quad z_4 = -\sqrt{3}i\,.$$

Tutte le radici hanno molteplicità algebrica 1.

**Soluzione dell'Es. 4.3:**

Le due rette sono incidenti in $Q = [-2, 1, -1]$.

## 5. Esercizi di preparazione alla seconda prova parziale

**Esercizio 5.1.** Svolgere lo studio completo dell'iperbole $\gamma$ di equazione

$$x^2 + 6xy + y^2 - 4 = 0 \ , \tag{5.1}$$

esplicitando, in particolare, le equazioni degli asintoti rispetto alle coordinate $x$, $y$ e le coordinate dei punti di intersezione di $\gamma$ con gli assi $x$, $y$ (porre $\lambda_1 > \lambda_2$).

**Esercizio 5.2.** Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3\,x_4 = 0 \\ x_3 + 3\,x_4 = 0 \end{cases} \tag{5.2}$$

**Esercizio 5.3.** Calcolare la lunghezza dei semiassi dell'ellisse $\gamma$ di equazione

$$9\,x^2 + 4\,y^2 + 36\,x + 40\,y + 100 = 0 \tag{5.3}$$

e rappresentarla graficamente.

**Esercizio 5.4.** Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})\,.$$

Stabilire se $A$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

### Soluzioni degli esercizi di preparazione alla seconda prova parziale:

**Soluzione dell'Es. 5.1:** Si trovano gli autovalori di $A$: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$. Poi, la matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ & \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

è tale che:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \ .$$

Rispetto alle coordinate $x'$, $y'$ , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$
l'equazione dell'iperbole $\gamma$ diventa:
$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$
con $a = 1$ e $b = \sqrt{2}$. Si può inoltre osservare che, geometricamente, gli assi $x'$, $y'$ si ottengono da quelli di partenza mediante una rotazione, in senso antiorario, pari ad un angolo $\theta = \pi/4$. In particolare, l'asse $x'$ coincide con la retta $y = x$, mentre l'asse $y'$ è la retta $y = -x$. Gli asintoti di $\gamma$ hanno equazione:
$$y = \left[\frac{1+b}{1-b}\right] x \qquad \text{e} \qquad y = \left[\frac{1-b}{1+b}\right] x$$
Inoltre, l'iperbole interseca gli assi di partenza in $[0, \pm 2]$ e $[\pm 2, 0]$. A questo punto non è difficile concludere realizzando la rappresentazione grafica di $\gamma$ .

**Soluzione dell'Es. 5.2:** Abbiamo $\infty^1$ soluzioni:
$$\left\{ {}^t[-2\,x_4,\, -2\,x_4,\, -3\,x_4,\, x_4] \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_4 \in \mathbb{R} \right\} .$$

**Soluzione dell'Es. 5.3:** Completando i quadrati si riscrive l'equazione di $\gamma$ come:
$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+5)^2}{9} = 1$$
da cui si ricavano i semiassi $a = 2$, $b = 3$ e si realizza il disegno.

**Soluzione dell'Es. 5.4:** $A$ ha $n = 3$ autovalori reali e distinti, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ e quindi è diagonalizzabile. Si ricava
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

## 6. Seconda prova parziale a.a. 2018-19

**Tempo a disposizione: 75 minuti. Voto massimo: 18.**

**Esercizio 6.1. (Punti: 8)** Svolgere lo studio completo della conica $\gamma$ di equazione:

$$2\,x^2 + \,4\,xy + \,5\,y^2 \,-\, 36 \,=\, 0$$

(porre $\lambda_1 < \lambda_2$ e precisare le coordinate degli eventuali punti di intersezione di $\gamma$ con gli assi $x$ e $y$).

**Esercizio 6.2. (Punti: 4)** Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 6.3. (Punti: 4)** Sia

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;\in\; M_3(\mathbb{R}) \;.$$

Determinare (se possibile) una matrice invertibile $P \in\; M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

**Esercizio 6.4. (Punti: 4)** Disegnare la conica $\gamma$ di equazione

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1\,,$$

precisando le coordinate delle eventuali intersezioni di $\gamma$ con gli assi $x$ e $y$.

**NOTA:** Verrà attribuito un punteggio compreso tra $-2$ e $+2$ per valutare la chiarezza espositiva.

## Soluzioni della seconda prova parziale a.a. 2018-19:

**Soluzione dell'Es. 6.1:** La conica è non degenere e si tratta di un'ellisse ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$). Rispetto alle coordinate $x'$, $y'$, legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

dove

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} ,$$

l'equazione della conica $\gamma$ diventa:

$$\frac{x'^2}{36} + \frac{y'^2}{6} = 1 .$$

Osservando che le colonne di $P$ rappresentano i versori degli assi ruotati si procede al disegno dei nuovi assi (l'asse $x'$ ha equazione $x + 2y = 0$, mentre l'asse $y'$ è la retta $2x - y = 0$) e al disegno qualitativo dell'ellisse. I semiassi hanno lunghezza $a = 6$ e $b = \sqrt{6}$. Inoltre, $\gamma$ interseca l'asse $x$ nei punti di ascissa $\pm(3\sqrt{2})$ e l'asse $y$ nei punti di ordinata $\pm(6/\sqrt{5})$.

**Soluzione dell'Es. 6.2:** L'insieme delle soluzioni è

$$\left\{ {}^t[-2x_4, x_3, x_3, x_4] \in \mathbb{R}^4 \colon x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} .$$

**Soluzione dell'Es. 6.3:** Si trovano gli autovalori:

$$\lambda_1 = 0 \quad (\, m_a(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1)\,) \quad , \quad \lambda_2 = 2 \quad (\, m_a(\lambda_2) = 2 = m_g(\lambda_2)\,) \ .$$

Quindi $A$ è diagonalizzabile e la matrice $P$ richiesta dunque esiste. Si costruisce ora la matrice $P$ e si trova, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

**Soluzione dell'Es. 6.4:** Si tratta di un'ellisse con centro $C = [-2, -3]$ e assi di simmetria paralleli agli assi $x$ e $y$. Le lunghezze dei due semiassi sono rispettivamente $a = 2$ e $b = 3$. L'ellisse risulta tangente all'asse $x$ nel punto di ascissa $-2$, e tangente all'asse $y$ nel punto di ordinata $-3$.

## 7. Esame del 18 giugno 2019

**Tempo a disposizione: 60 minuti**

**Esercizio 7.1. (Punti: 10)** Svolgere lo studio completo della conica $\gamma$ di equazione:

$$73\,x^2 - 72\,xy + 52\,y^2 - 400 = 0 \tag{7.1}$$

(porre $\lambda_1 < \lambda_2$).

**Esercizio 7.2. (Punti: 5)** Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2\,x_4 = 0 \\ x_3 - 3\,x_4 = 0 \end{cases} \tag{7.2}$$

**Esercizio 7.3. (Punti: 5)** Determinare, precisandone le molteplicità algebriche, le radici in $\mathbb{C}$ del seguente polinomio:

$$P(z) = \left(z^2 + z + 3\right)^3\, \left(z^6 - 1\right)\ .$$

**Esercizio 7.4. (Punti: 5+5)**

Siano $\Pi\colon\, x + y - z = 0$ e $P = [1, 2, 1]$.

(i) Determinare l'equazione della sfera $S$ che è tangente al piano $\Pi$ ed ha centro in $P$.

(ii) Determinare il punto $P'$ simmetrico di $P$ rispetto a $\Pi$.

**NOTA:** Verrà attribuito un punteggio compreso tra $-3$ e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva.

## Soluzioni della prova d'esame del 18 giugno 2019:

**Soluzione dell'Es. 7.1:** Conica non degenere (ellisse). Gli autovalori della matrice $A$ associata alla parte quadratica sono $\lambda_1 = 25$ e $\lambda_2 = 100$. Poi, si individua la matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (3/5) & (4/5) \\ \\ -(4/5) & (3/5) \end{bmatrix} \quad \text{tale che} \quad {}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} .$$

Rispetto alle coordinate $x'$, $y'$ legate alle coordinate di partenza da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

l'equazione dell'ellisse $\gamma$ diventa:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$$

con $a = 4$ e $b = 2$. L'equazione dell'asse $x'$ è $4x + 3y = 0$. Ora si può disegnare l'ellisse mettendo in luce anche le intersezioni con l'asse $x$ in $x_\pm = \pm(20/\sqrt{73})$ e con l'asse $y$ in $y_\pm = \pm(20/\sqrt{52})$.

**Soluzione dell'Es. 7.2:** $\rho(A) = \rho(A') = 3$ e l'insieme $I$ delle soluzioni è descritto da:

$$I = \left\{ {}^t[-3x_4, 7x_4, 6x_4, 2x_4] \in \mathbb{R}^4 \colon x_4 \in \mathbb{R} \right\} .$$

**Soluzione dell'Es. 7.3:** Le radici di $P(z)$ sono

$$-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{11}}{2}$$

con molteplicità algebrica 3, e poi

$$\pm 1 , \quad \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

con molteplicità algebrica 1.

**Soluzione dell'Es. 7.4:**

(i)

$$S \colon (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \frac{4}{3} .$$

(ii)

$$P' = \left[ -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3} \right] .$$

## 8. Prova del 9 Luglio 2019

**Tempo a disposizione: 70 minuti**

**Esercizio 8.1. (Punti: 5+5)** Siano $P = [\,1,\,0,\,2\,]$ e $r$ la retta

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+2z=0\ . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P,\,r)$ .

(b) Determinare (se possibile) l'equazione del piano $\Pi$ che contiene $r$ e l'asse $y$ .

**Esercizio 8.2. (Punti: 3)** Determinare le radici in $\mathbb{C}$ del seguente polinomio, precisando per ognuna di esse il valore della sua molteplicità algebrica:

$$P(z)\ =(z^2+z+4)^5\ .$$

**Esercizio 8.3. (Punti: 5)** Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_4=-1\ . \end{cases} \tag{8.1}$$

**Esercizio 8.4. (Punti: 7)** Sia

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ \in\ M_3(\mathbb{R})\ .$$

Stabilire se $A$ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare $P\in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1}\cdot A\cdot P$ sia una matrice diagonale.

**Esercizio 8.5. (Punti: 5)** Disegnare nel piano cartesiano l'ellisse

$$\gamma\ :\qquad 4x^2+9y^2-8x+18y-23=0$$

precisando la lunghezza dei semiassi e le coordinate del centro $C$.

**NOTA:** Verrà attribuito un punteggio compreso tra $-3$ e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

## Soluzioni della prova del 9 Luglio 2019:

**Soluzione dell'Es. 8.1:**

(a) Calcolando opportunamente, si ottiene che la proiezione ortogonale di $P$ su $r$ è $O$, per cui $\mathrm{dist}(P, r) = \sqrt{5}$.

(b) Le 2 rette sono incidenti nell'origine, quindi è possibile determinare il piano richiesto. Si trova $\Pi\ :\ x + 2z = 0$.

**Soluzione dell'Es. 8.2:** Le radici di $P(z)$ sono

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{15}}{2}\ ,\quad z_2 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{15}}{2}\ ,$$

entrambe con molteplicità algebrica 5.

**Soluzione dell'Es. 8.3:** L'insieme delle soluzioni è:

$$\left\{\ {}^t[\,-1 - x_4,\, 0,\, 1,\, x_4\,]\ \in \mathbb{R}^4\ :\ x_4\ \in \mathbb{R}\right\}\ .$$

**Soluzione dell'Es. 8.4:** Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda = -\lambda\,(1-\lambda)^2\ ,$$

quindi ha solo radici reali: $\lambda_1 = 1$, con $m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1)$, e $\lambda_2 = 0$, con $m_a(\lambda_2) = 1 (= m_g(\lambda_2))$, quindi $A$ è diagonalizzabile. Si trova, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Soluzione dell'Es. 8.5:** Usando il metodo di completamento dei quadrati si riscrive l'equazione di $\gamma$ come segue:

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1\ ,$$

da cui si deducono $C = [1, -1]$ e le lunghezze dei due semiassi, cioè $a = 3$ e $b = 2$. Infine, si procede senza difficoltà al disegno di $\gamma$.

## 9. Prova del 25 Luglio 2019

**Tempo a disposizione: 60 minuti**

**Esercizio 9.1. (Punti: 4)** Sia
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

Calcolare (se possibile) $A^{-1}$.

**Esercizio 9.2. (Punti: 4+6)** Siano $P = [1, 1, 0]$ e :
$$r \ : \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione del piano $\Pi$ che contiene $P$ e $r$ .
(b) Calcolare $\mathrm{dist}(P, r)$ .

**Esercizio 9.3. (Punti: 7)** Svolgere lo studio completo della conica $\gamma$ di equazione
$$2xy - 1 = 0 \tag{9.1}$$
(porre $\lambda_1 > \lambda_2$).

**Esercizio 9.4. (Punti: 5)** Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:
$$\begin{cases} x_1 + 2\,x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + \ x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 9.5. (Punti: 5)** Sia $z = 1 + i$. Calcolare
$$\mathrm{Re}(z^{25}) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z^{25}) \ .$$

**NOTA:** Verrà attribuito un punteggio compreso tra $-3$ e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

## Soluzioni della prova del 25 Luglio 2019:

**Soluzione dell'Es. 9.1:**

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & (1/2) & -(1/2) \\ 0 & (1/2) & -(1/2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

**Soluzione dell'Es. 9.2:** (a)

$$\Pi \;:\qquad x - y = 0 \;.$$

(b) La proiezione ortogonale di $P$ su $r$ è $Q = [(2/3), (2/3), -(2/3)]$. Quindi $\mathrm{dist}(P, r) = \mathrm{dist}(P, Q) = \sqrt{(2/3)}$.

**Soluzione dell'Es. 9.3:** La conica è non degenere e si tratta di un'iperbole ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$). Rispetto alle coordinate $x'$, $y'$, legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} , \quad \text{dove}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} ,$$

l'equazione della conica $\gamma$ diventa

$$x'^2 - y'^2 = 1 \;.$$

A questo punto si disegnano facilmente gli assi $x'$, $y'$ (rotazione in senso antiorario di un angolo pari a $(\pi/4)$) e l'iperbole $\gamma$ che ha centro nell'origine e asintoti coincidenti con gli assi di partenza.

**Soluzione dell'Es. 9.4:** L'insieme delle soluzioni del sistema è:

$$\left\{ {}^t[-x_3,\, 0,\, x_3,\, 0] \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_3 \in \mathbb{R} \right\} .$$

**Soluzione dell'Es. 9.5:** Si osserva che $z = \sqrt{2}\, e^{i\,\frac{\pi}{4}}$, da cui $z^{25} = 2^{12}\sqrt{2}\, e^{i\,\frac{25\pi}{4}} = 2^{12}\sqrt{2}\, e^{i\,\frac{\pi}{4}}$ e infine

$$\mathrm{Re}(z^{25}) = 2^{12} , \quad \mathrm{Im}(z^{25}) = 2^{12} .$$

## 10. Prova del 17 Settembre 2019

**Tempo a disposizione: 60 minuti**

**Esercizio 10.1. (Punti: 7)** Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_4 = 0 \ . \end{cases}$$

**Esercizio 10.2. (Punti: 4+4+4)** Sia $P = [2, 1, 0]$ .

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P, \text{asse } z)$.
(b) Determinare il piano $\Pi$ che contiene $P$ e l'asse $x$ .
(c) Determinare l'equazione del piano $\Pi'$ che passa per $P$ ed è parallelo agli assi $x$ e $z$.

**Esercizio 10.3. (Punti: 6)** Disegnare l'iperbole $\gamma$ definita da

$$x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0 \ ,$$

precisando:

(a) Le coordinate del centro $C$ di $\gamma$, dei due vertici di $\gamma$ e dei punti di intersezione di $\gamma$ con gli assi $x$ e $y$.
(b) Le equazioni dei due asintoti.

**Esercizio 10.4. (Punti: 4)** Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

**Esercizio 10.5. (Punti: 3)** Calcolare

$$\mathrm{Re}\left(\frac{2}{(1+2i)^2}\right) \ .$$

**NOTA:** Verrà attribuito un punteggio compreso tra $-3$ e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

## Soluzioni della prova del 17 Settembre 2019:

**Soluzione dell'Es. 10.1:** $\rho(A) = 3$ e quindi vi sono $\infty^{n-\rho(A)} = \infty^1$ soluzioni. L'insieme delle soluzioni può essere descritto, ad esempio, come segue:

$$\left\{ [0,\, -(1/4)x_3,\, x_3,\, 0] \;\in\; \mathbb{R}^4 \;:\; x_3 \;\in\; \mathbb{R} \right\} .$$

**Soluzione dell'Es. 10.2:**
(a) $\mathrm{dist}(P, \text{asse } z) = \sqrt{5}$.
(b) $\Pi \;:\quad z = 0$ .
(c) $\Pi' \;:\quad y - 1 = 0$ .

**Soluzione dell'Es. 10.3:** Usando il metodo di completamento dei quadrati si deduce che l'equazione di $\gamma$ è equivalente a:

$$\frac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 1\,,$$

per cui $\gamma$ è un'iperbole traslata di centro $C = [1,\, 0]$ , con $a = 2$ e $b = 1$. I suoi asintoti hanno equazione rispettivamente

$$r_1 \;:\; y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\,, \qquad r_2 \;:\; y = -\,\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\,,$$

mentre le coordinate dei punti di intersezione di $\gamma$ con l'asse $x$ sono $[3,\, 0]$ e $[-1,\, 0]$ (si noti che questi due punti coincidono con i due vertici dell'iperbole). L'iperbole non interseca l'asse $y$. Con queste informazioni è facile realizzare il disegno.

**Soluzione dell'Es. 10.4:** Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = -\,\lambda \cdot (\lambda - 2)^2\ ,$$

per cui abbiamo due autovalori: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Poi, si calcola: $m_a(\lambda_2) = 2$, $m_g(\lambda_2) = 1$. Ne segue che la matrice non è diagonalizzabile.

**Soluzione dell'Es. 10.5:** $-(6/25)$ .

## 11. Prova del 28 gennaio 2020

**Tempo a disposizione: 60 minuti**

**Esercizio 11.1. (Punti: 6)** Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \quad . \end{cases}$$

**Esercizio 11.2. (Punti: 2+2+2)** Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

(a) Calcolare, se possibile, la matrice inversa $A^{-1}$.
(b) Calcolare $A^2$.
(c) Stabilire se $A$ diagonalizzabile.

**Esercizio 11.3. (Punti: 4+4+4)** Sia $P = [2, 0, 0]$ e si consideri la retta

$$r \ : \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione del piano $\Pi$ che contiene $P$ e $r$ .
(b) Calcolare $\mathrm{dist}(P, r)$ .
(c) Scrivere l'equazione del piano che contiene $P$ ed è parallelo agli assi $y$ e $z$.

**Esercizio 11.4. (Punti: 6)** Disegnare l'ellisse $\gamma$ definita da

$$x^2 + 9\,y^2 - 2\,x - 18\,y + 1 = 0 \ .$$

In particolare, si esplicitino le coordinate del centro, le lunghezze dei semiassi e le coordinate delle eventuali intersezioni con gli assi $x$ e $y$.

**NOTA:** Verrà attribuito un punteggio compreso tra $-3$ e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

## Soluzioni della prova del 28 gennaio 2020:

**Soluzione dell'Es. 11.1:**

$$\left\{ {}^t[\,-2\,x_3 - x_2,\, x_2,\, x_3,\, 0,\, 0\,] \in \mathbb{R}^5 \;:\; x_2,\, x_3 \;\in\; \mathbb{R} \right\} \;.$$

**Soluzione dell'Es. 11.2:** (a)(b)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;, \quad A^2 = I\,.$$

(c) $A$ è simmetrica, quindi è diagonalizzabile.

**Soluzione dell'Es. 11.3:**

(a)

$$\Pi \;:\qquad y = 0\;.$$

(b) Si calcola la proiezione ortogonale $Q$ di $P$ su $r$: si ottiene

$$Q = [1, 0, 1]\;,$$

da cui

$$\mathrm{dist}(P,\, r) = \mathrm{dist}(P,\, Q) = \sqrt{2}\;.$$

(c) $x - 2 = 0$.

**Soluzione dell'Es. 11.4:** Usando il metodo del completamento dei quadrati si verifica facilmente che l'equazione di $\gamma$ è equivalente a

$$\frac{(x-1)^2}{9} + (y-1)^2 = 1\;,$$

per cui $\gamma$ è un'ellisse con semiassi paralleli agli assi $x$ e $y$. Più precisamente, il centro dell'ellisse è il punto di coordinate $[1, 1]$ , il semiasse orizzontale $a$ ha lunghezza 3, mentre il semiasse verticale è $b = 1$; da questi dati è immediato realizzare la rappresentazione grafica di $\gamma$. In particolare, l'ellisse $\gamma$ interseca l'asse $x$ nel punto $[1, 0]$ e l'asse $y$ nei punti di ordinata $1 \pm (\sqrt{288}/18)$.

## 12. Prova del 18 Febbraio 2020

**Tempo a disposizione: 60 minuti**

**Esercizio 12.1. (Punti: 4+4+4)** Sia $P = [1, 0, 2]$ .

(a) Calcolare $\operatorname{dist}(P, \text{asse } z)$.
(b) Determinare il piano $\Pi$ che contiene $P$ e l'asse $y$ .
(c) Determinare l'equazione del piano $\Pi'$ che passa per $P$ ed è parallelo agli assi $y$ e $z$.

**Esercizio 12.2. (Punti: 5)** Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

**Esercizio 12.3. (Punti: 7)** Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_4 = 0 \ . \end{cases}$$

**Esercizio 12.4. (Punti: 9)** Eseguire uno studio completo della conica $\gamma$ definita da

$$4x^2 - y^2 + 2y - 5 = 0 \ .$$

La realizzazione corretta del disegno vale 5 punti

**NOTA:** Verrà attribuito un punteggio compreso tra $-3$ e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

**Soluzioni della prova del 18 Febbraio 2020:**

**Soluzione dell'Es. 12.1:**
(a) $\operatorname{dist}(P, \text{asse } z) = 1$.
(b) $\Pi \ : \quad 2x - z = 0$ .
(c) $\Pi' \ : \quad x - 1 = 0$ .

**Soluzione dell'Es. 12.2:** Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^2 \left[(2-\lambda)^2 + 1\right] \ ,$$

per cui ammette due radici complesse, non reali, $2 \pm i$ . Ne segue che la matrice non è diagonalizzabile.

**Soluzione dell'Es. 12.3:** Il sistema ammette $\infty^2$ soluzioni:

$$\left\{ [2x_4, \, -x_3, \, x_3, \, x_4] \ \in \ \mathbb{R}^4 \ : \ x_3, \, x_4 \ \in \ \mathbb{R} \right\} \ .$$

**Soluzione dell'Es. 12.4:** Usando il metodo di completamento dei quadrati si deduce che l'equazione di $\gamma$ è equivalente a:

$$x^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \ ,$$

per cui $\gamma$ è un'iperbole traslata di centro $C = [0, \, 1]$ , con $a = 1$ e $b = 2$. I suoi asintoti hanno equazione rispettivamente

$$r_1 \ : \ y = 2x + 1 \ , \qquad r_2 \ : \ y = -2x + 1 \ ,$$

mentre le coordinate dei punti di intersezione di $\gamma$ con l'asse $x$ sono $[(\sqrt{5}/2), \, 0]$ e $[-(\sqrt{5}/2), \, 0]$ . Con queste informazioni è facile realizzare il disegno.

Università degli Studi di Cagliari, Dipartimento di Matematica e Informatica, Via Ospedale 72, 09124 Cagliari, Italia
*Email address*: `rattoa@unica.it`