

ESAMI A.A. 2017-18

ANDREA RATTO

SOMMARIO. In questo file presentiamo esercitazioni e prove d'esame relative al Corso Integrato di Matematica, Modulo B, per Scienze dell'Architettura (a.a.2017-18). Si noti che, durante tutte le prove d'esame, è ammessa la consultazione di qualunque materiale cartaceo (libri, appunti, formulari etc.) e l'uso di calcolatrici NON programmabili; viene invece fatto divieto di utilizzare computer portatili ed ogni altro dispositivo che consenta collegamento internet o video-audio con l'esterno (smartphones,tablets etc.).

1. ESERCIZI DI PREPARAZIONE ALLA PRIMA PROVA INTERMEDIA

Tempo a disposizione: 120 minuti

Esercizio 1.1. Si considerino i vettori $\vec{u} = [0, -1, 2]$ e $\vec{v} = [2, 1, 3]$.

- (i) Calcolare l'area A del parallelogramma individuato da \vec{u} e \vec{v} .
- (ii) Calcolare il volume V del parallelepipedo individuato da \vec{u} , \vec{v} e \vec{j} .
- (iii) Scrivere l'equazione del piano π che passa per $P = [0, 2, 3]$ ed è parallelo a \vec{u} e \vec{v} .
- (iv) Scrivere un sistema di equazioni che definisce la retta r passante per l'origine e parallela a \vec{v} .
- (v) Scrivere l'equazione della sfera S avente centro l'origine e passante per il punto P di cui al (iii) sopra.
- (vi) Scrivere l'equazione del piano π^* che contiene $P^* = [2, 0, 4]$ e la retta r di cui al (iv) sopra.

Esercizio 1.2. Sia

$$P(Z) = (z^2 + 2z + 5)^2 \cdot (z^4 + 4)^3.$$

Determinare le radici di $P(z)$ in \mathbb{C} , precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

Esercizio 1.3. Sia $z = 3 - 4i$. Calcolare

$$\operatorname{Re}(1/z^2) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(1/\bar{z}^2).$$

Esercizio 1.4. Siano $\pi : x - z = 0$ e $P = [0, 0, 2]$.

- (i) Determinare la proiezione ortogonale Q di P sul piano π .
- (ii) Calcolare $\operatorname{dist}(P, \pi)$.
- (iii) Scrivere l'equazione della sfera S di centro P e tangente a π ;
- (iv) Determinare il punto P' simmetrico di P rispetto a π .

Esercizio 1.5. Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}.$$

Verificare che r_1 e r_2 sono sghembe e determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2 , precisando le coordinate dei punti di intersezione $Q_i = r \cap r_i$, $i = 1, 2$.

Esercizio 1.6. Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Verificare che r_1 e r_2 sono incidenti e precisare le coordinate del punto di intersezione $Q = r_1 \cap r_2$. Poi, determinare il piano π che contiene r_1 e r_2 .

Esercizio 1.7. Siano $P_0 = [2, 1, 0]$ e r la retta descritta da:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases} .$$

- (i) Calcolare $\text{dist}(P_0, r)$.
- (ii) Scrivere l'equazione del piano Π che contiene P_0 e r .

Esercizio 1.8. Siano $P_0 = [2, 1, 0]$, $P_1 = [-1, 1, 1]$ e $P_2 = [0, 1, 0]$.

- (i) Determinare il piano π asse del segmento $\overline{P_0P_2}$.
- (ii) Determinare il piano Π che contiene P_0 e P_1 e P_2 .

Esercizio 1.9. Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 \\ z = 2 \end{cases} , \quad r_2 : \begin{cases} y = 2 \\ z = 3 \end{cases} .$$

Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2 , e poi ragionare sul risultato trovato.

Esercizio 1.10. Determinare le soluzioni in \mathbb{C} delle seguenti equazioni:

$$(i) z^8 = 256; \quad (ii) z^6 = -64 .$$

Esercizio 1.11. Si consideri il polinomio

$$P(z) = z^5 + 6z^4 + 13z^3 + 14z^2 + 12z + 8 .$$

Dopo aver verificato che $z_0 = -2$ è una radice di $P(z)$, determinare $m_a(z_0)$. Poi, determinare le altre radici in \mathbb{C} di $P(z)$.

Esercizio 1.12. Rappresentare graficamente in \mathbb{R}^2 il seguente sottoinsieme di \mathbb{C} :

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im}(z) \leq [\text{Re}(z)]^2 \text{ e } |z| \leq \sqrt{2} \right\}$$

Soluzioni degli esercizi di preparazione alla prima prova intermedia:

Soluzione dell'Es. 1.1:

- (i) $A = 3\sqrt{5}$.
- (ii) $V = 4$.
- (iii) $\pi : 5x - 4y - 2z + 14 = 0$.
- (iv)

$$r : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases} .$$

- (v) $S : x^2 + y^2 + z^2 = 13$.
- (vi) $\pi^* : 2x - y - z = 0$.

Soluzione dell'Es. 1.2:

$$1 \pm i, -1 \pm i$$

ognuna con molteplicità algebrica 3, e

$$-1 \pm 2i,$$

ognuna con molteplicità algebrica 2.

Soluzione dell'Es. 1.3:

$$\operatorname{Re}(1/z^2) = -\frac{7}{625} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(1/\bar{z}^2) = -\frac{24}{625} .$$

Soluzione dell'Es. 1.4:

- (i) $Q = [1, 0, 1]$.
- (ii) $\operatorname{dist}(P, \pi) = \sqrt{2}$;
- (iii) $S : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2$;
- (iv) $P' = [2, 0, 0]$.

Soluzione dell'Es. 1.5:

$$r : \begin{cases} 3x - 3y + 1 = 0 \\ 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$$

e

$$Q_1 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2 \right], \quad Q_2 = \left[1, \frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right] .$$

Soluzione dell'Es. 1.6:

$$\pi : x + y - 1 = 0, \quad Q = [2, -1, 2] .$$

Soluzione dell'Es. 1.7:

- (i) $\text{dist}(P_0, r) = \sqrt{6}$;
- (ii) $\pi : x + y + z - 3 = 0$.

Soluzione dell'Es. 1.8:

- (i) $\pi : x - 1 = 0$;
- (ii) $\Pi : y - 1 = 0$;

Soluzione dell'Es. 1.9:

$$r : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

Soluzione dell'Es. 1.10:

- (i) $\pm 2, \pm 2i, \sqrt{2} \pm i\sqrt{2}, -\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$.
- (ii) $\pm 2i, \sqrt{3} \pm i, -\sqrt{3} \pm i$.

Soluzione dell'Es. 1.11:

$$P(z) = (z + 2)^3 (z^2 + 1)$$

da cui $m_a(z_0) = 3$ e le altre radici di $P(z)$ sono $\pm i$ con molteplicità algebrica 1.

Soluzione dell'Es. 1.12:

$$A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x^2 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 2\}$$

per cui si può procedere facilmente alla realizzazione del disegno.

2. SIMULAZIONE PRIMA PROVA INTERMEDIA

Tempo a disposizione: 60 minuti, Punteggio Massimo 17

Esercizio 2.1. (Punti: 2+2+2+3+3) Si considerino i vettori $\vec{u} = [1, 1, 2]$ e $\vec{v} = [4, 1, 2]$.

- (i) Calcolare $\sin \vartheta$, dove ϑ è l'angolo formato dai vettori \vec{u} e \vec{v} .
- (ii) Scrivere un sistema di equazioni che definisce la retta r passante per l'origine e parallela a \vec{v} .
- (iii) Determinare l'equazione del piano π che passa per $P = [0, 2, 3]$ ed è parallelo a \vec{u} e \vec{v} .
- (iv) Scrivere l'equazione della sfera S avente centro l'origine e tangente al piano π determinato rispondendo al quesito (iii) sopra.
- (v) Calcolare la distanza tra l'origine e la retta

$$r^* : \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ z = 0 . \end{cases}$$

Esercizio 2.2. (Punti: 4)

Siano $P(z) = z^5 + 10z^4 + 37z^3 + 63z^2 + 54z + 27$ e $z_0 = -3$. Calcolare $m_a(z_0)$ e determinare tutte le radici di $P(z)$ in \mathbb{C} , precisando per ognuna di esse la molteplicità algebrica.

Esercizio 2.3. (Punti: 2+2) Sia $z = \sqrt{2} e^{i(\pi/4)}$. Calcolare

$$\operatorname{Re}(1/z^4) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z^4) .$$

Soluzione dell'Es. 2.1:

(i)

$$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} .$$

(ii)

$$r : \begin{cases} x - 4y = 0 \\ 2y - z = 0 . \end{cases}$$

(iii) $\pi : 2y - z - 1 = 0.$

(iv)

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{5} .$$

(v)

$$\text{Dist}(r^*, O) = \frac{1}{\sqrt{10}} .$$

Soluzione dell'Es. 2.2: $m_a(z_0) = 3$. Le altre due radici, entrambe con molteplicità algebrica 1, sono:

$$-\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Soluzione dell'Es. 2.3:

$$\text{Re}(1/z^4) = -\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \text{Im}(z^4) = 0 .$$

3. SECONDA SIMULAZIONE PRIMA PROVA INTERMEDIA

Tempo a disposizione: 60 minuti, Punteggio Massimo 17

Esercizio 3.1. (Punti: 2+2+3+3) Si considerino i vettori $\vec{u} = [1, 1, 2]$, $\vec{v} = [3, 1, 2]$ e $\vec{w} = [1, 1, 0]$.

- (i) Calcolare il volume V del parallelepipedo individuato dai vettori \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} .
- (ii) Determinare l'equazione del piano π che è parallelo a \vec{u} e \vec{w} e passa per O .
- (iii) Siano $P = [1, 2, 3]$ e π il piano determinato al punto (ii). Determinare la proiezione ortogonale Q di P su π e il punto P' simmetrico di P rispetto a π .
- (iv) Determinare l'equazione del piano π^* che contiene l'origine e la retta

$$r^* : \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ z = 0 . \end{cases}$$

Esercizio 3.2. (Punti: 2+2) Sia $z = 1 - i$. Calcolare

$$\operatorname{Re}(1/z^4) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z^4) .$$

Esercizio 3.3. (Punti: 4) Determinare le soluzioni in \mathbb{C} di:

$$z^6 = -1 .$$

Esercizio 3.4. (Punti: 2) Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} , \quad r_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} .$$

Stabilire se r_1 e r_2 sono parallele, incidenti o sghembe (motivare la risposta).

Soluzione dell'Es. 3.1:

(i) $V = 4.$

(ii) $\pi : x - y = 0.$

(iii)

$$Q = \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3 \right], \quad P' = [2, 1, 3].$$

(iv) $\pi^* : z = 0.$

Soluzione dell'Es. 3.2:

$$\operatorname{Re}(1/z^4) = -\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z^4) = 0.$$

Soluzione dell'Es. 3.3:

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad z_1 = i, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \quad z_4 = -i, \quad z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

Soluzione dell'Es. 3.4: Le due rette sono incidenti in $Q = [0, -1, 2]$.

4. PRIMA PROVA INTERMEDIA (17 APRILE 2018)

Tempo a disposizione: 60 minuti. Punteggio massimo 17.

Esercizio 4.1. (Punti: 3+3+3)

Si considerino il piano $\pi : x - z = 0$, il punto $P = [1, 1, 2]$ e la retta

$$r : \begin{cases} x = -1 \\ y = -t \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (i) Determinare la proiezione ortogonale Q di P su π .
- (ii) Determinare l'equazione del piano π_1 che contiene r e P .
- (iii) Calcolare $\text{dist}(P, r)$.

Esercizio 4.2. (Punti: 3+3)

Siano $P(z) = z^5 - 3z^4 + 7z^3 - 13z^2 + 12z - 4$ e $P'(z) = z^2 + 4$:

- (1) Calcolare quoziente e resto della divisione di polinomi

$$\frac{P(z)}{P'(z)}.$$

- (2) Determinare le radici di $P(z)$ in \mathbb{C} , precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

Esercizio 4.3. (Punti: 3)

Siano r_1 e r_2 le due rette definite rispettivamente da

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}.$$

Stabilire se le due rette sono parallele, incidenti o sghembe, precisando le coordinate dell'eventuale punto di intersezione $Q = r_1 \cap r_2$.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la qualità e la chiarezza dell'esposizione (scrivere molto **NON** equivale a qualità e chiarezza dell'esposizione).

Soluzioni:**Soluzione dell'Es. 4.1:**

(i)

$$Q = \left[\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2} \right] .$$

(iii) $\pi_1 : 3x - 2y - 2z + 3 = 0 .$

(iii) $\text{dist}(P, r) = \sqrt{(17/2)} .$

Soluzione dell'Es. 4.2:

(1) Quoziente e resto sono rispettivamente:

$$Q(z) = (z - 1)^3 ; \quad R(z) \equiv 0 .$$

(2) In base a (1), $P(z) = (z^2 + 4)(z - 1)^3$, per cui abbiamo 3 radici:

$$z_0 = 2i, \quad z_1 = -2i \quad \text{e} \quad z_2 = 1$$

con $m_a(z_0) = 1 = m_a(z_1)$ e $m_a(z_2) = 3$.**Soluzione dell'Es. 4.3:**Le due rette sono incidenti in $Q = [-1, 2, 2]$.

5. SECONDA PROVA PARZIALE (22 MAGGIO 2018)

Esercizio 5.1. (Punti 9)

Svolgere lo studio completo dell'iperbole γ di equazione

$$(5.1) \quad x^2 + 6xy + y^2 - 4 = 0 ,$$

esplicitando, in particolare, le equazioni degli asintoti rispetto alle coordinate x , y e le coordinate dei punti di intersezione di γ con gli assi x , y (porre $\lambda_1 > \lambda_2$).

Esercizio 5.2. (Punti 4)

Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo:

$$(5.2) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5.3. (Punti 4)

Calcolare la lunghezza dei semiassi dell'ellisse γ di equazione

$$(5.3) \quad 9x^2 + 4y^2 + 36x + 40y + 100 = 0$$

e rappresentarla graficamente.

Soluzioni della prova parziale del 22 Maggio 2018:

Soluzione dell'Es. 5.1: Si trovano gli autovalori di A : $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$. Poi, la matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

è tale che:

$${}^t P \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rispetto alle coordinate x' , y' , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},$$

l'equazione dell'iperbole γ diventa:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

con $a = 1$ e $b = \sqrt{2}$. Si può inoltre osservare che, geometricamente, gli assi x' , y' si ottengono da quelli di partenza mediante una rotazione, in senso antiorario, pari ad un angolo $\theta = \pi/4$. In particolare, l'asse x' coincide con la retta $y = x$, mentre l'asse y' è la retta $y = -x$. Gli asintoti di γ hanno equazione:

$$y = \left[\frac{1+b}{1-b} \right] x \quad \text{e} \quad y = \left[\frac{1-b}{1+b} \right] x$$

Inoltre, l'iperbole interseca gli assi di partenza in $[0, \pm 2]$ e $[\pm 2, 0]$.

A questo punto non è difficile concludere realizzando la rappresentazione grafica di γ .

Soluzione dell'Es. 5.2: Abbiamo ∞^1 soluzioni:

$$\{ {}^t [-2x_4, -2x_4, -3x_4, x_4] \in \mathbb{R}^4 : x_4 \in \mathbb{R} \}.$$

Soluzione dell'Es. 5.3: Completando i quadrati si riscrive l'equazione di γ come:

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+5)^2}{9} = 1$$

da cui si ricavano i semiassi $a = 2$, $b = 3$ e si realizza il disegno.

6. ESAME DEL 3 LUGLIO 2018

Tempo a disposizione: 60 minuti.

Esercizio 6.1. (Punti: 8) Svolgere lo studio completo della conica γ di equazione:

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 6 = 0$$

(porre $\lambda_1 < \lambda_2$ e precisare le coordinate degli eventuali punti di intersezione di γ con gli assi x e y).

Esercizio 6.2. (Punti: 5+5) Siano $P = [2, 3, 0]$ e r la retta parallela all'asse y che passa per P :

- (i) Calcolare $\text{dist}(r, O)$;
- (ii) Scrivere l'equazione del piano π che contiene r e l'origine O .

Esercizio 6.3. (Punti: 8) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) .$$

Determinare (se possibile) una matrice invertibile $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 6.4. (Punti: 5) Determinare le soluzioni in \mathbb{C} di

$$z^4 + 4 = 0 .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza espositiva.

Soluzioni dell'esame del 3 luglio 2018:

Soluzione dell'Es. 6.1: La conica è non degenera e si tratta di un'ellisse ($\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$). Rispetto alle coordinate x' , y' , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},$$

dove

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix},$$

l'equazione della conica γ diventa:

$$\frac{x'^2}{6} + y'^2 = 1.$$

Osservando che le colonne di P rappresentano i versori degli assi ruotati si procede al disegno dei nuovi assi (l'asse x' ha equazione $2x + y = 0$, mentre l'asse y' è la retta $x - 2y = 0$) e al disegno qualitativo dell'ellisse. I semiassi hanno lunghezza $a = \sqrt{6}$ e $b = 1$. Inoltre, γ interseca l'asse x nei punti di ascissa $\pm(\sqrt{6/5})$ e l'asse y nei punti di ordinata $\pm\sqrt{3}$.

Soluzione dell'Es. 6.2:

- (i) $\text{dist}(r, O) = 2$;
- (ii) $\pi : z = 0$.

Soluzione dell'Es. 6.3: Si trovano gli autovalori:

$$\lambda_1 = 0 \quad (m_a(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1)) \quad , \quad \lambda_2 = 1 \quad (m_a(\lambda_2) = 2 = m_g(\lambda_2)) .$$

Quindi A è diagonalizzabile e la matrice P richiesta dunque esiste. Si costruisce ora la matrice P e si trova, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 6.4: $1 \pm i$ e $-1 \pm i$.

7. PROVA DEL 19 LUGLIO 2018

Tempo a disposizione: 60 minuti**Esercizio 7.1. (Punti: 5+5)** Siano $P = [1, 0, 0]$ e r la retta

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2z = 0 . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\text{dist}(P, r)$.(b) Determinare (se possibile) l'equazione del piano Π che contiene r e l'asse x .**Esercizio 7.2. (Punti: 3)** Determinare le radici in \mathbb{C} del seguente polinomio, precisando per ognuna di esse il valore della sua molteplicità algebrica:

$$P(z) = (z^2 + z + 2)^2 .$$

Esercizio 7.3. (Punti: 5) Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare:

$$(7.1) \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 . \end{cases}$$

Esercizio 7.4. (Punti: 7) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) .$$

Stabilire se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.**Esercizio 7.5. (Punti: 5)** Disegnare nel piano cartesiano l'ellisse

$$\gamma : \quad 9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y - 23 = 0$$

precisando la lunghezza dei semiassi e le coordinate del centro C .**NOTA:** Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 19 Luglio 2018:

Soluzione dell'Es. 7.1:

- (a) La proiezione ortogonale di P su r è O , per cui $\text{dist}(P, r) = 1$.
- (b) Le 2 rette sono incidenti nell'origine, quindi è possibile determinare il piano richiesto. Si trova $\Pi : y - 2z = 0$.

Soluzione dell'Es. 7.2: Le radici di $P(z)$ sono

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}, \quad z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2},$$

entrambe con molteplicità algebrica 2.

Soluzione dell'Es. 7.3: L'insieme delle soluzioni è:

$$\{ {}^t[1, 0, -1 - x_4, x_4] \in \mathbb{R}^4 : x_4 \in \mathbb{R} \} .$$

Soluzione dell'Es. 7.4: Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = -\lambda(1 - \lambda)^2,$$

quindi ha solo radici reali: $\lambda_1 = 1$, con $m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1)$, e $\lambda_2 = 0$, con $m_a(\lambda_2) = 1 (= m_g(\lambda_2))$, quindi A è diagonalizzabile. Si trova, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione dell'Es. 7.5: Usando il metodo di completamento dei quadrati si riscrive l'equazione di γ come segue:

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1,$$

da cui si deducono $C = [-1, 1]$ e le lunghezze dei due semiassi, cioè $a = 2$ e $b = 3$. Infine, si procede senza difficoltà al disegno di γ .

8. PROVA DELL'11 SETTEMBRE 2018

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 8.1. (Punti: 4) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) .$$

Calcolare (se possibile) A^{-1} .

Esercizio 8.2. (Punti: 4+6) Siano $P = [1, 0, 1]$ e :

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 . \end{cases}$$

- (a) Determinare l'equazione del piano Π che contiene P e r .
 (b) Calcolare $\text{dist}(P, r)$.

Esercizio 8.3. (Punti: 7) Svolgere lo studio completo della conica γ di equazione

$$(8.1) \quad xy - 4 = 0$$

(porre $\lambda_1 > \lambda_2$).

Esercizio 8.4. (Punti: 5) Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 8.5. (Punti: 5) Sia $z = 2 + 2i$. Calcolare

$$\text{Im}(z^7) .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova dell'11 Settembre 2018:

Soluzione dell'Es. 8.1:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (1/2) & (1/2) & 0 \\ -(1/2) & -(1/2) & 1 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 8.2: (a)

$$\Pi : \quad x - z = 0 .$$

(b) La proiezione ortogonale di P su r è

$$Q = \left[\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right]$$

da cui si deduce $\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, Q) = \sqrt{(2/3)}$.

Soluzione dell'Es. 8.3: La conica è non degenere e si tratta di un'iperbole ($\lambda_1 = (1/2)$, $\lambda_2 = -(1/2)$). Rispetto alle coordinate x' , y' , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} , \quad \text{dove}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} ,$$

l'equazione della conica γ diventa

$$\frac{x'^2}{8} - \frac{y'^2}{8} = 1 .$$

A questo punto si disegnano facilmente gli assi x' , y' (rotazione in senso antiorario di un angolo pari a $(\pi/4)$) e l'iperbole γ che ha centro nell'origine e asintoti coincidenti con gli assi di partenza.

Soluzione dell'Es. 8.4: L'insieme delle soluzioni del sistema è:

$$\{ {}^t[-x_3, 0, x_3, 0] \in \mathbb{R}^4 : x_3 \in \mathbb{R} \} .$$

Soluzione dell'Es. 8.5: Si osserva che $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, da cui $z^7 = 2^{10}\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$ e infine

$$\text{Im}(z^7) = -2^{10} = -1024 .$$