ESAMI A.A. 2016-17

ANDREA RATTO

SOMMARIO. In questo file presentiamo le prove d'esame relative al Corso Integrato di Matematica, Modulo B, per Scienze dell'Architettura (a.a.2016-17). Si noti che, durante tutte le prove d'esame, è ammessa la consultazione di qualunque materiale cartaceo (libri, appunti, formulari etc.) e l'uso di calcolatrici NON programmabili; viene invece fatto divieto di utilizzare computer portatili ed ogni altro dispositivo che consenta collegamento internet o video-audio con l'esterno (smartphones,tablets etc.).

1. Simulazione prima prova intermedia

Tempo a disposizione: 60 minuti, Punteggio Massimo 17

Esercizio 1.1. (Punti: 2+2+2+3+3) Si considerino i vettori $\vec{u} = [1,1,2]$ e $\vec{v} = [4,1,2]$.

(i) Calcolare $\sin\vartheta$, dove ϑ è l'angolo formato dai vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(ii) Scrivere un sistema di equazioni che definisce la retta r passante per l'origine e parallela a $\vec{v}$.
(iii) Determinare l'equazione del piano π che passa per $P = [0,2,3]$ ed è parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(iv) Scrivere l'equazione della sfera S avente centro l'origine e tangente al piano π determinato rispondendo al quesito (iii) sopra.
(v) Calcolare la distanza tra l'origine e la retta

$$r^* \ : \quad \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ z = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 1.2. (Punti: 4)
Siano $P(z) = z^5 + 10z^4 + 37z^3 + 63z^2 + 54z + 27$ e $z_0 = -3$. Calcolare $m_a(z_0)$ e determinare tutte le radici di $P(z)$ in $\mathbb{C}$, precisando per ognuna di esse la molteplicità algebrica.

Esercizio 1.3. (Punti: 2+2) Sia $z = \sqrt{2}\, e^{i\,(\pi/4)}$. Calcolare

$$\mathrm{Re}(1/z^4) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z^4) \ .$$

Soluzione dell'Es. 1.1:

(i)
$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \ .$$

(ii)
$$r \ : \quad \begin{cases} x - 4y = 0 \\ 2y - z = 0 \ . \end{cases}$$

(iii) $\pi \ : \quad 2y - z - 1 = 0.$

(iv)
$$S \ : \quad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{5} \ .$$

(v)
$$\mathrm{Dist}(r^*, O) = \frac{1}{\sqrt{10}} \ .$$

Soluzione dell'Es. 1.2: $m_a(z_0) = 3$. Le altre due radici, entrambe con molteplicità algebrica 1, sono:
$$-\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Soluzione dell'Es. 1.3:
$$\mathrm{Re}(1/z^4) = -\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z^4) = 0 \ .$$

2. Seconda simulazione prima prova intermedia

Tempo a disposizione: 60 minuti, Punteggio Massimo 17

Esercizio 2.1. (Punti: 2+2+3+3) Si considerino i vettori $\vec{u} = [1,1,2]$, $\vec{v} = [3,1,2]$ e $\vec{w} = [1,1,0]$.

(i) Calcolare il volume V del parallelepipedo individuato dai vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(ii) Determinare l'equazione del piano π che è parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{w}$ e passa per O.

(iii) Siano $P = [1,2,3]$ e π il piano determinato al punto (ii). Determinare la proiezione ortogonale Q di P su π e il punto P' simmetrico di P rispetto a π.

(iv) Determinare l'equazione del piano π^* che contiene l'origine e la retta

$$r^* \ : \quad \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ z = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 2.2. (Punti: 2+2) Sia $z = 1 - i$. Calcolare

$$\mathrm{Re}(1/z^4) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z^4) \ .$$

Esercizio 2.3. (Punti: 4) Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ di:

$$z^6 = -1 \ .$$

Esercizio 2.4. (Punti: 2) Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1 \ : \ \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad , \qquad r_2 \ : \ \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad .$$

Stabilire se r_1 e r_2 sono parallele, incidenti o sghembe (motivare la risposta).

Soluzione dell'Es. 2.1:

(i) $V = 4$.

(ii) $\pi \ : \quad x - y = 0$.

(iii)

$$Q = \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3\right] \ , \quad P' = [2, 1, 3] \ .$$

(iv) $\pi^* \ : \quad z = 0$.

Soluzione dell'Es. 2.2:

$$\mathrm{Re}(1/z^4) = -\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(z^4) = 0 \ .$$

Soluzione dell'Es. 2.3:

$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $z_1 = i$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $z_4 = -i$, $z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

Soluzione dell'Es. 2.4: Le due rette sono incidenti in $Q = [0, -1, 2]$.

3. Prima prova intermedia (4 Aprile 2017)

Tempo a disposizione: 60 minuti. Punteggio massimo 17.

Esercizio 3.1. (Punti: 3+3+3)

Si considerino il piano $\pi : x + z = 0$, il punto $P = [1, -1, 2]$ e la retta

$$r \ : \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -t \\ z = t \ , \quad t \in \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

(i) Determinare la proiezione ortogonale Q di P su π.
(ii) Determinare l'equazione del piano π_1 che contiene r e P .
(iii) Calcolare $\mathrm{dist}(P, r)$.

Esercizio 3.2. (Punti: 3+3)
Siano $P(z) = z^4 + z^3 + 4z^2 + 2z + 4$ e $P'(z) = z^2 + 2$:

(1) Calcolare quoziente e resto della divisione di polinomi
$$\frac{P(z)}{P'(z)} \ .$$
(2) Determinare le radici di $P(z)$ in $\mathbb{C}$, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

Esercizio 3.3. (Punti: 3)
Siano r_1 e r_2 le due rette definite rispettivamente da

$$r_1 \ : \ \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \ , \ t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad r_2 \ : \ \begin{cases} x = -1 \\ y = z \end{cases} \ .$$

Stabilire se le due rette sono parallele, incidenti o sghembe, precisando le coordinate dell'eventuale punto di intersezione $Q = r_1 \bigcap r_2$.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -1 e $+1$ per valutare la qualità e la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni:

Soluzione dell'Es. 3.1:

(i)

$$Q = \left[-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right] \ .$$

(iii) $\pi_1 \ : \ x - 2y - 2z + 1 = 0$.

(iii) $\mathrm{dist}(P, r) = (3/\sqrt{2})$.

Soluzione dell'Es. 3.2:

(1) Quoziente e resto sono rispettivamente:

$$Q(z) = z^2 + z + 2 \ \ ; \qquad R(z) \equiv 0 \ .$$

(2) Abbiamo 4 radici, ognuna con molteplicità algebrica 1:

$$-\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{7}}{2} \ ; \qquad \pm\sqrt{2}\,i \ .$$

Soluzione dell'Es. 3.3:

Le due rette sono incidenti in $Q = [-1, 2, 2]$.

4. Esercitazione del 18 Maggio 2017

Esercizio 4.1. Sia
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare una **matrice di rotazione** P tale che:

$$^{t}P \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \ , \quad \text{con } \lambda_1 > \lambda_2 \ .$$

Esercizio 4.2. Usando i calcoli dell'Esercizio 4.1, svolgere lo studio completo dell'iperbole γ di equazione
$$x^2+8xy+y^2-5=0 \ , \tag{4.1}$$
esplicitando, in particolare, le equazioni degli asintoti rispetto alle coordinate x, y e le coordinate dei punti di intersezione di γ con gli assi x, y.

Esercizio 4.3. Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo:
$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3+2\,x_4=0 \\ x_3+2\,x_4=0 \\ x_1-x_5=0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Esercizio 4.4. Calcolare la lunghezza dei semiassi dell'ellisse γ di equazione
$$4\,x^2+9\,y^2+40\,x+36\,y+100=0 \tag{4.3}$$
e rappresentarla graficamente.

Soluzioni dell'esercitazione del 18 Maggio 2017:

Soluzione dell'Es. 4.1: La matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

è tale che:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 4.2: Rispetto alle coordinate x', y' , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

l'equazione dell'iperbole γ diventa:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

con $a = 1$ e $b = \sqrt{(5/3)}$. Si può inoltre osservare che, geometricamente, gli assi x', y' si ottengono da quelli di partenza mediante una rotazione, in senso antiorario, pari ad un angolo $\theta = \pi/4$. In particolare, l'asse x' coincide con la retta $y = x$, mentre l'asse y' è la retta $y = -x$. Gli asintoti di γ hanno equazione:

$$y = \left[\frac{1+b}{1-b}\right] x \qquad \text{e} \qquad y = \left[\frac{1-b}{1+b}\right] x$$

Inoltre, l'iperbole interseca gli assi di partenza in $[0, \pm\sqrt{5}]$ e $[\pm\sqrt{5}, 0]$. A questo punto non è difficile concludere realizzando la rappresentazione grafica di γ .

Soluzione dell'Es. 4.3: Abbiamo ∞^1 soluzioni:

$$\left\{ {}^t[\,3\,x_5,\, 3\,x_5,\, 4\,x_5,\, -2\,x_5,\, 3\,x_5\,] \in \mathbb{R}^5 \ : \ x_5 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 4.4: Completando i quadrati si riscrive l'equazione di γ come:

$$\frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

da cui si ricavano i semiassi

$$a = 3 , \quad b = 2$$

e si realizza il disegno.

5. Prova parziale del 23 Maggio 2017

Tempo a disposizione: 60 minuti. Punteggio massimo:17

Esercizio 5.1. (Punti: 8) Svolgere lo studio completo della conica γ di equazione:

$$49\,x^2 + 14\,xy + y^2 - \sqrt{50}\,x + 7\,\sqrt{50}\,y = 0$$

(assumere che la conica sia NON degenere, porre $\lambda_1 > \lambda_2$ e precisare le coordinate dei punti di intersezione di γ con gli assi x e y).

Esercizio 5.2. (Punti: 5) Determinare l'insieme delle soluzioni I del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2\,x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0\ . \end{array} \right. \tag{5.1}$$

Esercizio 5.3. (Punti: 5) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ \in\ M_3(\mathbb{R})\ .$$

Determinare (se possibile) una matrice invertibile $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza espositiva.

Soluzioni della prova parziale del 23 Maggio 2017:

Soluzione dell'Es. 5.1: La conica è non degenere e si tratta di una parabola ($\lambda_1 = 50$, $\lambda_2 = 0$). Rispetto alle coordinate x', y' , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

dove

$$P = \begin{bmatrix} \frac{7}{\sqrt{50}} & -\frac{1}{\sqrt{50}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{50}} & \frac{7}{\sqrt{50}} \end{bmatrix} ,$$

l'equazione della conica γ diventa:

$$50\,x'^{\,2} + 50\,y' = 0 ,$$

ovvero

$$y' = -x'^{\,2} .$$

Osservando che le colonne di P rappresentano i versori degli assi ruotati si procede al disegno dei nuovi assi (l'asse x' ha equazione $y = (1/7)\,x$ ..) e al disegno qualitativo della parabola, che interseca l'asse x nel punto di ascissa $(\sqrt{50}\,/49)$ e l'asse y nel punto di ordinata $-7\sqrt{50}$.

Soluzione dell'Es. 5.2: Il sistema ammette ∞^1 soluzioni:

$$I = \left\{ {}^t[0, -x_4, 0, x_4] \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_4 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 5.3: Si trovano gli autovalori:

$\lambda_1 = 0 \quad (\, m_a(\lambda_1) = 1 = m_g(\lambda_1)\,) \quad , \quad \lambda_2 = 1 \quad (\, m_a(\lambda_2) = 2 = m_g(\lambda_2)\,)$.

Quindi A è diagonalizzabile e la matrice P richiesta dunque esiste. Si costruisce ora la matrice P e si trova, ad esempio,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

6. Prova del 13 Giugno 2017

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 6.1. (Punti: 5+5) Siano $P = [\,1,\,0,\,1\,]$ e r la retta
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2z = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\operatorname{dist}(P,\, r)$.

(b) Determinare (se possibile) l'equazione del piano Π che contiene r e l'asse y .

Esercizio 6.2. (Punti: 5) Determinare le radici in $\mathbb{C}$ del seguente polinomio, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica:
$$P(z) \ = \ (z^2 + z - 1)^2 \cdot (z^2 + z + 2)^3 \ .$$

Esercizio 6.3. (Punti: 5) Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \ . \end{cases} \tag{6.1}$$

Esercizio 6.4. (Punti: 5) Sia
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \ \in \ M_3(\mathbb{R}) \ .$$
Stabilire se A è diagonalizzabile.

Esercizio 6.5. (Punti: 5) Calcolare la lunghezza dei semiassi dell'ellisse
$$\gamma \ : \qquad 9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y - 23 = 0$$
e rappresentare graficamente γ.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 13 Giugno 2017:

Soluzione dell'Es. 6.1:

(a) La proiezione ortogonale di P su r è
$$Q = [(2/9), -(2/9), -(1/9)] ,$$
da cui si ricava $\operatorname{dist}(P, r) = (\sqrt{153}/9)$.

(b) Le 2 rette sono incidenti nell'origine, quindi è possibile determinare il piano richiesto. Si trova $\Pi \ : \quad x + 2z = 0$.

Soluzione dell'Es. 6.2: Le radici di $P(z)$ sono:
$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{7}}{2} , \quad z_2 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{7}}{2} ,$$
entrambe con molteplicità algebrica 3 , e
$$z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} , \quad z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} ,$$
entrambe con molteplicità algebrica 2 .

Soluzione dell'Es. 6.3: L'insieme delle soluzioni è:
$$\left\{ {}^t[\,1,\, 0,\, -1 - x_4,\, x_4\,] \ \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_4 \ \in \mathbb{R} \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 6.4: Il polinomio caratteristico è
$$P(\lambda = -\lambda\,(1-\lambda)^2 ,$$
quindi ha solo radici reali: $\lambda_1 = 1$, con $m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1)$, e $\lambda_2 = 0$, con $m_a(\lambda_2) = 1(= m_g(\lambda_2))$, quindi A è diagonalizzabile.

Soluzione dell'Es. 6.5: Usando il metodo di completamento dei quadrati si riscrive l'equazione di γ come segue:
$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} \ = \ 1 ,$$
da cui si deducono le lunghezze dei due semiassi, cioè $a = 2$ e $b = 3$, e si procede senza difficoltà al disegno di γ.

7. Prova del 4 Luglio 2017

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 7.1. (Punti: 4) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \; .$$

Calcolare (se possibile) A^{-1} .

Esercizio 7.2. (Punti: 4+5) Siano $P = [1, 0, 0]$ e :

$$r \; : \qquad \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \; . \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione del piano Π che contiene P e r .
(b) Calcolare $\mathrm{dist}(P, r)$.

Esercizio 7.3. (Punti: 7) Svolgere lo studio completo della conica γ di equazione

$$xy - 8 = 0 \tag{7.1}$$

(porre $\lambda_1 > \lambda_2$).

Esercizio 7.4. (Punti: 5) Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2\,x_2 + \; x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 7.5. (Punti: 5) Sia $z = 2 - 2i$. Calcolare

$$\mathrm{Re}(z^7) \; .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 4 Luglio 2017:

Soluzione dell'Es. 7.1:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 7.2: (a)

$$\Pi \ : \qquad y + z = 0 \ .$$

(b) Per prima cosa si calcola la proiezione ortogonale Q di P su r:

$$Q = \left[\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \ ,$$

da cui si ricava a $\mathrm{dist}(P, r) = \sqrt{(2/3)}$.

Soluzione dell'Es. 7.3: La conica è non degenere e si tratta di un'iperbole ($\lambda_1 = (1/2)$, $\lambda_2 = -(1/2)$). Rispetto alle coordinate x', y', legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \ ,$$

dove

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \ ,$$

l'equazione della conica γ diventa

$$\frac{x'^2}{4^2} - \frac{y'^2}{4^2} = 1 \ .$$

A questo punto si disegnano facilmente gli assi x', y' (rotazione in senso antiorario di un angolo pari a $(\pi/4)$) e l'iperbole γ che ha centro nell'origine e asintoti coincidenti con gli assi di partenza.

Soluzione dell'Es. 7.4: L'insieme delle soluzioni del sistema è:

$$\left\{ {}^t[-x_3, 0, x_3, 0] \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_3 \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 7.5: I passaggi che lo Studente deve eseguire sono nell'ordine: $z = 2\sqrt{2}\, e^{-i\,\frac{\pi}{4}}$, da cui $z^7 = 2^{10}\sqrt{2}\, e^{-i\,\frac{7\pi}{4}}$ e infine

$$\mathrm{Re}(z^7) = 2^{10} = 1024 \ .$$

8. Prova del 25 Luglio 2017

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 8.1. (Punti: 7) Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 8.2. (Punti: 4+4+4) Sia $P = [2, 0, 1]$.

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P, \text{asse } y)$.
(b) Determinare il piano Π che contiene P e l'asse x .
(c) Determinare l'equazione del piano Π' che passa per P ed è parallelo agli assi y e z.

Esercizio 8.3. (Punti: 7) Disegnare l'iperbole γ definita da

$$8x^2 - 2y^2 + 4y - 10 = 0 \ ,$$

precisando:

(a) Le coordinate del centro C di γ e dei punti di intersezione tra γ e l'asse x.
(b) Le equazioni dei due asintoti.

Esercizio 8.4. (Punti: 6) Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 25 Luglio 2017:

Soluzione dell'Es. 8.1: Si calcola $\rho(A) = 2$. Poi si deduce che il sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \ . \end{cases}$$

Quindi si conclude che le ∞^2 soluzioni sono descritte da:

$$\left\{ [-2x_4, \, -(1/4)x_3, \, x_3, \, x_4] \ \in \ \mathbb{R}^4 \ : \ x_3, \, x_4 \ \in \ \mathbb{R} \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 8.2:
(a) $\mathrm{dist}(P, \text{asse } x) = \sqrt{5}$.
(b) $\Pi \ : \quad y = 0$.
(c) $\Pi' \ : \quad x - 2 = 0$.

Soluzione dell'Es. 8.3: Usando il metodo di completamento dei quadrati si deduce che l'equazione di γ è equivalente a:

$$x^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \ ,$$

per cui γ è un'iperbole traslata di centro $C = [0, \, 1]$, con $a = 1$ e $b = 2$. I suoi asintoti hanno equazione rispettivamente

$$r_1 \ : \ y = 2x + 1 \ , \qquad r_2 \ : \ y = -2x + 1 \ ,$$

mentre le coordinate dei punti di intersezione di γ con l'asse x sono $[(\sqrt{5}/2), \, 0]$ e $[-(\sqrt{5}/2), \, 0]$. Con queste informazioni è facile realizzare il disegno.

Soluzione dell'Es. 8.4: Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda - 2)^2 \ ,$$

per cui abbiamo due autovalori: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$. Poi, si calcola: $m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1)$, ma $m_a(\lambda_2) = 2$, $m_g(\lambda_2) = 1$. Ne segue che la matrice non è diagonalizzabile.

9. Prova del 19 Settembre 2017

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 9.1. (Punti: 7) Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 9.2. (Punti: 5) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) .$$

Calcolare, se possibile, la matrice inversa A^{-1} .

Esercizio 9.3. (Punti: 5+6) Sia $P = [2, 0, 0]$ e si consideri la retta

$$r \ : \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 . \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione del piano Π che contiene P e r .
(b) Calcolare $\mathrm{dist}(P, r)$.

Esercizio 9.4. (Punti: 7) Disegnare l'ellisse γ definita da

$$9\,x^2 + y^2 - 18\,x + 2\,y + 1 = 0 .$$

In particolare, si esplicitino le coordinate del centro, le lunghezze dei semiassi e le coordinate delle eventuali intersezioni con gli assi x e y.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 19 Settembre 2017:

Soluzione dell'Es. 9.1: Il sistema è omogeneo e quindi risolubile. Si ha $\rho(A) = 3$ e il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2\,x_3 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \\ -x_4 + x_5 = 0 \ . \end{cases}$$

Da ciò è facile esplicitare l'insieme delle ∞^2 soluzioni del sistema:

$$\left\{ {}^t[\,2\,x_3 - x_2,\, x_2,\, x_3,\, 0,\, 0\,] \in \mathbb{R}^5 \ : \ x_2,\, x_3 \ \in \ \mathbb{R} \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 9.2:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

Soluzione dell'Es. 9.3:

(a)

$$\Pi \ : \qquad y = 0 \ .$$

(b) Si calcola la proiezione ortogonale Q di P su r: si ottiene

$$Q = [1, 0, -1] \ ,$$

da cui

$$\mathrm{dist}(P,\, r) = \mathrm{dist}(P,\, Q) = \sqrt{2} \ .$$

Soluzione dell'Es. 9.4: Usando il metodo del completamento dei quadrati si verifica facilmente che l'equazione di γ è equivalente a

$$(x-1)^2 + \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \ ,$$

per cui γ è un'ellisse con semiassi paralleli agli assi x e y. Più precisamente, il centro dell'ellisse è il punto di coordinate $[1,\, -1]$, il semiasse orizzontale a ha lunghezza 1, mentre il semiasse verticale è $b = 3$; da questi dati è immediato realizzare la rappresentazione grafica di γ. In particolare, l'ellisse γ interseca l'asse x nei due punti di ascissa rispettivamente $1 + (\sqrt{8}/3)$ e $1 - (\sqrt{8}/3)$, mentre interseca l'asse y nel punto di ordinata -1.

10. Prova del 22 Febbraio 2018

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 10.1. (Punti: 5) Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

Esercizio 10.2. (Punti: 4+4+4) Sia $P = [-1, 0, 3]$.

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P, \mathrm{asse}\ z)$.
(b) Determinare il piano Π che contiene P e l'asse y .
(c) Determinare l'equazione del piano Π' che passa per P ed è parallelo agli assi y e z.

Esercizio 10.3. (Punti: 7) Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 10.4. (Punti: 9) Rappresentare mediante disegno nel piano cartesiano l'iperbole γ definita da

$$4x^2 - y^2 + 2y - 5 = 0 \ ,$$

precisando:

(a) Le equazioni dei due asintoti.
(b) Le coordinate del centro C di γ e dei punti di intersezione tra γ e l'asse x .

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 22 Febbraio 2018:

Soluzione dell'Es. 10.1: Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^2\,[(3-\lambda)^2 + 1]\ ,$$

per cui ammette due radici complesse, non reali, $3 \pm i$. Ne segue che la matrice non è diagonalizzabile.

Soluzione dell'Es. 10.2:

(a) $\mathrm{dist}(P, \text{asse } z) = 1$.
(b) $\Pi \ : \quad 3x + z = 0$.
(c) $\Pi' \ : \quad x + 1 = 0$.

Soluzione dell'Es. 10.3: Il sistema ammette ∞^2 soluzioni:

$$\left\{ [-2x_4,\, -x_3,\, x_3,\, x_4] \ \in\ \mathbb{R}^4 \ :\ x_3,\, x_4 \ \in\ \mathbb{R} \right\}\ .$$

Soluzione dell'Es. 10.4: Usando il metodo di completamento dei quadrati si deduce che l'equazione di γ è equivalente a:

$$x^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = 1\ ,$$

per cui γ è un'iperbole traslata di centro $C = [0,\, 1]$, con $a = 1$ e $b = 2$. I suoi asintoti hanno equazione rispettivamente

$$r_1 \ :\ y = 2x + 1\ , \qquad r_2 \ :\ y = -2x + 1\ ,$$

mentre le coordinate dei punti di intersezione di γ con l'asse x sono $[(\sqrt{5}/2),\, 0]$ e $[-(\sqrt{5}/2),\, 0]$. Con queste informazioni è facile realizzare il disegno.

Università degli Studi di Cagliari, Dipartimento di Matematica e Informatica, Viale Merello 92, 09123 Cagliari, Italia
E-mail address: rattoa@unica.it