ESAMI E ESERCITAZIONI A.A. 2015-16

ANDREA RATTO

Sommario. In questo file presentiamo prove d'esame, esercitazioni ed esami relativi al Corso Integrato di Matematica, Modulo B, per Scienze dell'Architettura (a.a.2015-16). Si noti che, durante tutte le prove d'esame, è ammessa la consultazione di qualunque materiale cartaceo (libri, appunti, formulari etc.) e l'uso di calcolatrici NON programmabili; viene invece fatto divieto di utilizzare computer portatili ed ogni altro dispositivo che consenta collegamento internet o video-audio con l'esterno (telefoni cellulari etc.).

1. Esercitazione (14 Aprile 2016, tempo:90 minuti) per la prima prova parziale

Esercizio 1.1. Si considerino i vettori $\vec{u} = [0, 1, 2]$, $\vec{v} = [1, -1, 3]$ e il punto $P_0 = [0, 2, 3]$.

- (i) Calcolare $\sin\vartheta$, dove ϑ è l'angolo formato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- (ii) Calcolare il volume V del parallelepipedo individuato da $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{j}$.
- (iii) Scrivere l'equazione del piano π che passa per P_0 ed è parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- (iv) Scrivere un sistema di equazioni che definisce la retta r passante per l'origine e parallela a $\vec{v}$.
- (v) Scrivere l'equazione della sfera S avente centro l'origine e passante per il punto P_0 .
- (vi) Scrivere l'equazione del piano π^* che contiene $P^* = [2, 1, 4]$ e la retta r di cui al (iv) sopra.
- (vii) Scrivere una rappresentazione parametrica della retta r' che passa per P_0 ed è parallela a $\vec{u}$.
- (viii) Calcolare $\mathrm{dist}(r', O)$, dove r' è la retta determinata al punto (vii).

Esercizio 1.2. Siano $P(z) = z^5 + z^4 + z^3 + 27\,z^2 + 27\,z + 27$ e $P'(z) = z^2 + z + 1$:

- (1) Calcolare quoziente $Q(z)$ e resto $R(z)$ della divisione di polinomi
$$\frac{P(z)}{P'(z)}\ .$$
- (2) Determinare le radici di $P(z)$ in $\mathbb{C}$, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

Esercizio 1.3. Sia $z = 3 + 4i$: calcolare
$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{(i\,z)^2}\right)\ ; \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{(i\,z)^2}\right)\ .$$

Esercizio 1.4. Siano r_1 e r_2 le 2 rette incidenti definite rispettivamente da:
$$r_1\ :\ \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases} ,t\ \in\ \mathbb{R}\ \ \text{e} \qquad r_2\ :\ \begin{cases} x = -1 \\ y = z \end{cases}\ .$$

- (i) Calcolare le coordinate di $Q = r_1 \bigcap r_2$.
- (ii) Determinare l'equazione del piano Π che contiene r_1 e r_2, e darne una rappresentazione parametrica.

Soluzioni:

Soluzione dell'Es. 1.1:

(i)

$$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}} \ .$$

(ii) $V = 2$.

(iii) $\pi \ : \quad 5x + 2y - z - 1 = 0$.

(iv)

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - z = 0 \ . \end{cases}$$

(v) $S \ : \quad x^2 + y^2 + z^2 = 13$.

(vi) $\pi^* \ : \quad 7x - 2y - 3z = 0$.

(vii)

$$r' \ : \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 2t \ , \quad t \in \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

(viii)

$$\mathrm{dist}(r', O) = \frac{1}{\sqrt{5}} \ .$$

Soluzione dell'Es. 1.2:

(1) Quoziente e resto sono rispettivamente:

$$Q(z) = z^3 + 27 \quad ; \qquad R(z) \equiv 0 \ .$$

(2) Dato che $P(z) = (z^3 + 27)\,(z^2 + z + 1)$, è facile determinare le sue 5 radici, ognuna delle quali risulta avere molteplicità algebrica 1:

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \ ; \qquad -3 \ ; \qquad \frac{3 \pm i\,3\sqrt{3}}{2} \ .$$

Soluzione dell'Es. 1.3:

$$\mathrm{Re}(1/(i\,z^2)) = \frac{7}{625} \ ; \qquad \mathrm{Re}(1/(i\,z^2)) = \frac{24}{625} \ .$$

Soluzione dell'Es. 1.4: (i) $Q = [-1, 2, 2]$. (ii) $\Pi \ : \ x - y + z + 1 = 0$. Una rappresentazione parametrica di Π è:

$$\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -1 - t + s \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R} \ .$$

2. Prova intermedia del 21 Aprile 2016

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 2.1. (Punti: 4)
Siano $P(z) = z^4 + 3z^2 + 2$, $P'(z) = z^2 + 2$. Calcolare
$$\frac{P(z)}{P'(z)}$$
e poi determinare le 4 radici complesse di $P(z)$.

Esercizio 2.2. (Punti: 3+4)
Siano $P = [1, 0, 1]$ e r la retta definita da:
$$r \ : \ \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y - z = 0 \ . \end{cases}$$
Rispondere **ad uno a scelta** tra i quesiti (i) e (ii):

(i) Determinare un versore $\vec{v_r}$ parallelo a r.
(ii) Determinare la proiezione ortogonale Q di P sul piano $y-2 = 0$.

Rispondere **ad uno a scelta** tra i quesiti (iii) e (iv):

(iii) Determinare l'equazione del piano Π che contiene P e r, e dare una rappresentazione parametrica di Π.
(iv) Calcolare dist$(r,\ P)$.

Svolgere, **a scelta**, **uno** dei due seguenti esercizi:

Esercizio 2.3. (Punti: 5) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2, dove:
$$r_1 \ : \ \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 \ : \ \begin{cases} x + 2 = 0 \\ z = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 2.4. (Punti: 5) Determinare le radici in $\mathbb{C}$ del seguente polinomio:
$$P(z) = z^6 - 5^6 \ .$$

NOTA1: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).
NOTA2: Voto massimo: **17**. Voto minimo per essere ammessi al secondo parziale: **8**.

Soluzioni della prova parziale del 21 Aprile 2016:

Soluzione dell'Es. 2.1:

$$\frac{P(z)}{P'(z)} = z^2 + 1 \ .$$

Le radici di $P(z)$ sono:

$$\pm\, i\,, \qquad \pm\, i\sqrt{2}\ ,$$

ognuna con molteplicità algebrica 1 .

Soluzione dell'Es. 2.2:

(i)

$$\vec{v_r} = \left[0,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \ .$$

(ii)

$$Q = [1, 2, 1] \ .$$

(iii)

$$\Pi \ :\quad x + 2y - 2z + 1 = 0 \ .$$

Una rappresentazione parametrica di Π è:

$$\begin{cases} x = 2s - 2t - 1 \\ y = t \\ z = s \qquad s,\, t \ \in \ \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

(iv)

$$\mathrm{dist}(r,\, P) = \frac{3}{\sqrt{2}} \ .$$

Soluzione dell'Es. 2.3:
r coincide con l'asse x .

Soluzione dell'Es. 2.4:

$$\pm 5 \ , \quad \frac{5}{2} \pm \frac{5\sqrt{3}}{2} \ , \quad -\frac{5}{2} \pm \frac{5\sqrt{3}}{2} \ ,$$

ognuna con molteplicità algebrica 1 .

3. Esercitazione del 19 maggio 2016

Esercizio 3.1. Sia
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare una **matrice di rotazione** P tale che:

$$^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \ , \quad \text{con } \lambda_1 > \lambda_2 \ .$$

Esercizio 3.2. Usando i calcoli dell'Esercizio 3.1, svolgere lo studio completo della conica γ di equazione:

$$4xy - 2 = 0 \ . \tag{3.1}$$

Esercizio 3.3. Determinare l'insieme delle soluzioni I del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2\,x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Esercizio 3.4. Sia
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

(i) Stabilire se A è diagonalizzabile.
(ii) Determinare (se possibile) $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia diagonale.

Soluzioni dell'esercitazione del 19 maggio 2016:

Soluzione dell'Es. 3.1: La matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ & \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

è tale che:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 3.2: Preliminarmente, si verifica che $\det(A') \neq 0$ (conica non degenere) e $\det(A) < 0$ (iperbole). Rispetto alle coordinate x', y' , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

l'equazione dell'iperbole γ diventa:

$$x'^{\,2} - y'^{\,2} = 1 .$$

Si può inoltre osservare che, geometricamente, gli assi x', y' si ottengono da quelli di partenza mediante una rotazione, in senso antiorario, pari ad un angolo $\theta = (\pi/4)$.
Ora è facile concludere passando alla rappresentazione grafica, in cui si riconosce che gli asintoti di γ coincidono con gli assi del sistema di partenza.

Soluzione dell'Es. 3.3: $\rho(A) = 2$, per cui abbiamo $n - \rho(A) = 2$ incognite libere. L'insieme delle soluzioni è:

$$I = \left\{ {}^t[\,-(3/2)\,x_4,\; x_3 + (1/2)\,x_4, x_3, x_4\,] \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_3,\, x_4 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 3.4:

(i) $P(\lambda) = \lambda^2\,(1 - \lambda)$: tutte le radici di $P(\lambda)$ sono reali. Inoltre abbiamo: $\lambda_1 = 0$, con $m_a(\lambda_1) = m_g(\lambda_1) = 2$, e $\lambda_2 = 1$, con $m_a(\lambda_2) = m_g(\lambda_2) = 1$. Quindi ne deduciamo che A è diagonalizzabile.

(ii) Si trova, ad esempio:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

4. Prova parziale del 26 Maggio 2016

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 4.1. (Punti: 7) Svolgere lo studio completo della conica γ di equazione:

$$3\,x^2 + 3\,y^2 - 4\,xy - 5 = 0$$

(porre $\lambda_1 > \lambda_2$).

Esercizio 4.2. (Punti: 5) Determinare l'insieme delle soluzioni I del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 - 3\,x_4 = 0 \\ x_1 - 2\,x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3\,x_4 = 0 \end{array} \right. \tag{4.1}$$

Esercizio 4.3. (Punti: 4) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \; .$$

Determinare (se possibile) una matrice invertibile $P \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ è una matrice diagonale.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza espositiva.

Soluzioni della prova parziale del 26 Maggio 2016:

Soluzione dell'Es. 4.1: La conica è non degenere e si tratta di un'ellisse ($\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$). Rispetto alle coordinate x', y', legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

dove

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} ,$$

l'equazione della conica γ diventa:

$$x'^{\,2} + \frac{y'^{\,2}}{5} = 1$$

Osservando che le colonne di P rappresentano i versori degli assi ruotati (rotazione pari ad un angolo di $(\pi/4)$ in senso orario), si procede al disegno qualitativo dell'ellisse (semiasse $a = 1$ lungo l'asse x', e semiasse $b = \sqrt{5}$ lungo l'asse y').

Soluzione dell'Es. 4.2: Il sistema ammette ∞^1 soluzioni:

$$I = \left\{ {}^t[2\,x_2,\, x_2,\, 0,\, x_2\,] \ \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_2 \ \in \ \mathbb{R} \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 4.3: A non è diagonalizzzabile, in quanto si trovano gli autovalori:

$$\lambda_1 = 0 \ , \quad \lambda_2 = 1 \ ,$$

ma $m_a(\lambda_1) = 2$, mentre $m_g(\lambda_1) = 1$. Quindi non è possibile determinare P.

5. Prova del 10 Giugno 2016

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 5.1. (Punti: 6+6) Siano $P = [\,1,\,0,\,1\,]$ e r la retta
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - 2y = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P,\,r)$.

(b) Determinare (se possibile) l'equazione del piano Π che contiene r e l'asse x .

Esercizio 5.2. (Punti: 6) Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \ . \end{cases} \tag{5.1}$$

Esercizio 5.3. (Punti: 6) Sia
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ \in \ M_3(\mathbb{R}) \ .$$
Stabilire se A è diagonalizzabile.

Esercizio 5.4. (Punti: 6) Sia fissato in $\mathbb{R}^2$ un sistema di assi cartesiani ortogonali x, y. Scrivere l'equazione dell'ellisse γ che ha centro in $C = [1,\,-1]$ e semiassi paralleli agli assi x, y, di lunghezza rispettivamente $a = 1$ e $b = 2$.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 10 Giugno 2016:

Soluzione dell'Es. 5.1:

(a)
$$\operatorname{dist}(P,\, r) = \sqrt{2}\ .$$

(b) Le 2 rette sono incidenti nell'origine, quindi è possibile determinare il piano richiesto. Si trova $\Pi \ : \quad 2y + z = 0$.

Soluzione dell'Es. 5.2:

$\rho(A) = 2$, mentre $\rho(A') = 3$. Quindi il sistema non ammette soluzione.

Soluzione dell'Es. 5.3:

A presenta l'autovalore $\lambda_1 = 0$, con $m_a(\lambda_1) = 2$ e $m_g(\lambda_1) = 1$. Quindi A non è diagonalizzabile.

Soluzione dell'Es. 5.4:

L'equazione di γ è:
$$(x-1)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} = 1\ .$$

6. Prova del 28 Giugno 2016

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 6.1. (Punti: 6) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

Calcolare (se possibile) A^{-1} .

Esercizio 6.2. (Punti: 4+6) Siano $P = [1, 0, 2]$ e :

$$r \ : \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione del piano Π che contiene P e r .
(b) Calcolare $\mathrm{dist}(P, r)$.

Esercizio 6.3. (Punti: 7) Disegnare l'iperbole γ di equazione

$$4\,x^2 - y^2 - 8\,x = 0 \ , \tag{6.1}$$

precisando l'equazione dei due asintoti.

Esercizio 6.4. (Punti: 7) Determinare le soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2\,x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza e la qualità dell'elaborato (scrivere molto **non** equivale a chiarezza e qualità).

Soluzioni della prova del 28 Giugno 2016:

Soluzione dell'Es. 6.1:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 6.2: (a)

$$\Pi \ : \qquad 2x - 3y - z = 0 \ .$$

(b) Un calcolo mostra che la proiezione ortogonale di P su r è $Q = [-(1/3),\, -(1/3),\, (1/3)]$, da cui si arriva a $\mathrm{dist}(P,\, r) = \sqrt{14/3}$.

Soluzione dell'Es. 6.3: Mediante il metodo di completamento dei quadrati si trova che l'equazione dell'iperbole γ equivale a

$$(x-1)^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \ .$$

Quindi abbiamo un'iperbole con centro $C = [1,\, 0]$ e asintoti di equazione $y = 2(x-1)$ e $y = -2(x-1)$ rispettivamente. Sulla base di questi dati è facile realizzare il disegno richiesto.

Soluzione dell'Es. 6.4: $\rho(A) = 2$, per cui il sistema ammette ∞^2 soluzioni. Si trova che esse sono descritte da:

$$\left\{ {}^t[-\,x_2 + 3\,x_4,\; x_2,\; -\,2\,x_4,\; x_4] \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_2,\, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \ .$$

7. Prova del 13 Luglio 2016

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 7.1. (Punti: 5+5) Si consideri il seguente sistema lineare i cui coefficienti dipendono dal parametro $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 = 1 - t \\ x_1 + t x_4 = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il sistema è risolubile;
(b) Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema nel caso in cui $t = 1$.

Esercizio 7.2. (Punti: 5) Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \ \in \ M_4(\mathbb{R}) \ .$$

Esercizio 7.3. (Punti: 4+4+4) Sia $P = [2, 0, 3]$.
(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P, \text{asse } x)$.
(b) Determinare il piano Π che contiene P e l'asse y .
(c) Determinare l'equazione del piano Π' che passa per P ed è parallelo agli assi y e z.

Esercizio 7.4. (Punti: 5) Disegnare l'ellisse γ definita da

$$4x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \ .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 13 Luglio 2016:

Soluzione dell'Es. 7.1: (a) $\rho(A) = 3 \ \ \forall t \in \mathbb{R}$, per cui il sistema è risolubile (con un'incognita libera) per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Se $t = 1$, le ∞^1 soluzioni del sistema sono:

$$\left\{ [-x_4,\, 0,\, 0,\, x_4] \ \in \ \mathbb{R}^4 \ : \ x_4 \ \in \ \mathbb{R} \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 7.2: Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^2 \left[(1+\lambda)^2 + 1\right] \ ,$$

per cui ammette due radici complesse, non reali, $-1 \pm i$. Ne segue che la matrice non è diagonalizzabile.

Soluzione dell'Es. 7.3:

(a) $\mathrm{dist}(P, \text{asse } x) = 3$.
(b) $\Pi \ : \quad 3x - 2z = 0$.
(c) $\Pi' \ : \quad x - 2 = 0$.

Soluzione dell'Es. 7.4: Usando il metodo di completamento dei quadrati si riscrive l'equazione di γ:

$$x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \ ,$$

per cui γ è un'ellisse traslata di centro $C = [0,\, 1]$, con $a = 1$ e $b = 2$. Con queste informazioni è facile realizzare il disegno rchiesto.

8. Prova del 14 Settembre 2016

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 8.1. (Punti: 7)
Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo definito da:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 8.2. (Punti: 3+3+3+3)
Si considerino i vettori $\vec{u} = [1, 0, 2]$, $\vec{v} = [2, 1, 0]$ e il punto $P = [1, 3, 1]$.

(a) Determinare l'equazione del piano Π che contiene P ed è parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(b) Calcolare la distanza tra l'origine O e il piano Π .
(c) Scrivere il fascio di piani generato dalla retta r che passa per P ed è parallela a $\vec{u}$.
(d) Calcolare $\sin\theta$, dove θ indica l'angolo formato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Esercizio 8.3. (Punti: 7)
Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare, se possibile, una matrice invertibile P tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 8.4. (Punti: 3+3)

(a) Sia $z = 1 - 2i \ \in \ \mathbb{C}$: calcolare

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right) \ .$$

(b) Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ di

$$z^2 + 2z + 5 = 0 \ .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -2 e $+2$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 14 Settembre 2016:

Soluzione dell'Es. 8.1: (a) La matrice dei coefficienti ha rango 2, per cui il sistema ha due equazioni significative e $= n - \rho(A) = 4 - 2 = 2$ incognite libere. In particolare, conviene osservare che il sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \ . \end{cases} \tag{8.1}$$

Da (8.1) si ricava facilmente l'insieme delle soluzioni:

$$\left\{ {}^t[-x_3 - 2\,x_4, 0, x_3, x_4] \ \in \ \mathbb{R}^4 \ : \ x_3, x_4 \ \in \ \mathbb{R} \right\} \ . \tag{8.2}$$

Soluzione dell'Es. 8.2:

(a) $\Pi \ : \qquad 2x - 4y - z + 11 = 0.$

(b) $\mathrm{dist}(O, \Pi) = (11/\sqrt{21}).$

(c) $\lambda\,(2x - z - 1) + \mu\,(y - 3) = 0$, dove λ e μ sono parametri reali, non entrambi nulli.

(d) $\sin\theta = (\sqrt{21}/5)$.

Soluzione dell'Es. 8.3:
La matrice A possiede 3 autovalori reali e distinti, ovvero

$$\lambda_1 = 0 \ , \ \lambda_2 = \sqrt{5} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = -\sqrt{5} \ ,$$

quindi è diagonalizzabile e si può determinare:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} & -\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

Soluzione dell'Es. 8.4:

(a) Si calcola per prima cosa $z^2 = -3 - 4i$, poi:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{3}{25} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{4}{25} \ .$$

(b)

$$z_1 = -1 + 2i \qquad \text{e} \qquad z_2 = -1 - 2i \ .$$