ESAMI A.A. 2014-15

ANDREA RATTO

Sommario. In questo file presentiamo le prove d'esame relative al Corso Integrato di Matematica, Modulo B, per Scienze dell'Architettura (a.a.2014-15). Si noti che, durante tutte le prove d'esame, è ammessa la consultazione di qualunque materiale cartaceo (libri, appunti, formulari etc.) e l'uso di calcolatrici NON programmabili; viene invece fatto divieto di utilizzare computer portatili ed ogni altro dispositivo che consenta collegamento internet o video-audio con l'esterno (telefoni cellulari etc.).

1. Prima prova intermedia (23 Aprile 2015)

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 1.1. (Punti: 4+4+4+7)

Si considerino il piano $\pi : x + z = 0$, il punto $P = [1, -1, 2]$ e le due rette, date in forma parametrica,

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} x + 1 = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 \ : \quad \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y = s \\ z = s \end{cases} \quad .$$

(i) Calcolare $\mathrm{dist}(P, r_1)$.
(ii) Determinare l'equazione del piano π_1 che contiene r_1 e P .
(iii) Determinare il punto P' simmetrico di P rispetto a π .
(iv) Determinare la comune perpendicolare r a r_1 e r_2 .

Esercizio 1.2. (Punti: 4+4)
Siano $P(z) = z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1$ e $P'(z) = z^2 + 1$:

(1) Calcolare quoziente e resto della divisione di polinomi
$$\frac{P(z)}{P'(z)} \ .$$
(2) Determinare le radici di $P(z)$ in $\mathbb{C}$, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

Esercizio 1.3. (Punti: 4+4)
Siano r_1 e r_2 le 2 rette incidenti definite rispettivamente da:

$$r_1 \ : \ \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad , \ t \in \mathbb{R} \ \text{ e } \qquad r_2 \ : \ \begin{cases} x = -1 \\ y = z \end{cases} \quad .$$

(i) Calcolare le coordinate di $Q = r_1 \bigcap r_2$.
(ii) Determinare l'equazione del piano Π che contiene r_1 e r_2.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la qualità e la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni:

Soluzione dell'Es. 1.1:

(i) $\text{dist}(P, r_1) = (3/\sqrt{2})$.
(ii) $\pi_1 \; : \; x - 2y - 2z + 1 = 0$.
(iii) $P' = [-2, \, -1, \, -1]$.
(iv)

$$r \; : \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad .$$

Soluzione dell'Es. 1.2:

(1) Quoziente e resto sono rispettivamente:

$$Q(z) = z^2 + z + 1 \quad ; \qquad R(z) \equiv 0 \ .$$

(2) Abbiamo 4 radici, ognuna con molteplicità algebrica 1:

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \; ; \qquad \pm i \ .$$

Soluzione dell'Es. 1.3:

(i) $Q = [-1, 2, 2]$.

(ii) $\Pi \; : \;\; x + y - z + 1 = 0$.

2. Prova parziale del 28 Maggio 2015

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 2.1. (Punti: 13) Svolgere lo studio completo della conica γ di equazione:

$$x^2 + 14\,xy + 49\,y^2 + 7\sqrt{50}\,x - \sqrt{50}\,y \;=\; 0$$

(assumere che la conica sia NON degenere, porre $\lambda_1 > \lambda_2$ e precisare le coordinate dei punti di intersezione di γ con gli assi x e y).

Esercizio 2.2. (Punti: 11) Determinare l'insieme delle soluzioni I del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2\,x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0\ . \end{cases} \tag{2.1}$$

Esercizio 2.3. (Punti: 11) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;\in\; M_3(\mathbb{R})\ .$$

Determinare (se possibile) una matrice invertibile $P \in\; M_3(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva.

Soluzioni della prova parziale del 28 Maggio 2015:

Soluzione dell'Es. 2.1: La conica è non degenere e si tratta di una parabola ($\lambda_1 = 50$, $\lambda_2 = 0$). Rispetto alle coordinate x', y', legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

dove

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{50}} & -\frac{7}{\sqrt{50}} \\ \\ \frac{7}{\sqrt{50}} & \frac{1}{\sqrt{50}} \end{bmatrix} ,$$

l'equazione della conica γ diventa:

$$50\, x'^{\,2} - 50\, y' = 0 ,$$

ovvero

$$y' = x'^{\,2} .$$

Osservando che le colonne di P rappresentano i versori degli assi ruotati si procede al disegno dei nuovi assi (l'asse x' ha equazione $y = 7\,x$ ..) e al disegno qualitativo della parabola, che interseca l'asse x nel punto di ascissa $-7\sqrt{50}$ e l'asse y nel punto di ordinata $(\sqrt{50})/(49)$.

Soluzione dell'Es. 2.2: Il sistema ammette ∞^1 soluzioni:

$$I = \left\{ {}^t[\, x_4,\, -(2/3)\, x_4,\; -(2/3)\, x_4,\, x_4 \,] \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_4 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 2.3: Si trovano gli autovalori:

$\lambda_1 = 0 \quad (\, m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1)\,) \quad , \quad \lambda_2 = 1 \quad (\, m_a(\lambda_2) = 1 = m_g(\lambda_2)\,)$.

Quindi A è diagonalizzabile e la matrice P richiesta dunque esiste. Si costruisce ora la matrice P:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

3. Prova del 12 Giugno 2015

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 3.1. (Punti: 4) Determinare le radici in $\mathbb{C}$ del seguente polinomio, precisando per ciascuna di esse il valore della molteplicità algebrica:
$$P(z) = (z^2+z+2)^2 \cdot (z^2+z-1)^3 \ .$$

Esercizio 3.2. (Punti: 5+5) Siano $P = [\,1,\,0,\,1\,]$ e r la retta
$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-2z=0 \ . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\operatorname{dist}(P,\,r)$.

(b) Determinare (se possibile) l'equazione del piano Π che contiene r e l'asse x .

Esercizio 3.3. (Punti: 6) Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+x_4=1 \ . \end{cases} \tag{3.1}$$

Esercizio 3.4. (Punti: 6) Sia
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \ \in \ M_3(\mathbb{R}) \ .$$
Stabilire se A è diagonalizzabile.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 12 Giugno 2015:

Soluzione dell'Es. 3.1: Le radici di $P(z)$ sono:

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{7}}{2}\ , \quad z_2 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{7}}{2}\ ,$$

entrambe con molteplicità algebrica 2 , e

$$z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\ , \quad z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\ ,$$

entrambe con molteplicità algebrica 3 .

Soluzione dell'Es. 3.2:

(a) La proiezione ortogonale di P su r è

$$Q = [(2/3),\, -(2/3),\, (1/3)]\ ,$$

da cui si ricava $\mathrm{dist}(P,\, r) = 1$.

(b) Le 2 rette sono incidenti nell'origine, quindi è possibile determinare il piano richiesto. Si trova $\Pi\ :\quad y + 2z = 0$.

Soluzione dell'Es. 3.3: L'insieme delle soluzioni è:

$$\left\{\, {}^t[\,-1 - x_3,\, 0,\, x_3,\, 1\,]\ \in \mathbb{R}^4\ :\ x_3\ \in \mathbb{R}\,\right\}\ .$$

Soluzione dell'Es. 3.4: Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda = -\lambda\,(1-\lambda)^2\ ,$$

quindi ha solo radici reali: $\lambda_1 = 1$, con $m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1)$, e $\lambda_2 = 0$, con $m_a(\lambda_2) = 1(= m_g(\lambda_2))$, quindi A è diagonalizzabile.

4. Prova del 1º Luglio 2015

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 4.1. (Punti: 4) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ .$$

Calcolare (se possibile) A^{-1} .

Esercizio 4.2. (Punti: 5+5) Siano $P = [1, 1, 0]$ e :

$$r \ : \qquad \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione del piano Π che contiene P e r .
(b) Calcolare $\mathrm{dist}(P, r)$.

Esercizio 4.3. (Punti: 5) Disegnare l'ellisse γ di equazione

$$4\,x^2 + y^2 + 8\,x - 4\,y + 4 = 0 \ , \tag{4.1}$$

precisando le coordinate del centro di γ, la lunghezza dei suoi semiassi, le eventuali intersezioni con gli assi e l'equazione della retta tangente a γ nel puntp $P = [-2, 2]$.

Esercizio 4.4. (Punti: 6) Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2\,x_2 + \ x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.5. (Punti: 5) Risolvere in $\mathbb{C}$:

$$z^3 - 10\,z^2 + \ 61\,z = \ 0 \ .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 1^o Luglio 2015:

Soluzione dell'Es. 4.1:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 4.2: (a)

$$\Pi \ : \qquad x - y - 2z = 0 \ .$$

(b) Un calcolo mostra che la proiezione ortogonale di P su r è l'origine, da cui si ricava a $\mathrm{dist}(P,\, r) = \sqrt{2}$.

Soluzione dell'Es. 4.3: Mediante il metodo di completamento dei quadrati si trova che l'equazione dell'ellisse γ equivale a

$$(x+1)^2 \,+\, \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \ .$$

Quindi

$$a = 1 \ , \quad b = 2 \quad \text{e} \quad C = [-1,\, 2] \ ,$$

da cui è facile realizzare il disegno richiesto. Le intersezioni con gli assi sono $[-1,\, 0]$ e $[0,\, 2]$, mentre la tangente richiesta è la retta verticale $x = -2$.

Soluzione dell'Es. 4.4: La matrice dei coefficienti ha rango due. L'insieme delle soluzioni del sistema è:

$$\left\{ {}^t[-\,x_3 + 3\,x_4,\, -\,2\,x_4,\, x_3,\, x_4] \ \in\ \mathbb{R}^4 \ :\ x_3,\, x_4 \ \in\ \mathbb{R} \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 4.5:

$$z_0 = 0, \qquad z_1 = 5 + \, 6\,i \ , \quad z_2 = 5 - \, 6\,i \ .$$

5. Prova del 22 Luglio 2015

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 5.1. (Punti: 7) Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_4 = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 5.2. (Punti: 6) Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

Esercizio 5.3. (Punti: 4+4+4) Sia $P = [3, 0, 1]$.

(a) Calcolare $\text{dist}(P, \text{asse } x)$.
(b) Determinare il piano Π che contiene P e l'asse y .
(c) Determinare l'equazione del piano Π' che passa per P ed è parallelo agli assi x e z.

Esercizio 5.4. (Punti: 9) Disegnare l'iperbole γ definita da

$$8x^2 - 2y^2 + 4y - 10 = 0 \ ,$$

precisando:

(a) Le equazioni dei due asintoti.
(b) Le coordinate del centro C di γ e dei punti di intersezione tra γ e l'asse x .
(c) L'equazione della retta r tangente a γ nel punto $P = [1, \, 1]$.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 22 Luglio 2015:

Soluzione dell'Es. 5.1: Si calcola $\rho(A) = 2$. Se ne deduce che il sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_4 = 0 \ . \end{cases}$$

In particolare, ne deduciamo che le ∞^2 soluzioni sono descritte da:

$$\left\{ [2x_4,\, -(1/4)x_3,\, x_3,\, x_4] \ \in \ \mathbb{R}^4 \ : \ x_3,\, x_4 \ \in \ \mathbb{R} \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 5.2: Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda - 2)^2 \ ,$$

per cui abbiamo due autovalori: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Poi, si calcola: $m_a(\lambda_1) = 2 = m_g(\lambda_1)$, ma $m_a(\lambda_2) = 2$, $m_g(\lambda_2) = 1$ .Ne segue che la matrice non è diagonalizzabile.

Soluzione dell'Es. 5.3:

(a) $\mathrm{dist}(P, \text{asse } x) = 1$.
(b) $\Pi \ : \quad x - 3z = 0$.
(c) $\Pi' \ : \quad y = 0$.

Soluzione dell'Es. 5.4: Usando il metodo di completamento dei quadrati si deduce che l'equazione di γ è equivalente a:

$$x^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \ ,$$

per cui γ è un'iperbole traslata di centro $C = [0,\, 1]$, con $a = 1$ e $b = 2$. I suoi asintoti hanno equazione rispettivamente

$$r_1 \ : \ y = 2x + 1 \ , \qquad r_2 \ : \ y = -2x + 1 \ ,$$

mentre le coordinate dei punti di intersezione di γ con l'asse x sono $[(\sqrt{5}/2),\, 0]$ e $[-(\sqrt{5}/2),\, 0]$. Con queste informazioni è facile realizzare il disegno, da cui appare evidente che la tangente r richiesta è la retta verticale $x = 1$.

6. Prova del 14 Settembre 2015

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 6.1. (Punti: 6) Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \quad . \end{cases}$$

Esercizio 6.2. (Punti: 6) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

Calcolare, se possibile, la matrice inversa A^{-1} .

Esercizio 6.3. (Punti: 6+7) Sia $P = [1, 0, 1]$ e si consideri la retta

$$r \ : \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione del piano Π che contiene P e r .
(b) Calcolare $\mathrm{dist}(P, r)$.

Esercizio 6.4. (Punti: 7) Disegnare la conica γ definita da

$$4\,x^2 \,+\, y^2 - \,8\,x \,+\, 2\,y \,+\, 1 \,=\, 0 \ .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 14 Settembre 2015:

Soluzione dell'Es. 6.1: Il sistema è omogeneo e quindi risolubile. Si ha $\rho(A) = 2$: dunque ci sono $5 - 2 = 3$ incognite libere e il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases} .$$

Da ciò è facile esplicitare l'insieme delle soluzioni del sistema:

$$\left\{ {}^t[\, x_3 - x_2,\, x_2,\, x_3,\, -x_5,\, x_5\,] \in \mathbb{R}^5 \ : \ x_2,\, x_3,\, x_5 \ \in \ \mathbb{R} \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 6.2:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 6.3:

(a)

$$\Pi \ : \qquad y = 0 .$$

(b) Si calcola la proiezione ortogonale Q di P su r: si ottiene

$$Q = [0, 0, 0] ,$$

da cui

$$\mathrm{dist}(P,\, r) = \mathrm{dist}(P,\, Q) = \sqrt{2} .$$

Soluzione dell'Es. 6.4: Usando il metodo del completamento dei quadrati si verifica facilmente che l'equazione di γ è equivalente a

$$(x-1)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 ,$$

per cui γ è un'ellisse con semiassi paralleli agli assi x e y. Più precisamente, il centro dell'ellisse è il punto di coordinate $[1, -1]$, il semiasse orizzontale a ha lunghezza 1, mentre il semiasse verticale è $b = 2$; da questi dati è immediato realizzare la rappresentazione grafica di γ . In particolare, si può mettere in luce che l'ellisse γ interseca l'asse x nei due punti di ascissa $1 \pm (\sqrt{3}/2)$, ed interseca l'asse y nel punto di ordinata -1.

7. Prova dell'8 Gennaio 2016

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 7.1. (Punti: 7) Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 7.2. (Punti: 5) Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

Esercizio 7.3. (Punti: 4+4+4) Sia $P = [-1, 0, 3]$.

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P, \text{asse } z)$.
(b) Determinare il piano Π che contiene P e l'asse y .
(c) Determinare l'equazione del piano Π' che passa per P ed è parallelo agli assi y e z.

Esercizio 7.4. (Punti: 9) Disegnare l'iperbole γ definita da

$$4x^2 - y^2 + 2y - 5 = 0 \ ,$$

precisando:

(a) Le equazioni dei due asintoti.
(b) Le coordinate del centro C di γ e dei punti di intersezione tra γ e l'asse x .
(c) L'equazione della retta r tangente a γ nel punto $P = [1,\ 1]$.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova dell'8 Gennaio 2016:

Soluzione dell'Es. 7.1: Il sistema ammette ∞^2 soluzioni:

$$\left\{ [-2x_4,\, -x_3,\, x_3,\, x_4] \ \in \ \mathbb{R}^4 \ : \ x_3,\, x_4 \ \in \ \mathbb{R} \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 7.2: Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^2 \left[(3-\lambda)^2 + 1\right] \ ,$$

per cui ammette due radici complesse, non reali, $3 \pm i$. Ne segue che la matrice non è diagonalizzabile.

Soluzione dell'Es. 7.3:
(a) $\mathrm{dist}(P, \text{asse } z) = 1$.
(b) $\Pi \ : \quad 3x + z = 0$.
(c) $\Pi' \ : \quad x + 1 = 0$.

Soluzione dell'Es. 7.4: Usando il metodo di completamento dei quadrati si deduce che l'equazione di γ è equivalente a:

$$x^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \ ,$$

per cui γ è un'iperbole traslata di centro $C = [0,\, 1]$, con $a = 1$ e $b = 2$. I suoi asintoti hanno equazione rispettivamente

$$r_1 \ : \ y = 2x + 1 \ , \qquad r_2 \ : \ y = -2x + 1 \ ,$$

mentre le coordinate dei punti di intersezione di γ con l'asse x sono $[(\sqrt{5}/2),\, 0]$ e $[-(\sqrt{5}/2),\, 0]$. Con queste informazioni è facile realizzare il disegno, da cui appare evidente che la tangente r richiesta è la retta verticale $x = 1$.

8. Prova del 29 Gennaio 2016

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 8.1. (Punti: 8)
Sia
$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$
Determinare P tale che $P^{-1}\cdot A\cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 8.2. (Punti: 5+3+3)
Siano $P=[1,1,0]$ e
$$r \ : \qquad \begin{cases} x+z=0 \\ y=1 \ . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\operatorname{dist}(P,\,r)$.
(b) Dare una rappresentazione parametrica della retta r_1 che passa per P ed è parallela a r.
(c) Descrivere la retta r_1 determinata al punto (b) mediante un sistema lineare.

Esercizio 8.3. (Punti: 7) Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$, precisando, per ognuna delle soluzioni, il valore della molteplicità algebrica:
$$(z^3+27)^2=0$$

Esercizio 8.4. (Punti: 6)
Eseguire uno studio completo della conica γ definita da
$$x^2\,+\,9\,y^2\,+\,2\,x\,+\,18\,y\,+\,1\,=\,0\ .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 29 Gennaio 2016:

Soluzione dell'Es. 8.1: Per prima cosa si calcolano gli autovalori:

$$\lambda_1 = 0 \ ; \qquad \lambda_2 = -1 \ ; \qquad \lambda_3 = 3 \ .$$

Poi si costruisce

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 8.2:

(a) La proiezione di P su r è $Q = [(1/2),\, 1,\, -(1/2)]$. Se ne deduce che

$$\mathrm{dist}(P,\, r) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

(b)

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = -t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

(c)

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \ . \end{cases}$$

Soluzione dell'Es. 8.3:

$$z_0 = -3 \ ; \quad z_1 = \frac{3}{2}\,(1 + i\,\sqrt{3}) \ ; \quad z_2 = \frac{3}{2}\,(1 - i\,\sqrt{3}) \ .$$

ognuna con molteplicità algebrica 2.

Soluzione dell'Es. 8.4: Si tratta di un'ellisse traslata (l'equazione si riscrive infatti mediante il metodo di completamento dei quadrati):

$$\frac{(x+1)^2}{9} \ + \ (y+1)^2 \ = \ 1 \ .$$

Quindi il centro dell'ellisse è $C = [-1,\, -1]$; i suoi semiassi valgono $a = 3$, $b = 1$. L'ellisse interseca l'asse x nel punto di ascissa -1; interseca poi l'asse y nei 2 punti di ordinata $-1 \pm [(2\,\sqrt{2})/3]$. Da queste considerazioni è facile procedere al disegno dell'ellisse.

9. Prova del 19 Febbraio 2016

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 9.1. (Punti: 6)
Sia
$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\ \in\ M_3(\mathbb{R})\ .$$
Calcolare $(A^2)^{-1}$.

Esercizio 9.2. (Punti: 6+6+6)
Siano $P=[1,0,1]$ e
$$r\ :\quad \begin{cases} x+z=0\\ y-1=0\ .\end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione del piano Π che contiene P e r.
(b) Calcolare $\mathrm{dist}(P,r)$.
(c) Scrivere un sistema lineare che definisce la retta r' che passa per P ed è parallela a r.

Esercizio 9.3. (Punti: 6)
Risolvere (se possibile) il seguente sistema lineare:
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_1-x_2+x_3+x_4=1\\ x_2=1\end{cases}$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 19 Febbraio 2016:

Soluzione dell'Es. 9.1:

$$(A^2)^{-1} = I \ ,$$

la matrice identità.

Soluzione dell'Es. 9.2:

(a)

$$\Pi \ x + 2y + z - 2 = 0$$

(b)

$$\mathrm{dist}(P, r) = \sqrt{3} \ .$$

(c)

$$r' \ : \quad \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y = 0 \ . \end{cases}$$

Soluzione dell'Es. 9.3:

Il sistema non ammette soluzioni.

Università degli Studi di Cagliari, Dipartimento di Matematica e Informatica, Viale Merello 93, 09123 Cagliari, Italia
E-mail address: `rattoa@unica.it`