ESAMI E ESERCITAZIONI A.A. 2013-14

ANDREA RATTO

SOMMARIO. In questo file presentiamo prove d'esame, esercitazioni ed esami relativi al Corso Integrato di Matematica, Modulo B, per Scienze dell'Architettura (a.a.2013-14). Si noti che, durante tutte le prove d'esame, è ammessa la consultazione di qualunque materiale cartaceo (libri, appunti, formulari etc.) e l'uso di calcolatrici NON programmabili; viene invece fatto divieto di utilizzare computer portatili ed ogni altro dispositivo che consenta collegamento internet o video-audio con l'esterno (telefoni cellulari etc.).

1. Esercitazione di preparazione alla prima prova intermedia (14 Aprile 2014)

Tempo a disposizione: 80 minuti

Esercizio 1.1. Si considerino i vettori $\vec{u} = [0, -1, 2]$ e $\vec{v} = [1, 1, 3]$.

(i) Calcolare l'area A del parallelogramma individuato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(ii) Calcolare il volume V del parallelepipedo individuato da $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{j}$.
(iii) Scrivere l'equazione del piano π che passa per $P = [0, 2, 3]$ ed è parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(iv) Scrivere un sistema di equazioni che definisce la retta r passante per l'origine e parallela a $\vec{v}$.
(v) Scrivere l'equazione della sfera S avente centro l'origine e passante per il punto P di cui al (iii) sopra.
(vi) Scrivere l'equazione del piano π^* che contiene $P^* = [2, 1, 4]$ e la retta r di cui al (iv) sopra.

Esercizio 1.2. Siano $P(z) = z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1$ e $P'(z) = z^2 + 1$:
(1) Calcolare quoziente e resto della divisione di polinomi
$$\frac{P(z)}{P'(z)} \ .$$
(2) Determinare le radici di $P(z)$ in $\mathbb{C}$, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica.

Esercizio 1.3. Sia $z = 3 - 4i$: calcolare
$$\mathrm{Re}(1/z^2) \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{Im}(1/z) \ .$$

Esercizio 1.4. Siano r_1 e r_2 le 2 rette incidenti definite rispettivamente da:
$$r_1 \ : \ \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases} ,t \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e} \qquad r_2 \ : \ \begin{cases} x = -1 \\ y = z \end{cases} \ .$$
(i) Calcolare le coordinate di $Q = r_1 \bigcap r_2$.
(ii) Determinare l'equazione del piano Π che contiene r_1 e r_2, e darne una rappresentazione parametrica.

Soluzioni:

Soluzione dell'Es. 1.1:

(i) $A = \sqrt{30}$.

(ii) $V = 2$.

(iii) $\pi \;:\quad 5x - 2y - z + 7 = 0$.

(iv)

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases} .$$

(v) $S \;:\quad x^2 + y^2 + z^2 = 13$.

(vi) $\pi^* \;:\quad x + 2y - z = 0$.

Soluzione dell'Es. 1.2:

(1) Quoziente e resto sono rispettivamente:

$$Q(z) = z^2 + z + 1 \quad ; \qquad R(z) \equiv 0 \; .$$

(2) Abbiamo 4 radici, ognuna con molteplicità algebrica 1:

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \; ; \qquad \pm i \; .$$

Soluzione dell'Es. 1.3:

$$\mathrm{Im}(1/z) = \frac{4}{25} \quad \text{e} \quad \mathrm{Re}(1/z^2) = -\frac{7}{625} \; .$$

Soluzione dell'Es. 1.4: (i) $Q = [-1, 2, 2]$. (ii) $\Pi \;:\; x + y - z + 1 = 0$. Una rappresentazione parametrica di Π è:

$$\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 1 + t + s \end{cases} , \; s, t \in \mathbb{R} \; .$$

2. Prova intermedia del 15 Aprile 2014 (Pari)

Tempo a disposizione: 60 minuti (Matricole Pari)

Esercizio 2.1. (Punti: 5)
Sia $z = -3 - 2i$: calcolare
$$\mathrm{Re}(1/z) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(1/z^2)\ .$$

Esercizio 2.2. (Punti: 6+6+6+6)
Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:
$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases} ,\ t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = -1 \\ y = z \end{cases} .$$

(i) Stabilire se r_1 e r_2 sono incidenti oppure sghembe.
(ii) Dare una descrizione di r_1 come sistema di equazioni.
(iii) Determinare l'equazione del piano Π' che contiene l'origine O e la retta r_2 .
(iv) Calcolare $\mathrm{dist}(r_2, O)$.

Esercizio 2.3. (Punti: 6) Determinare le radici in $\mathbb{C}$, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica, del seguente polinomio:
$$P(z) = (z^2 + 4)^3 \cdot (z^2 + \sqrt{5}\, z + \frac{15}{2})\ .$$

Soluzioni della prova del 15 Aprile 2014 (Pari):

Soluzione dell'Es. 2.1:

$$\mathrm{Re}(1/z) = -\frac{3}{13} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(1/z^2) = -\frac{12}{169} \; .$$

Soluzione dell'Es. 2.2:

(i) Incidenti nel punto $P^* = [-1,\, 1,\, 1]$.

(ii)

$$r_1 \; : \quad \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \quad .$$

(iii) $\Pi' \; : \qquad y - z = 0$.

(iv) $\mathrm{dist}(r_2,\, O) = 1$.

Soluzione dell'Es. 2.3:

Abbiamo 2 radici $\pm 2\,i$, ognuna delle quali ha molteplicità algebrica 3. E poi altre 2 radici

$$\frac{-\sqrt{5} \, \pm \, 5\,i}{2} \; ,$$

ognuna delle quali ha molteplicità algebrica 1.

3. Prova intermedia del 15 Aprile 2014 (Dispari)

Tempo a disposizione: 60 minuti (Matricole Dispari)

Esercizio 3.1. (Punti: 5)
Sia $z = -1 + 4i$: calcolare

$$\mathrm{Re}(1/z^2) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(1/z)\ .$$

Esercizio 3.2. (Punti: 6+6+6+6)
Siano r_1 e r_2 le 2 rette descritte rispettivamente da:

$$r_1\ :\ \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases} \ ,\ t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \qquad r_2\ :\ \begin{cases} x = -1 \\ y = z \end{cases} \ .$$

(i) Stabilire se r_1 e r_2 sono incidenti oppure sghembe.
(ii) Dare una descrizione di r_1 come sistema di equazioni.
(iii) Determinare l'equazione del piano Π' che contiene l'origine O e la retta r_1 .
(iv) Calcolare $\mathrm{dist}(r_1, O)$.

Esercizio 3.3. (Punti: 6)
Determinare le radici in $\mathbb{C}$, precisando per ognuna di esse il valore della molteplicità algebrica, del seguente polinomio:

$$P(z) = (z^2 - 3)^4 \cdot (z^2 + \sqrt{5}\, z + \frac{15}{2})\ .$$

Soluzioni della prova del 15 Aprile 2014 (Dispari):

Soluzione dell'Es. 3.1:

$$\mathrm{Re}(1/z^2) = -\frac{15}{289} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(1/z) = -\frac{4}{17}\ .$$

Soluzione dell'Es. 3.2:

(i) Sghembe.

(ii)

$$r_1 \ : \quad \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \quad .$$

(iii) $\Pi' \ : \qquad x + y - z = 0\ .$

(iv) $\mathrm{dist}(r_1, O) = \sqrt{(3/2)}\ .$

Soluzione dell'Es. 3.3: Abbiamo 2 radici $\pm\sqrt{3}$, ognuna delle quali ha molteplicità algebrica 4. E poi altre 2 radici

$$\frac{-\sqrt{5}\ \pm\ 5\,i}{2}\ ,$$

ognuna delle quali ha molteplicità algebrica 1.

4. Esercitazione del 26 maggio 2014

Esercizio 4.1. Sia
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare una **matrice di rotazione** P tale che:

$${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \ , \quad \text{con } \lambda_1 > \lambda_2 \ .$$

Esercizio 4.2. Usando i calcoli dell'Esercizio 4.1, svolgere lo studio completo della conica γ di equazione:
$$x^2 + 4xy + y^2 - 3 = 0 \ . \tag{4.1}$$

Esercizio 4.3. Determinare l'insieme delle soluzioni I del seguente sistema lineare omogeneo:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2\,x_4 = 0 \\ x_3 - 3\,x_4 = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Esercizio 4.4. Calcolare la lunghezza dei semi-assi dell'ellisse γ di equazione:
$$9\,x^2 + 4\,y^2 + 36\,x + 40\,y + 100 = 0 \ . \tag{4.3}$$

Esercizio 4.5. Sia
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

(i) Stabilire se A è diagonalizzabile.
(ii) Determinare (se possibile) 2 autovettori non paralleli appartenenti all'autospazio V_{λ_1} , dove $\lambda_1 = 0$.

Soluzioni dell'esercitazione del 26 maggio 2014:

Soluzione dell'Es. 4.1: La matrice di rotazione

$$P = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

è tale che:

$$^tP \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 4.2: Preliminarmente, si verifica che $\det(A') \neq 0$ (conica non degenere) e $\det(A) < 0$ (iperbole). Rispetto alle coordinate x', y' , legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

l'equazione dell'iperbole γ diventa:

$$(x')^2 - \frac{(y')^2}{3} = 1 .$$

Si può inoltre osservare che, geometricamente, gli assi x', y' si ottengono da quelli di partenza mediante una rotazione, in senso antiorario, pari ad un angolo $\theta = (\pi/4)$.
Detto questo, è facile concludere passando alla rappresentazione grafica, in cui si consiglia di prestare attenzione alla rappresentazione degli asintoti di γ .

Soluzione dell'Es. 4.3: L'insieme delle soluzioni è:

$$I = \left\{ {}^t[-3\,x_4,\, 7\,x_4,\, 6\,x_4,\, 2\,x_4] \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_4 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 4.4:

$$a = 2 , \quad b = 3 .$$

Soluzione dell'Es. 4.5:

(i) $P(\lambda) = \lambda^2\,(\lambda^2 - \lambda + 1)$: quindi $P(\lambda)$ ha radici non reali, da cui deduciamo che A non è diagonalizzabile.

(ii) $\lambda_1 = 0$ è un autovalore di A con molteplicità geometrica 2 : 2 autovettori non paralleli sono, ad esempio,

$$\vec{w_1} =^t [0, 1, 0, 0] , \quad \vec{w_2} =^t [0, 0, 1, 0] .$$

5. Prova parziale del 29 Maggio 2014

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 5.1. (Punti: 14) Svolgere lo studio completo della conica γ di equazione:

$$17\,x^2 + 17\,y^2 - 30\,xy - 32 = 0$$

(porre $\lambda_1 < \lambda_2$).

Esercizio 5.2. (Punti: 10) Determinare l'insieme delle soluzioni I del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 - 2\,x_4 = 0 \\ 4\,x_1 - 2\,x_2 - x_3 + 4\,x_4 = 0 \\ 5\,x_1 - x_2 + 2\,x_4 = 0 \end{array}\right. \tag{5.1}$$

Esercizio 5.3. (Punti: 10) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \;.$$

Determinare una matrice invertibile $P \in M_4(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva.

Soluzioni della prova parziale del 29 Maggio 2014:

Soluzione dell'Es. 5.1: La conica è non degenere e si tratta di un'ellisse ($\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 16$). Rispetto alle coordinate x', y', legate alle coordinate di partenza dalla rotazione

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} ,$$

dove

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} ,$$

l'equazione della conica γ diventa:

$$2\,x'^{\,2} + 32\,y'^{\,2} = 32$$

Osservando che le colonne di P rappresentano i versori degli assi ruotati (rotazione pari ad un angolo di $(\pi/4)$ in senso antiorario), si procede al disegno qualitativo dell'ellisse (semiasse $a = 4$ lungo l'asse x', e semiasse $b = 1$ lungo l'asse y').

Soluzione dell'Es. 5.2: Il sistema ammette ∞^2 soluzioni:

$$I = \left\{ {}^t[\, x_2 - 2\,x_4,\ 5\,x_2,\ -6\,x_2 + 12\,x_4,\ 5\,x_4 \,] \ \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_2,\, x_4 \ \in \ \mathbb{R} \right\} .$$

Soluzione dell'Es. 5.3: A è simmetrica, per cui è diagonalizzzabile. Si trovano gli autovalori:

$$\lambda_1 = 0 \quad (\text{doppio}) , \quad \lambda_2 = 1 \text{ e } \lambda_3 = -1 .$$

Poi si costruisce la matrice P richiesta:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

6. Prova del 9 Giugno 2014

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 6.1. (Punti: 6) Determinare le radici in $\mathbb{C}$ del seguente polinomio, precisando per ciascuna di esse il valore della molteplicità algebrica:
$$P(z) = (z^2 + z + 1)^2 \cdot (z^2 + z - 2) \ .$$

Esercizio 6.2. (Punti: 6+6) Siano $P = [\,2,\,0,\,1\,]$ e r la retta
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - 2y = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\operatorname{dist}(P,\, r)$.

(b) Determinare (se possibile) l'equazione del piano Π che contiene r e l'asse y .

Esercizio 6.3. (Punti: 6) Risolvere, se possibile, il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \ . \end{cases} \tag{6.1}$$

Esercizio 6.4. (Punti: 6) Sia
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ \in \ M_3(\mathbb{R}) \ .$$
Stabilire se A è diagonalizzabile.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 9 Giugno 2014:

Soluzione dell'Es. 6.1: Le radici di $P(z)$ sono:

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\ , \quad z_2 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,$$

entrambe con molteplicità algebrica 2 , e

$$z_3 = 1\ , \quad z_4 = -2\ ,$$

entrambe con molteplicità algebrica 1 .

Soluzione dell'Es. 6.2:

(a)

$$\operatorname{dist}(P,\, r) = \frac{\sqrt{41}}{3}\ .$$

(b) Le 2 rette sono incidenti nell'origine, quindi è possibile determinare il piano richiesto. Si trova $\Pi\ :\quad x + z = 0$.

Soluzione dell'Es. 6.3: L'insieme delle soluzioni è:

$$\left\{\, {}^t[\,-1 - x_4,\, 0,\, 1,\, x_4\,]\ \in \mathbb{R}^4\ :\ x_4\ \in \mathbb{R} \right\}\ .$$

Soluzione dell'Es. 6.4: La matrice A presenta l'autovalore $\lambda_1 = 1$, con $m_a(\lambda_1) = 2$ e $m_g(\lambda_1) = 1$: quindi A non è diagonalizzabile.

7. Prova del 24 Giugno 2014

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 7.1. (Punti: 5) Sia
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ .$$

Calcolare (se possibile) A^{-1} .

Esercizio 7.2. (Punti: 5+5) Siano $P = [1, 0, 1]$ e :
$$r \ : \qquad \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione del piano Π che contiene P e r .
(b) Calcolare $\mathrm{dist}(P,\, r)$.

Esercizio 7.3. (Punti: 6) Disegnare l'ellisse γ di equazione:
$$x^2 + 4\,y^2 - 4\,x + 8\,y + 4 = 0 \ . \tag{7.1}$$

Esercizio 7.4. (Punti: 6) Stabilire se il seguente sistema lineare è risolubile:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2\,x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 7.5. (Punti: 5) Risolvere in $\mathbb{C}$:
$$z^2 + 10\,z + 61 \ = \ 0 \ .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza espositiva (scrivere molto **non** equivale a chiarezza espositiva!!).

Soluzioni della prova del 24 Giugno 2014:

Soluzione dell'Es. 7.1:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 7.2: (a)

$$\Pi \ : \qquad x - 2y - z = 0 \ .$$

(b) Un calcolo mostra che la proiezione ortogonale di P su r è l'origine, da cui si arriva a $\mathrm{dist}(P,\, r) = \sqrt{2}$.

Soluzione dell'Es. 7.3: Mediante il metodo di completamento dei quadrati si trova che l'equazione dell'ellisse γ equivale a

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \, (y+1)^2 = 1 \ .$$

Quindi

$$a = 2 \ , \quad b = 1 \quad \text{e} \quad C = [2,\, -1] \ ,$$

da cui è facile realizzare il disegno richiesto.

Soluzione dell'Es. 7.4: Il sistema non è risolubile, in quanto $\rho(A) = 2$, ma $\rho(A') = 3$.

Soluzione dell'Es. 7.5: $\Delta < 0$, per cui abbiamo due soluzioni complesse coniugate:

$$z_1 = -5 + \, 6\, i \ , \quad z_2 = -5 - \, 6\, i \ .$$

8. Prova del 17 Luglio 2014

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 8.1. (Punti: 7) Determinare l'insieme delle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 8.2. (Punti: 5) Stabilire se la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

Esercizio 8.3. (Punti: 4+4+4) Sia $P = [1, 0, 3]$.

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P, \text{asse } z)$.
(b) Determinare il piano Π che contiene P e l'asse y .
(c) Determinare l'equazione del piano Π' che passa per P ed è parallelo agli assi y e z.

Esercizio 8.4. (Punti: 9) Disegnare l'iperbole γ definita da

$$4x^2 - y^2 + 2y - 5 = 0 \ ,$$

precisando:

(a) Le equazioni dei due asintoti.
(b) Le coordinate del centro C di γ e dei punti di intersezione tra γ e l'asse x .
(c) L'equazione della retta r tangente a γ nel punto $P = [1,\ 1]$.

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 17 Luglio 2014:

Soluzione dell'Es. 8.1: Il sistema ammette ∞^2 soluzioni:

$$\left\{ [-x_4,\, -x_3,\, x_3,\, x_4] \;\in\; \mathbb{R}^4 \;:\; x_3,\, x_4 \;\in\; \mathbb{R} \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 8.2: Il polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = \lambda^2 \left[(2-\lambda)^2 + 1\right] \ ,$$

per cui ammette due radici complesse, non reali, $2 \pm i$. Ne segue che la matrice non è diagonalizzabile.

Soluzione dell'Es. 8.3:

(a) $\mathrm{dist}(P, \text{asse } z) = 1$.
(b) $\Pi \ : \quad 3x - z = 0$.
(c) $\Pi' \ : \quad x - 1 = 0$.

Soluzione dell'Es. 8.4: Usando il metodo di completamento dei quadrati si deduce che l'equazione di γ è equivalente a:

$$x^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \ ,$$

per cui γ è un'iperbole traslata di centro $C = [0,\, 1]$, con $a = 1$ e $b = 2$. I suoi asintoti hanno equazione rispettivamente

$$r_1 \ : \ y = 2x + 1 \ , \qquad r_2 \ : \ y = -2x + 1 \ ,$$

mentre le coordinate dei punti di intersezione di γ con l'asse x sono $[(\sqrt{5}/2),\, 0]$ e $[-(\sqrt{5}/2),\, 0]$. Con queste informazioni è facile realizzare il disegno, da cui appare evidente che la tangente r richiesta è la retta verticale $x = 1$.

9. Prova del 9 Settembre 2014

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 9.1. (Punti: 6) Risolvere (se possibile) il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \quad . \end{cases}$$

Esercizio 9.2. (Punti: 6) Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \; .$$

Calcolare, se possibile, la matrice inversa A^{-1} .

Esercizio 9.3. (Punti: 6+7) Sia $P = [1, 1, 1]$ e si consideri la retta

$$r \;:\quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \; . \end{cases}$$

(a) Determinare l'equazione del piano Π che contiene P e r .
(b) Calcolare $\mathrm{dist}(P, r)$.

Esercizio 9.4. (Punti: 7) Disegnare la conica γ definita da

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 8y + 1 = 0 \; .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 9 Settembre 2014:

Soluzione dell'Es. 9.1: $\rho(A) = 2$, mentre $\rho(A') = 3$: per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema **non** ammette soluzioni.

Soluzione dell'Es. 9.2:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 9.3:

(a)

$$\Pi \ : \qquad x - 2y + z = 0 \ .$$

(b) Si calcola la proiezione ortogonale Q di P su r: si ottiene

$$Q = [0, 0, 0] \ ,$$

da cui

$$\mathrm{dist}(P,\, r) = \mathrm{dist}(P,\, Q) = \sqrt{3} \ .$$

Soluzione dell'Es. 9.4: Usando il metodo del completamento dei quadrati si verifica facilmente che l'equazione di γ è equivalente a

$$\frac{(x+1)^2}{4} + (y-1)^2 = 1 \ ,$$

per cui γ è un'ellisse con semiassi paralleli agli assi x e y. Più precisamente, il centro dell'ellisse è il punto di coordinate $[-1,\, 1]$, il semiasse orizzontale a ha lunghezza 2, mentre il semiasse verticale è $b = 1$; da questi dati è immediato realizzare la rappresentazione grafica di γ . In particolare, si può mettere in luce che l'ellisse γ interseca l'asse x nel punto di ascissa -1 , ed interseca l'asse y nei due punti di ordinata $1 \pm (\sqrt{3}/2)$.

10. Prova del 14 Gennaio 2015

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 10.1. (Punti: 8)
Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}) \ .$$

Determinare P tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 10.2. (Punti: 5+3+3)
Siano $P = [1, 3, 0]$ e

$$r \ : \qquad \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 1 \ . \end{cases}$$

(a) Calcolare $\mathrm{dist}(P, r)$.
(b) Dare una rappresentazione parametrica della retta r_1 che passa per P ed è parallela a r.
(c) Descrivere la retta r_1 determinata al punto (b) mediante un sistema lineare.

Esercizio 10.3. (Punti: 6) Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$, precisando, per ognuna delle soluzioni, il valore della molteplicità algebrica:

$$(z^3 + 8)^2 = 0$$

Esercizio 10.4. (Punti: 6)
Eseguire uno studio completo della conica γ definita da

$$x^2 \, + \, 9\,y^2 \, + \, 2\,x \, + \, 18\,y \, + \, 1 \, = \, 0 \ .$$

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 14 Gennaio 2015:

Soluzione dell'Es. 10.1: Per prima cosa si calcolano gli autovalori:

$$\lambda_1 = 0 \ ; \qquad \lambda_2 = -1 \ ; \qquad \lambda_3 = 3 \ .$$

Poi si costruisce

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Soluzione dell'Es. 10.2:

(a)

$$\mathrm{dist}(P,\, r) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \ .$$

(b)

$$r_1 \ : \qquad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 \\ z = -t \end{cases} \qquad , \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

(c)

$$r_1 \ : \qquad \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - 3 = 0 \ . \end{cases}$$

Soluzione dell'Es. 10.3:

$$z_0 = -2 \ ; \quad z_1 = 1 + i\sqrt{3} \ ; \quad z_2 = 1 - i\sqrt{3} \ .$$

ognuna con molteplicità algebrica 2.

Soluzione dell'Es. 10.4: Si tratta di un'ellisse traslata (l'equazione si riscrive infatti mediante il metodo di completamento dei quadrati):

$$\frac{(x+1)^2}{9} + (y+1)^2 = 1 \ .$$

Quindi il centro dell'ellisse è $C = [-1,\, -1]$; i suoi semiassi valgono $a = 3$, $b = 1$. L'ellisse interseca l'asse x nel punto di ascissa -1; interseca poi l'asse y nei 2 punti di ordinata $-1 \pm [(2\sqrt{2})/3]$. Da queste considerazioni è facile procedere al disegno dell'ellisse.

11. Prova del 3 Febbraio 2015

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 11.1. (Punti: 4+4)
Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) \ .$$

(a) Stabilire se A è diagonalizzabile.
(b) Determinare una base ortonormale di V_{λ_1} , dove $\lambda_1 = 0$.

Esercizio 11.2. (Punti: 3+6)
Siano

$$r_1 \ : \ \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \ , \qquad r_2 \ : \ \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \ .$$

(a) Verificare che r_1 e r_2 sono incidenti.
(b) Determinare l'equazione del piano Π che contiene r_1 e r_2 .

Esercizio 11.3. (Punti: 13)
Eseguire uno studio completo della parabola γ definita da

$$x^2 + y^2 + 2\,xy - \sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y = 0$$

(nello studio, porre $\lambda_1 > \lambda_2$).

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 3 Febbraio 2015:

Soluzione dell'Es. 11.1: (a) Il polinomio caratteristico è:

$$P(\lambda) = -\,(1-\lambda)\,\lambda^3 \ .$$

Quindi abbiamo:

$$\lambda_1 = 0 \ , \ \ m_a(\lambda_1) = 3 \ ; \qquad \lambda_2 = 1 \ , \ \ m_a(\lambda_2) = 1 \ .$$

Dato che $m_g(\lambda_1) = n - \rho(A - \lambda_1\, I) = 4 - \rho(A) = 2$, si può concludere che A NON è diagonalizzabile.

(b) L'autospazio V_{λ_1} è definito dalle 2 equazioni $x_1 = 0$, $x_4 = 0$. Quindi

$$\left\{ {}^t[0,1,0,0],\ {}^t[0,0,1,0] \right\} \ .$$

Soluzione dell'Es. 11.2:

(a) Le 2 rette non sono parallele e sono incidenti nell'origine (calcoli elementari).

(b)

$$\Pi \ : \qquad x - y + z = 0 \ .$$

Soluzione dell'Es. 11.3 (traccia): Si tratta di una parabola ruotata. Più precisamente, si calcolano gli autovalori relativi alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

associata alla parte quadratica dell'equazione: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_0 = 0$. Poi, si determina la rotazione di assi:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \ ,$$

dove

$$P \ = \begin{bmatrix} (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{2}) \\ \\ (1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix} \ .$$

Rispetto alle coordinate $[x', y']$ (assi ruotati di un angolo pari a $(\pi/4)$ in senso antiorario) l'equazione della conica diventa:

$$y' = -\,x'^2 \ .$$

A questo punto, nel sistema ruotato $Ox'y'$, si procede al disegno della parabola, che risulta intersecare gli assi di partenza nei punti di coordinate (nel sistema Oxy) rispettivamente $[\sqrt{2},\, 0]$ e $[0,\, -\sqrt{2}]$.

12. Prova del 24 Febbraio 2015

Tempo a disposizione: 60 minuti

Esercizio 12.1. (Punti: 3+7)
Si consideri il seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Determinare il numero di incognite libere del sistema.
(b) Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema.

Esercizio 12.2. (Punti: 3+3+3+3)
Si considerino i vettori $\vec{u} = [1, 0, 1]$, $\vec{v} = [2, 1, 0]$ e il punto $P = [1, 3, 1]$.

(a) Determinare l'equazione del piano Π che contiene P ed è parallelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
(b) Calcolare la distanza tra l'origine O e il piano Π .
(c) Scrivere il fascio di piani generato dalla retta r che passa per P ed è parallela a $\vec{v}$.
(d) Calcolare $\sin\theta$, dove θ indica l'angolo formato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Esercizio 12.3. (Punti: 8)
Eseguire uno studio completo dell'iperbole γ definita da:

$$4x^2 - 9y^2 + 8x - 36y - 68 = 0$$

(in particolare, determinare l'equazione degli asintoti e le coordinate del centro RISPETTO AL SISTEMA DI PARTENZA Oxy).

NOTA: Verrà attribuito un punteggio compreso tra -3 e $+3$ per valutare la chiarezza dell'esposizione.

Soluzioni della prova del 24 Febbraio 2015:

Soluzione dell'Es. 12.1: (a) La matrice dei coefficienti A ha rango $\rho(A) = 2$, per cui le incognite libere sono $n - \rho(A) = 4 - 2 = 2$.

(b) Conviene osservare preliminarmente che, dato che $\rho(A) = 2$ e un minore non nullo, di ordine 2, è estraibile dalle righe 3 e 4 di A, il sistema di partenza è equivalente a:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \ . \end{cases} \tag{12.1}$$

Ora è immediato ricavare l'insieme delle soluzioni del sistema, ovvero

$$\left\{ {}^t[-x_3 + x_4,\ 0,\ x_3,\ x_4] \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_3,\ x_4 \in \mathbb{R} \right\} \ . \tag{12.2}$$

Soluzione dell'Es. 12.2:

(a) $\Pi \ : \qquad x - 2y - z + 6 = 0$.
(b) $\mathrm{dist}(O, \Pi) = \sqrt{6}$.
(c) $\lambda\,(x - 2y + 5) + \mu\,(z - 1) = 0$, dove λ e μ sono parametri reali, non entrambi nulli.
(d) $\sin\theta = (\sqrt{3}/\sqrt{5})$.

Soluzione dell'Es. 12.3: Usando il metodo di completamento dei quadrati (si veda [1] p.593) si riconosce che l'equazione di γ equivale a:

$$\gamma \ : \ \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1 \ . \tag{12.3}$$

Questa è la forma canonica

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \ ,$$

con

$$x' = x + 1 \ , \ \ y' = y + 2 \ , \ \ a = 3 \quad \text{e} \quad b = 2 \ .$$

Quindi concludiamo rapidamente che il centro ha coordinate $O' = [-1, \ -2]$ e gli asintoti sono:

$$y' = \pm \frac{b}{a}\, x' \qquad \text{ovvero} \qquad (y + 2) = \pm \frac{3}{2}\,(x + 1) \ ,$$

cioé:

$$y = \frac{3}{2}\, x - \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad y = -\frac{3}{2}\, x - \frac{7}{2} \ .$$

A questo punto si può procedere alla rappresentazione grafica (lo Studente dovrebbe riuscire a rappresentare correttamente il sistema di riferimento traslato rispetto al quale l'iperbole risulta in forma canonica, disegnando gli asintoti e facendo uno schizzo del grafico. In sede di studio a casa, è inoltre utile mettere in risalto alcuni punti notevoli, come ad esempio, rispetto alle coordinate di partenza,

$$[-\sqrt{18}-1,0]\ , \quad [-4,-2]\ , \quad [2,-2]\ , \quad [\sqrt{18}-1,0]\ .$$

Riferimenti bibliografici

[1] A. Ratto, A. Cazzani. *Matematica per le Scuole di Architettura*, Liguori Editore, Napoli (2010) pp.1-636.

Università degli Studi di Cagliari, Dipartimento di Matematica e Informatica, Viale Merello 93, 09123 Cagliari, Italia
E-mail address: rattoa@unica.it