

Compito di Geometria 3- 16 settembre 2016

Esercizio 1 Si dimostri che $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$ è un sottoinsieme convesso di \mathbb{R}^n . Si trovino due sottoinsiemi connessi per archi di \mathbb{R}^2 , che sono omeomorfi (con la topologia indotta) ma uno è convesso e l'altro no.

Esercizio 2

Si dimostri che il prodotto di due spazi topologici è connesso per archi se e solo se lo sono i due fattori.

Esercizio 3

Si considerino i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|, -1 \leq x, y \leq 1\}, \quad B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y - 1/n)^2 = 1\} \quad n \in \mathbb{N}^* .$$

Si dimostri che A , munito della topologia indotta, è connesso per archi, compatto e di Hausdorff. Si dica se le stesse proprietà valgono per B_n (per qualunque $n \in \mathbb{N}^*$). Si dimostri che, per qualunque n , A e B_n non sono omeomorfi.

Posto $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$, si dimostri che $A \cup B$ è connesso per archi.