Compito di Geometria 3- 9 febbraio 2017

Esercizio 1 Si dimostri che la circonferenza $\mathbb{S}^1$ è una varietà topologica di dimensione 1, connessa e compatta.

Esercizio 2
Si dimostri, fornendo due controesempi non omeomorfi, che un sottospazio di uno spazio connesso non è necessariamente connesso. (Dimostrare che i due controesempi scelti non sono omeomorfi e che non sono connessi!)

Esercizio 3
Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 1\} \ , \ B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - 1/n)^2 + y^2 = 1/n\} \, n \in \mathbb{N}^* \, .$$

Si dimostri che A è omeomorfo a $\mathbb{R}$ e se ne deducano le proprietà topologiche. Posto $B = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$, si dimostri che $A \cup B$ è connesso per archi.