

Compito di Geometria 3- 9 febbraio 2016

Esercizio 1

Si dimostri che la sfera \mathbb{S}^3 è una varietà topologica di dimensione 3, compatta e connessa per archi.

Esercizio 2

Si dia un esempio di spazio connesso e non compatto, uno compatto ma non connesso e uno compatto e connesso.

Esercizio 3

Si considerino i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\} \quad , \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, y \leq 0\}$$
$$C = \{(1, 1)\} \quad , \quad D = \{(-1, 1)\}.$$

Dopo aver disegnato $X = A \cup B \cup C \cup D$, si dimostri che X , munito della topologia di sottospazio, è di Hausdorff, compatto e non connesso. Si dimostri che A, B, C, D sono aperti connessi di X .