Compito di Geometria 3- 18 gennaio 2016

Esercizio 1

Si dimostri che il toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ è una varietà topologica di dimensione 2, compatta e connessa per archi.

Esercizio 2

Si dimostri che $\mathbb{R}$, munito della topologia discreta, è localmente euclideo di dimensione 0, di Hausdorff, ma non secondo numerabile. Si dimostri inoltre che esso è primo numerabile, non connesso, non compatto.

Esercizio 3

Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$$A_n = \{(x, \frac{1}{n}x) \in \mathbb{R}^2 | n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Dopo aver disegnato A_1, A_2, A_3, si consideri $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ munito della topologia di sottospazio. Si dimostri che A è primo numerabile, connesso per archi e non compatto.

L'insieme $B = \cup_{i=1}^{2} A_i$, munito della topologia indotta, può essere omeomorfo a $\mathbb{R}$?