

Compito di Geometria 3- 16 giugno 2016

Esercizio 1

Si dimostri che $SO(2)$ munito della topologia indotta da quella euclidea di $M_2(\mathbb{R})$ è omeomorfo alla circonferenza.

Esercizio 2

Siano X, Y, Z spazi topologici e si munisca $X \times Y$ della topologia prodotto. Si dimostri che una applicazione $f : Z \rightarrow X \times Y$ è continua se e solo se lo sono le applicazioni $\pi_X \circ f$ e $\pi_Y \circ f$, dove π_X e π_Y sono le proiezioni di $X \times Y$ sui corrispondenti fattori.

Esercizio 3

Si considerino i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 :

$$A_n = \{(x, nx^2) \in \mathbb{R}^2 \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Dopo aver disegnato $A_0 \cup A_1 \cup A_2$, si consideri $A = \cup_{i=0}^{\infty} A_i$ munito della topologia di sottospazio. Si dimostri che A è primo numerabile, connesso per archi e non compatto.

L'insieme $B = A_0 \cup A_1$, munito della topologia indotta, può essere omeomorfo a \mathbb{R} ?