Compito di Geometria 3- 16 giugno 2015

Esercizio 1

Dopo aver dato la definizione di chiusura, interno, esterno e frontiera di un sottoinsieme di uno spazio topologico X, si dimostri che per ogni $S, T \subset X$ si ha:

- $S \subset T$ implica $\bar{S} \subset \bar{T}$;
- $\bar{S} = Int(S) \cup Fr(s) = S \cup Fr(s)$

Esercizio 2

Su $\mathbb{R}^2$ munito della topologia euclidea, si considerino i seguenti sottoinsiemi:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}\ ,\ B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2\}.$$

Si dimostri che $A \cup B$, munito della topologia indotta, è di Hausdorff, compatto e connesso per archi.

Esercizio 3

Si dimostri che due spazi topologici discreti sono omeomorfi se e solo se hanno la stessa cardinalità.