

Compito di Geometria 3- 3 Giugno 2014

Esercizio 1 Si dimostri che in uno spazio di Hausdorff per ogni coppia di compatti disgiunti H, K , esistono due aperti disgiunti A, B tali che $H \subset A$ e $K \subset B$.

Esercizio 2 Si dia la definizione di insieme convesso in \mathbb{R}^n . Si consideri il disco chiuso $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, 0) \leq 1\}$, dove d è la distanza euclidea e 0 il vettore nullo di \mathbb{R}^n , e si dimostri che D è convesso. Si dimostri inoltre che D , munito della topologia indotta dalla topologia euclidea di \mathbb{R}^n , è compatto, connesso, e connesso per archi.

Esercizio 3 Si dia un esempio di sottoinsieme di \mathbb{R}^2 che sia connesso per archi ma non convesso (si dimostrino i dettagli!).