Compito di Geometria 3- 24 Febbraio 2014

Esercizio 1 Dimostrare che l'intervallo $[0, 1]$ è compatto.

Esercizio 2 Sia $\mathcal{T}^*$ la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ costituita dall'insieme vuoto, da $\mathbb{R}^2$ e dagli insiemi il cui complementare è unione di un numero finito di punti e di un numero finito di rette.

- Dimostrare che $\mathcal{T}^*$ è una topologia su $\mathbb{R}^2$.
- Dimostrare inoltre che
$$\mathcal{T}_{cof} < \mathcal{T}^* < \mathcal{E},$$
dove $\mathcal{T}_{cof}$ (risp. $\mathcal{E}$) è la topologia cofinita (risp. euclidea) su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 3 Si consideri $\mathbb{R}^2$ munito della topologia euclidea e siano A, B, C i seguenti insiemi:
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - 2)^2 + y^2 = 1\},$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x + 2)^2 + y^2 = 1\},$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0, -1 \leq x \leq 1\}.$$
Sia $X = A \cup B \cup C$ e si consideri su di esso la topologia di sottospazio. Si disegni X e si dimostri che esso è compatto, connesso, e connesso per archi.