

## Compito di Geometria 3- 23 Luglio 2014

### Esercizio 1

Si dimostri che un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{R}^n$  munito della topologia euclidea) è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

### Esercizio 2

Si dimostri con un esempio che il quoziente di uno spazio topologico di Hausdorff non è necessariamente di Hausdorff.

**Esercizio 3** Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^2$ :

$$A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \frac{1}{n}\}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

e il sottoinsieme

$$B = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1\}.$$

Si dimostri che  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup B$ , munito della topologia indotta da quella euclidea di  $\mathbb{R}^2$ , è connesso per archi. Si dimostri che  $\bigcup_{n=1}^5 A_n \cup B$ , munito della topologia indotta, è compatto. È vero che  $\bigcup_{n=1}^3 A_n \cup B$  è omeomorfo a  $\bigcup_{n=1}^5 A_n \cup B$ ?