

Compito di Geometria 3- 2 Luglio 2014

Esercizio 1

Si dimostri che il prodotto cartesiano di due spazi topologici (munito della topologia prodotto) X, Y è compatto se e solo se X e Y sono compatti.

Esercizio 2

Si dia un esempio di sottoinsieme X di \mathbb{R}^2 che sia compatto ma non connesso (giustificando le affermazioni fatte).

Esercizio 3 Si considerino i seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$

Si dimostri che A è chiuso ma non è compatto, mentre B e $A \cap B$ sono compatti.