Equazioni differenziali ordinarie di ordine n

Indice

Indice **1**

1 O.D.E. **1**

2 Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine **2**
2.1 Equazioni differenziali a variabili separabili 2
2.2 Equazioni differenziali del primo ordine lineari 4
2.2.1 Problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del primo ordine 5
2.3 Equazioni differenziali del primo ordine non-lineari 6
2.3.1 Equazione di Bernoulli 6
2.3.2 Equazione di Clairaut 7

3 Equazioni differenziali lineari di ordine n a coefficienti costanti **8**
3.1 Equazioni differenziali lineari di ordine n omogenee 9
3.2 Equazioni differenziali lineari di ordine n non omogenee 13
3.2.1 Metodo della somiglianza 13
3.2.2 Metodo della variazione delle costanti arbitrarie (dovuto a Lagrange) 16

1 O.D.E.

Si chiama equazione differenziale ordinaria di ordine n una relazione del tipo

$$F(x,y,y',y'',......,y^{(n)})=0 \tag{1.1}$$

dove F é definita in un insieme di R^{n+2}.
$y=y(x)$ é la funzione incognita, $y',y'',...y^{(n)}$ le sue derivate. Quindi $y(x)$ é soluzione di (1.1) se $y(x)$ e le sue derivate soddisfano l'equazione (1.1):

$$F\big(x,y(x),y'(x),y''(x),...,y^{(n)}(x)\big)=0$$

Si chiama equazione differenziale ordinaria per distinguerla dalle equazioni differenziali alle derivate parziali (P.D.E.), e si usa il simbolo O.D.E.

Si dice equazione differenziale ordinaria di ordine n quando l'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione é proprio n.
Un'equazione differenziale é in forma normale se é esplicitata rispetto alla derivata di ordine massimo:

$$y^{(n)} = f\big(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\big) \tag{1.2}$$

altrimenti si dice non-normale (come la (1.1)).
Se nella (1.1) la F é un polinomio di primo grado in $y, y', y'', ..., y^n$ allora l'equazione si dice lineare. Un esempio di equazione differenziale ordinaria é stato incontrato nella ricerca di una primitiva: data $f(x) \in C^0_{[a,b]}$, si cercano funzioni $F(x)$ tali che $F'(x) = f(x)$.

$$g(x, y, y') = 0, \quad \text{E.D.O. del primo ordine in } \text{ forma non} - \text{normale.} \tag{1.3}$$

Integrare un'equazione differenziale significa trovare tutte le soluzioni.
L'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale di ordine n dipende da n parametri reali: le costanti $c_1, c_2, ..., c_n \to y(x, c_1, c_2, ...c_n)$, tale insieme di soluzioni é detto INTEGRALE GENERALE dell'equazione differenziale.
Nel caso dell'equazione (1.3), l'insieme delle soluzioni dipende da un solo un parametro reale: la costante $c, \to y = y(x, c)$. Fissando il parametro c si ottiene una soluzione particolare dell'equazione differenziale e viene chiamata INTEGRALE PARTICOLARE.
NOTA Non sempre ogni soluzione dell'equazione differenziale data é anche un integrale particolare: ci sono casi di equazioni differenziali che ammettono anche INTEGRALI SINGOLARI, cioé integrali non ottenibili per nessun valore della costante c.

2 Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

2.1 Equazioni differenziali a variabili separabili

Un'equazione differenziale a variabili separabili é del tipo

$$y' = f(x)g(y) \tag{2.1}$$

dove $f(x)$ e $g(y)$ sono funzioni continue in sottoinsiemi di R.
Se esiste un y_0 tale che $g(y_0) = 0$ allora $y = y_0$ é soluzione di (2.1). Infatti sostituendo y_0 al posto di y nell'equazione differenziale (2.1) si ha un'identitá in quanto il secondo membro é uguale a zero perché $g(y_0) = 0$ e il primo membro é uguale a zero perché la derivata di una costante é uguale a zero.
Se $g(y) \neq 0$ allora possiamo dividere primo e secondo membro dell'equazione per $g(y)$: $\frac{y'}{g(y)} = f(x)$, ponendo poi $y' = \frac{dy}{dx}$ e separando le variabili in (2.1) (al primo membro solo la variabile y al secondo membro solo la x) si ottiene

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx. \tag{2.2}$$

Integrando membro a membro la (2.2) si ha

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx.$$

cioé

$$G(y) = F(x) + c$$

con $G(y)$ e $F(x)$ primitive rispettivamente di $\frac{1}{g(y)}$ e $f(x)$. Se la funzione $G(y)$ é invertibile (cioé esiste la sua funzione inversa G^{-1}), allora si puó esplicitare y: $y(x) = G^{-1}\big(F(x) + c\big)$. Le soluzioni dell'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili (2.1) sono quindi:

$$y = y_0, \quad \text{integrale singolare} \tag{2.3}$$

$$y(x) = G^{-1}\big(F(x) + c\big), \quad \text{integrale generale.} \tag{2.4}$$

Esercizio

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y' = e^{x-y}\cos x. \tag{2.5}$$

Svolgimento

Osserviamo che $e^{x-y} = e^x e^{-y}$, per cui la funzione $g(y) = e^{-y}$ che $r\acute{m}e$ sempre diversa da zero (qualunque sia il valore di y).
Per separare le variabili si pone $y' = \frac{dy}{dx}$ e si porta la variabile y al primo membro e la variabile x al secondo membro:

$$e^y dy = e^x \cos x dx.$$

Integrando membro a membro si ha:

$$-e^{-y} = \int e^x \cos x dx + c. \tag{2.6}$$

L'integrale a secondo membro si risolve utilizzando il metodo di integrazione per parti (in questo caso si deve applicare 2 volte):
$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$
Abbiamo ottenuto quindi:

$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$, si porta a primo membro l'integrale che compare al secondo membro e, mettendo in evidenza e^x, si ha
$2\int e^x \cos x dx = e^x(\cos x + \sin x)$ e quindi $\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x)$. $\big($Da notare che non si é scritta la costante di integrazione in quanto compare giá in (2.6)$\big)$.
Sostituendo quest'ultimo risultato nell'equazione (2.6) si ha

$$e^y = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + c,$$

da cui si ricava l'integrale generale di (2.5):

$$y(x) = \ln\big(\frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + c\big).$$

2.2 Equazioni differenziali del primo ordine lineari

Se nell'equazione (1.1) la F con $n = 1$ é un polinomio di primo grado in y, y' l'equazione si dice lineare del primo ordine. La forma generale si puó scrivere cosí

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \quad \text{equazione non omogenea.} \tag{2.7}$$

Se $b(x) = 0$ l'equazione si dice omogenea.

L'integrale generale dell'equazione differenziale (2.7) é

$$y(x) = e^{-A(x)}\Big[\int e^{A(x)}b(x)dx + c\Big], \tag{2.8}$$

con $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ (cioé $A'(x) = a(x)$).

Dimostrazione
Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$. Moltiplichiamo entrambi i membri di (2.7) per il fattore $e^{A(x)}$ (detto fattore integrante):

$$e^{A(x)}y'(x) + e^{A(x)}a(x)y(x) = e^{A(x)}b(x).$$

Osserviamo che il primo membro di quest'ultima equazione é la derivata prima del prodotto $e^{A(x)}y(x)$ e quindi possiamo scrivere

$$\big(e^{A(x)}y(x)\big)' = e^{A(x)}b(x).$$

Integrando primo e secondo membro si ottiene
$e^{A(x)}y(x) = \int e^{A(x)}b(x)dx + c$ e quindi $y(x) = e^{-A(x)}\Big[\int e^{A(x)}b(x)dx + c\Big]$.

Esercizio

Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y' = (\tan x)\ y(x) - \sin x. \tag{2.9}$$

Svolgimento
Scriviamo l'equazione differenziale (2.9) nella forma (2.7) portando il termine in y al primo membro

$$y' - (\tan x)\ y(x) = -\sin x,$$

perció $a(x) = -\tan x$ e $A(x) = \int a(x)dx = \int(-\tan x)dx = \ln|\cos x|$.
Applichiamo direttamente la formula risolutiva (2.8) con $A(x) = \ln|\cos x|$ e $b(x) = -sinx$:

$y(x) = e^{-\ln|\cos x|}\Big[\int e^{\ln|\cos x|}\cdot(-\sin x)dx + c\Big]$
e quindi $y(x) = \frac{1}{|\cos x|}\Big[\int|\cos x|(-\sin x)dx + c\Big]$.
Essendo

$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x, & se \quad \cos x \geq 0, \\ -\cos x, & se \ \ \cos x < 0, \end{cases}$$

si avrá

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos x}\Big[\int \cos x(-\sin x)dx + c\Big] = \frac{1}{\cos x}\Big[\frac{\cos^2 x}{2} + c\Big], & se \quad \cos x \geq 0, \\ -\frac{1}{\cos x}\Big[\int \cos x \sin x dx + c\Big] = -\frac{1}{\cos x}\Big[-\frac{\cos^2 x}{2} + c\Big], & se \ \ \cos x < 0, \end{cases}$$

e quindi

$$y(x) = \frac{\cos x}{2} + \frac{c}{\cos x}$$

2.2.1 Problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del primo ordine

Il problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del primo ordine é del tipo

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y = b(x), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Si dimostra che se $a(x)$ e $b(x)$ sono funzioni continue allora il problema ammette una e una sola soluzione $y(x)$.

Esempio

Consideriamo problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + 2xy = x, \\ y(1) = \frac{3}{2}. \end{cases} \tag{2.11}$$

In questo caso $a(x) = 2x$, $b(x) = x$ sono funzioni continue e la soluzione del problema é unica. Determiniamola. Essendo un'equazione lineare del primo ordine l'integrale generale é

$y = e^{-x^2}\left[\int e^{x^2} x dx + c\right] = e^{-x^2}\left[\frac{1}{2}e^{x^2} dx + c\right] = \frac{1}{2} + ce^{-x^2}$.
Tra tutte queste curve dobbiamo determinare quella che passa per il punto $(1, \frac{3}{2})$ e che soddisfa quindi il problema (2.11),

$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + ce^{-1} \Rightarrow c = e$.
L'unica soluzione del problema (2.11) é quindi

$$y(x) = \frac{1}{2} + e^{1-x^2}.$$

2.3 Equazioni differenziali del primo ordine non-lineari

Se nell'equazione (1.1) $n = 1$ e la F non é un polinomio di primo grado in y, y' allora si avrá un'equazione differenziale del primo ordine non lineare. Vediamo come risolvere l'equazione di Bernoulli e l'equazione di Clairaut

2.3.1 Equazione di Bernoulli

É della forma:

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x)y^{\alpha}(x), \tag{2.12}$$

con $\alpha \neq 0;\ 1$ in quanto se $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$ avremo rispettivamente un'equazione differenziale lineare del primo ordinenon omogenea e omogenea che abbiamo giá studiato nel paragrafo precedente.

Osservazione
Se $\alpha > 0$ allora $y(x) = 0$ é una soluzione dell'equazione (2.12) .

Esercizio
Integrare la seguente equazione differenziale di Bernoulli

$$y' + \frac{1}{x}y = y^4 \tag{2.13}$$

Svolgimento

Dall'equazione (2.13) ricaviamo $\alpha = 4 > 0$ quindi $y = 0$ é una soluzione. Se $y \neq 0$ dividiamo primo e secondo membro dell'equazione (2.13) per il termine y^4:

$$y'y^{-4} + \frac{1}{x}y^{-3} = 1.$$

Vogliamo riportare quest'equazione ad un'equazione lineare, per fare ció operiamo la sostituzione: $z(x) = y^{-3}(x)$.
Derivando $z(x)$ si ha
$z'(x) = -3y^{-4}y'$ da cui ricaviamo $y'y^{-4} = -\frac{1}{3}z'$.
Si sostituisce, ora, z e z' nell'equazione (2.13) e si ottiene

$$-\frac{1}{3}z' + \frac{1}{x}z(x) = 1$$

che é un'equazione lineare del primo ordine. Scriviamola nella forma generale moltiplicando primo e secondo membro per -3:

$$z' + -\frac{3}{x}z(x) = -3,$$

la cui soluzione generale é

$$z(x) = e^{\int \frac{3}{x}dx}\Big[\int -3e^{\int -\frac{3}{x}}dx + c\Big] = x^3\Big[\int -\frac{3}{x^3}dx + c\Big] =$$

$$x^3\Big[\frac{3}{2x^2} + c\Big] = \frac{3}{2}x + cx^3.$$

Allora essendo $z(x) = y^{-3}$ si ha $y(x) = z^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$ e quindi

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3}{2}x + cx^3}} \quad \textit{integrale generale.}$$

L'altra soluzione é $y = 0$ che é un integrale singolare (cioé non si ottiene per nessun valore della costante c dell'integrale generale).

2.3.2 Equazione di Clairaut

É della forma

$$y(x) = xy'(x) + g(y'), \tag{2.14}$$

con $g(y')$ funzione derivabile.
Si cercano soluzioni nella forma parametrica: $x = x(t),\ y = y(t)$ scegliendo come parametro $t = y'$. Vediamo il metodo di risoluzione con un esercizio.

Esercizio
Integrare la seguente equazione differenziale di Clairaut

$$y = xy' - \sin y' \tag{2.15}$$

Svolgimento

Deriviamo rispetto ad x primo e secondo membro dell'equazione (2.15):

$$\cancel{y'} = \cancel{y'} + xy'' - y'' \cos y'$$

da cui

$y''(x - \cos y') = 0 \Rightarrow \begin{cases} y'' = 0, \\ x - \cos y' = 0. \end{cases}$

Dalla prima equazione si ottiene $y' = c$, c costante, sostituendo $y' = c$ nell'equazione di Clairaut (2.15) otteniamo

$$y = xc - \sin c$$

che é una famiglia di rette, ed é l'integrale generale dell'equazione di Clairaut.
Dall'equazione $x - \cos y' = 0$ determiniamo ora l'integrale singolare (che é detto curva inviluppo della famiglia di rette) nella forma parametrica con parametro $t = y'$:
sostituendo $y' = t$ nell'equazione di Clairaut (2.15) otteniamo
$y = xt - \sin t$ che con $x = \cos t$ ci dá l'equazione parametrica della soluzione che cerchiamo:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = t\cos t - \sin t \end{cases} \quad integrale\ singolare\ o\ curva\ inviluppo\ della\ famiglia\ di\ rette$$

l'altra soluzione é la famiglia di rette:
$y = xc - \sin c$.

3 Equazioni differenziali lineari di ordine n a coefficienti costanti

Se nella (1.1) la F é un polinomio di primo grado in $y, y', y'', ..., y^n$ allora l'equazione si dice lineare.
La forma generale é la seguente:

$$a_0(x)y^n(x) + a_1(x)y^{n-1}(x) + ... + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) = b(x),$$

con coefficienti $a_0(x), a_1(x), ..., a_n(x)$ e il termine noto $b(x)$ funzioni della variabile x.

Tratteremo il caso in cui i coefficienti sono costanti (in quanto esiste un metodo standard per determinare n integrali linearmente indipendenti dell'equazione omogenea);

$$a_0 y^n(x) + a_1 y^{n-1}(x) + ... + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = b(x), \tag{3.1}$$

$a_0, a_1, ..., a_n$ costanti.
Se il termine noto $b(x) = 0$ l'equazione differenziale si dice omogenea (associata alla (3.1)):

$$a_0 y^n(x) + a_1 y^{n-1}(x) + ... + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0. \tag{3.2}$$

Si dimostra che l'integrale generale $y(x)$ dell'equazione (3.1) é dato dalla somma dell'integrale generale $y_O(x)$ dell'equazione omogenea (3.2) associata alla (3.1) con un integrale particolare $\bar{y}(x)$ dell'equazione non omogenea (3.1):

$$y(x) = y_O(x) + \bar{y}(x).$$

3.1 Equazioni differenziali lineari di ordine n omogenee

Illustriamo un metodo standard per determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare di ordine n omogenea e a coefficienti costanti. (Per l'equazione lineare a coefficienti variabili non esiste un metodo generale).

Si dimostra che se $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ sono n soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale lineare di ordine n omogenea a coefficienti costanti (3.2) allora l'insieme di tutte le soluzioni (integrale generale $y_O(x)$) dell'equazione (3.2) é dato dalla famiglia di funzioni:

$$y_O(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x), \tag{3.3}$$

al variare delle costanti $c_1, c_2, ..., c_n$.

NOTA. Utilizzando la terminologia degli spazi vettoriali, ricordiamo che n funzioni $y_1(x), y_2(x), ...y_n(x)$ si dicono linearmente indipendenti in $[a, b]$ se la condizione

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x) = 0$$

implica che le costanti sono tutte nulle: $c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$.

Un criterio per stabilire se n funzioni $y_1(x), y_2(x), ...y_n(x)$ sono indipendenti in un intervallo $[a, b]$ consiste nel considerare il determinante Wronskiano $W(x)$ delle n funzioni:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\ldots\ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\ldots\ldots & y_n'(x) \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x)\ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Si dimostra che se esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ per cui $W(x_0) \neq 0$ allora le n funzioni $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ sono linearmente indipendenti in $[a, b]$ (e di conseguenza si ha che $W(x) \neq 0$ in tutto $[a, b]$).

Vediamo ora come determinare gli n integrali linearmente indipendenti dell'equazione omogenea (3.2).
Dimostriamo che le soluzioni dell'equazione (3.2) sono del tipo $y = e^{\alpha x}$ se solo se α é soluzione dell'equazione caratteristica associata a (3.2).
L'equazione caratteristica si costruisce scrivendo λ al posto di y', λ^2 al posto di y'' e cosí via λ^n al posto di $y^{(n)}$ nella (3.2)

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ...a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \text{ equazione caratteristica.} \qquad (3.4)$$

Infatti, calcolando le n derivate di $y = e^{\alpha x}$ ($y' = \alpha e^{\alpha x}$, $y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}, ..., y^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}$) e sostituendole in (3.2) si ha

$$e^{\alpha x}(a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + ... + a_{n-1}\alpha + a_n) = 0$$

la quale é soddisfatta se $a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + ... + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$ cioé se $\lambda = \alpha$ é soluzione dell'equazione caratteristica (3.4).
Allora per determinare le n soluzioni dell'equazione omogenea (3.2) si devono determinare le n radici dell'equazione caratteristica associata. Si possono avere i seguenti casi:

a) l'equazione caratteristica ammette n radici reali e distinte $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ allora le n soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea sono $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$,..,$y_n = e^{\lambda_n x}$ (cioé $W(x) \neq 0$) e quindi
$y_O(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + ... + c_n e^{\lambda_n x}$;

b) l'equazione caratteristica ammette anche radici multiple (in tutto le radici multiple e semplici devono essere n), per esempio se la radice α ha molteplicitá k, allora tra le soluzioni dell'equazione omogenea si hanno anche le k soluzioni del tipo $y_1 = e^{\alpha x}$, $y_2 = xe^{\alpha x}$,...., $y_k = x^{k-1}e^{\alpha x}$.
In generale se $\lambda_1,\ \lambda_2, ...\lambda_r$ sono r radici di molteplicitá rispettivamente $k_1, k_2, ..., k_r$, (con $k_1 + k_2 + ... + k_r = n$: il numero delle radici deve essere uguale al grado dell'equazione) allora si avranno gli n integrali del tipo:
$e^{\lambda_i x}$, $xe^{\lambda_i x}$,..., $x^{k_i-1}e^{\lambda_i x}$, $i = 1, ..., r$.

c) l'equazione caratteristica ha radici complesse: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\bar{\lambda}_2 = \alpha - i\beta$ di molteplicitá k allora gli integrali linearmente indipendenti dell'equazione omogenea saranno del tipo $x^m e^{(\alpha+i\beta)x}$, $x^m e^{(\alpha-i\beta)x}$, $m = 0, 1, ..., k-1$. Applicando le formule di Eulero a questi integrali e attraverso una combinazione lineare otteniamo integrali del tipo:
$x^m e^{\alpha x} \cos \beta x \quad x^m e^{\alpha x} \sin \beta x \quad m = 0, 1, ..., k-1.$

Il caso $n = 2$

Osservazione

Per maggiore chiarezza illustriamo il metodo esposto con $n = 2$ in (3.2): si ha cosí un'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea a coefficienti costanti che possiamo riscrivere nella forma:

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

e la cui equazione caratteristica é

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \tag{3.6}$$

che ci fornisce le soluzioni $\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
Si possono avere 3 casi:

1) $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ l'equazione caratteristica (3.6) ha 2 soluzioni reali e distinte $\lambda_1 \neq \lambda_2$;

2) $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ l'equazione caratteristica (3.6) ammette 2 soluzioni reali coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ o, che é equivalente, ammette una soluzione doppia λ (cioé di molteplicitá = 2)

3) $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ l'equazione caratteristica ha 2 radici complesse coniugate che scriviamo per comoditá come $\lambda = \alpha + i\beta$ e $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ $\alpha, \ \beta \in \mathbb{R}$ e $\beta \neq 0$(altrimenti λ non sarebbe un numero complesso).

Allora i due integrali linearmente indipendenti saranno rispettivamente

1) $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \qquad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \quad$ (quando $\Delta > 0$);

2) $y_1(x) = e^{\lambda x}, \qquad y_2(x) = xe^{\lambda x}, \quad$ (quando $\Delta = 0$);

3) $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x \quad$ (quando $\Delta < 0$).

I due integrali trovati sono linearmente indipendenti infatti si verifica facilmente che in tutt'e 3 i casi

$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$
cioé

1) $W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \neq 0$ in quanto $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

2) $W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & (1+\lambda x)e^{\lambda x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda x} \neq 0.$;

3) $W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}[\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x] & e^{\alpha x}[\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x] \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$, in quanto $\beta \neq 0$.

Esercizio 1
Integrare l'equazione differenziale

$$y''' - 2y'' + y' = 0.$$

Svolgimento
Si scrive l'equazione caratteristica: $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$ che si puó riscrivere come

$$\lambda(\lambda - 1)^2 = 0$$

. Si trovano quindi 3 soluzioni reali: la radice semplice $\lambda = 0$ e la radice multipla $\lambda = 1$ di molteplicitá 2. Allora i 3 integrali particolari dell'equazione omogenea sono: $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$. L'integrale generale é una combinazione lineare dei 3 integrali particolari linearmente indipendenti cioé : $y_O(x) = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x$

Esercizio 2

Risolvere l'equazione differenziale: $y^{IV} - 6y^{'''} + 10y'' = 0$.

Svolgimento

L'equazione caratteristica associata é

$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 10\lambda^2 = 0$ che sin puo' riscrivere cosí $\lambda^2(\lambda^2 - 6\lambda + 10) = 0$.
Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono: $\lambda = 0$ di molteplicitá 2, le altre due sono radici complesse (si ricavano da $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$) che posso determinare

utilizzando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado(e ricordando che $i^2 = -1$):
$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \pm \sqrt{9-10} = 3 \pm i$.
I 4 integrali particolari dell'equazione omogenea saranno allora
$y_1 = 1$, $y_2 = x$ dovuti alla radice doppia $\lambda_1, 2 = 0$
$y_3 = e^{3x} \cos x$, $y_4 = e^{3x} \sin x$ dovuti alle radici complesse coniugate $\lambda_3 = 3 + i$, $\lambda_4 = 3 - i$ (la parte reale é $\alpha = 3$ e il coefficiente dell'immaginario é$\beta = 1$) .
L'integrale generale é quindi $y_O = c_1 + c_2 x + c_3 e^{3x} \cos x + c_4 e^{3x} \sin x$

3.2 Equazioni differenziali lineari di ordine n non omogenee

Abbiamo giá detto che l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare di ordine n non omogenea é dato da:

$$y(x) = y_O(x) + \bar{y}(x),$$

dove $y_O(x)$ é l'integrale generale dell'equazione omogenea (3.2) associata all'equazione differenziale completa (3.1), e $\bar{y}(x)$ é un integrale particolare dell'equazione completa. Perció dopo aver calcolato $y_O(x)$ si deve cercare un integrale particolare $\bar{y}(x)$ dell'equazione non omogenea. Vediamo allora 2 metodi utili per il calcolo di $\bar{y}(x)$.

3.2.1 Metodo della somiglianza

Esistono dei casi particolari in cui é possibile determinare in modo diretto una soluzione, e solo in questi casi si puó applicare il metodo della somiglianza: l'integrale particolare che cerchiamo deve "somigliare" al termine noto $b(x)$ dell'equazione differenziale.

I. $b(x)$ é del tipo $b(x) = e^{\gamma x} p_m(x)$, con $p_m(x)$ polinomio di grado m in x. In questo caso si dimostra che

a) se $P(\gamma) \neq 0$ allora $\bar{y} = e^{\gamma x} q_m(x)$, cioé γ non é radice del polinomio caratteristico, con $P(\lambda)$ polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea (cioé $P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n$) e con $q_m(x)$ polinomio di grado m in x (stesso grado di $p_m(x)$).

b) se $P(\gamma) = 0$ cioé γ é radice del polinomio caratteristico e ha molteplicitá h allora $\bar{y}(x) = x^h e^{\gamma x} q_m(x)$

II. $b(x)$ é del tipo $b(x) = e^{\gamma x}[p_m(x)\cos\mu x + r_k(x)\sin\mu x]$ con $p_m(x)$ e $r_k(x)$ polinomi in x di grado rispettivamente m e k. In questo caso si dimostra che

a) se $P(\gamma \pm i\mu) \neq 0$ allora $\bar{y}(x) = e^{\gamma x}[q_s(x)\cos\mu x + t_s(x)\sin\mu x]$ con $s = max\{m, k\}$ (s é il grado massimo tra m e k).

b) se $P(\gamma \pm i\mu) = 0$ e $\gamma \pm i\mu$ ha molteplicitá h allora $\bar{y}(x) = x^h e^{\gamma x}[q_s(x)\cos\mu x + t_s(x)\sin\mu x]$.

Esercizio 1

Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale lineare di ordine 3 non omogenea:

$$y''' - 2y'' + y' = e^x. \tag{3.7}$$

Svolgimento

Il primo passo é determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata alla nostra equazione differenziale. Per fare questo devo rsolvere l'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0,$$

da cui $\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$, che ha come radici $\lambda = 0$ radice semplice, $\lambda = 1$ radice doppia (cioé di molteplicitá 2). Quindi i 3 integrali particolari dell'eq. omogenea sono $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = e^x$, $y_3(x) = xe^x$. Allora l'integrale generale dell'equazione omogenea é dato da

$$y_O(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x.$$

Per determinare $\bar{y}(x)$ con il metodo appena descritto osserviamo che ci troviamo nel caso 1 a) infatti il termine noto della nostra equazione é tale che $\gamma = 1$ e $p_m(x) = 1$ (cioé polinomio costante), inoltre $\gamma = 1$ é anche radice dell'equazione caratteristica con molteplicitá 2; quindi $\bar{y}(x) = Cx^2e^x$ dove la costante C é da determinare. Vogliamo che $\bar{y}(x)$ sia una soluzione particolare dell'equazione differenziale completa, perció deve soddisfare l'equazione data. Derivando $\bar{y}(x)$ si ottiene

- $\bar{y}'(x) = 2Cxe^x + Cx^2e^x = Cxe^x(2 + x)$
- $\bar{y}''(x) = Ce^x[2 + 4x + x^2]$,
- $\bar{y}'''(x) = Ce^x[6 + 6x + x^2]$.

Sostituendo $\bar{y}',\ \bar{y}'', \bar{y}'''$ nell'equazione (3.7) si ha

$$Ce^x(6+6x+x^2) - 2Ce^x(2+4x+x^2) + Cxe^x(2+x) = e^x,$$

da cui, dividendo per e^x a primo e secondo membro e sommando i termini simili al primo membro, si ha $4C = 1$ cioé $C = \frac{1}{4}$, e quindi l'integrale particolare cercato é $\bar{y}(x) = \frac{1}{4}x^2e^x$.

L'integrale generale dell'equazione completa (3.7) é allora

$$y(x) = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x + \frac{1}{4}x^2e^x.$$

Esercizio 2
Integrare la seguente equazione differenziale

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \cos x. \tag{3.8}$$

Svolgimento

L'equazione caratteristica associata é $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ che si puó riscrivere come $(\lambda - 1)^3 = 0$. Si ottiene cosí la radice $\lambda = 1$ di molteplicitá 3. Allora l'integrale generale dell'equazione omogenea é dato da

$$y_O(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x.$$

Per determinare un integrale particolare osserviamo che il termine noto é del tipo relativo al secondo caso del metodo appena descritto. Infatti nel nostro esercizio $\gamma = 0$, $p_m(x) = 1$, $\mu = 1$, $r_k(x) = 0$, inoltre $\gamma \pm i\mu = \pm i$ non é soluzione dell'equazione caratteristica (abbiamo solo la radice $\lambda = 1$) perció l'integrale particolare che vogliamo é del tipo

$$\bar{y}(x) = c_4\cos x + c_5\sin x,$$

con $c_4,\ c_5$ costanti da determinare. Derivando si ottiene

- $\bar{y}'(x) = -c_4\sin x + c_5\cos x$
- $\bar{y}''(x) = -c_4\cos x - c_5\sin x,$
- $\bar{y}'''(x) = c_4\sin x - c_5\cos x.$

Ora si sostituiscono le derivate nell'equazione (3.8): $c_4\sin x - c_5\cos x - 3(-c_4\cos x - c_5\sin x) + 3(-c_4\sin x + c_5\cos x) - (c_4\cos x + c_5\sin x) = \cos x$. Raggruppando i termini simili al primo membro si ottiene

$$(-2c_4 + 2c_5)\sin x + (2c_5 + 2c_4)\cos x = \cos x,$$

affinché questa identitá sia soddisfatta devono essere uguali i coefficienti di $\sin x$ a primo membro con quelli di $\sin x$ a secondo membro, e i coefficienti di $\cos x$ con quelli di $\cos x$ a secondo membro. Si ottiene cosí il sistema di due equazioni nelle due incognite $c_4,\ c_5$:

$\begin{cases} -2c_4 + 2c_5 = 0 \\ 2c_5 + 2c_4 = 1 \end{cases}$ la cui soluzione é $c_4 = \frac{1}{4}, \quad c_5 = \frac{1}{4}$.

L'integrale particolare cercato é allora $\bar{y}(x) = \dfrac{\cos x + \sin x}{4}$. Possiamo ora scrivere l'integrale generale dell'equazione completa (3.8):

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + \frac{\cos x + \sin x}{4}.$$

3.2.2 Metodo della variazione delle costanti arbitrarie (dovuto a Lagrange)

Vediamo ora un metodo per determinare un integrale particolare $\bar{y}(x)$, dell'equazione differenziale lineare di ordine n non omogenea (3.1), valido qualunque sia la forma del termine noto $b(x)$. Tale metodo é applicabile anche al caso in cui l'equazione non é a coefficienti costanti ma, é necessario conoscere n integrali particolari(linearmente indipendenti) dell'equazione omogenea: non esiste peró un metodo standard per poterli determinare. In questa sede illustriamo tale metodo per le equazioni lineari a coefficienti costanti ricordando che é applicabile anche alle equazioni lineari a coefficienti variabili.
Siano quindi $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, n integrali particolari linearmente indipendenti dell'equazione omogenea (3.2) (che abbiamo giá determinato). L'idea é cercare una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(x) = \gamma_1(x) y_1(x) + \gamma_2(x) y_2(x) + ... \gamma_n(x) y_n(x), \tag{3.9}$$

con $\gamma_1(x), \gamma_2(x), ..., \gamma_n(x)$ n funzioni da determinare. Si dimostra che se le derivate prime di tali funzioni soddisfano il sistema:

$$\begin{cases} \gamma_1'(x) y_1(x) + \gamma_2'(x) y_2(x) + ... \gamma_n'(x) y_n(x) = 0, \\ \gamma_1'(x) y_1'(x) + \gamma_2'(x) y_2'(x) + ... \gamma_n'(x) y_n'(x) = 0, \\ \vdots \\ \gamma_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \gamma_2'(x) y_2^{(n-1)}(x) + ... \gamma_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = b(x), \end{cases} \tag{3.10}$$

allora (3.9) é proprio una soluzione particolare dell'equazione (3.1).

Osservazione
Il sistema (3.10) é un sistema di n equazioni nelle n incognite $\gamma_1'(x), \gamma_2'(x), ..., \gamma_n'(x)$. Il determinante della matrice dei coefficienti é il determinante Wronskiano degli

n integrali particolari $y_1(x), ..., y_n(x)$ linearmente indipendenti:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \dots\dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \dots\dots & y_n'(x) \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

e perció essendo $W(x) \neq 0$ il sistema (3.10) ha una sola soluzione $\gamma_1'(x), \gamma_2'(x), ..., \gamma_n'(x)$ che una volta determinata, si integra rispetto ad x e si determinano le n funzioni cercate $\gamma_1(x), \gamma_2(x), ..., \gamma_n(x)$.

Il caso $n = 2$

Nel caso di un'equazione differenziale lineare di ordine 2 l'integrale particolare che cerchiamo é del tipo $\bar{y} = \gamma_1(x)y_1(x) + \gamma_2(x)y_2(x)$ e quindi le funzioni da cercare sono 2: $\gamma_1(x),\ \gamma_2(x)$. Il sistema (3.10) diventa

$$\begin{cases} \gamma_1'(x)y_1(x) + \gamma_2'(x)y_2(x)0, \\ \gamma_1'(x)y_1'(x) + \gamma_2'(x)y_2'(x) = b(x), \end{cases}$$

con

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

Esercizio 3
Integrare la seguente equazione differenziale

$$y'' + y = \cos x. \tag{3.11}$$

Svolgimento

Come al solito il primo passo é determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea. Scriviamo l'equazione caratteristica e risolviamola:

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

le cui soluzioni sono complesse coniugate: $\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$. Allora i due integrali particolari dell'omogenea sono
$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \sin x$ e quindi
$y_O(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ é l'integrale generale dell'equazione omogenea.
Cerchiamo ora un integrale particolare della equazione non omogenea del tipo:

$$\bar{y}(x) = \gamma_1(x) \cos x + \gamma_2(x) \sin x. \tag{3.12}$$

Scriviamo il sistema nelle incognite $\gamma_1'(x),\ \gamma_2'(x)$,

$$\begin{cases} \gamma_1'(x)\cos x + \gamma_2'(x)\sin x = 0, \\ -\gamma_1'(x)\sin x + \gamma_2'(x)\cos x = \cos x. \end{cases} \tag{3.13}$$

Il sistema si puó risolvere per sostituzione, riduzione o anche con il metodo di Cramer.... Utilizziamo quest'ultimo.
Il determinante dei coefficienti é il Wronskiano:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Si ha

$\gamma_1' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \cos x & \cos x \end{vmatrix}}{W(x)} = -\sin x \cos x$ (nella prima colonna ci sono i termini noti del sistema (3.13)).

Allora $\gamma_1 = \displaystyle\int -\sin x \cos x dx = \frac{\cos^2 x}{2}$.
Allo stesso modo si determina $\gamma_2(x)$:

$\gamma_2'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}}{W(x)} = \cos^2 x$ e quindi
$\gamma_2(x) = \displaystyle\int \cos^2 x dx = \frac{\sin x \cos x + x}{2}$.
Sostituendo γ_1 e γ_2 in (3.12) si ottiene
$\bar{y}(x) = \dfrac{\cos^3 x}{2} + \dfrac{\sin x \cos x + x}{2} \sin x = \dfrac{\cos^3 x}{2} + \dfrac{\sin^2 x \cos x + x \sin x}{2}$. Ricordando che $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ si ha

$$\bar{y}(x) = \frac{\cos^3 x}{2} + \frac{(1 - \cos^2 x)\cos x + x \sin x}{2} = \frac{\cos x + x \sin x}{2}.$$

L'integrale generale dell'equazione completa (3.11) é

$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{\cos x + x \sin x}{2} = C \cos x + c_2 \sin x + \frac{x \sin x}{2}$
con $C = c_1 + \frac{1}{2}$
Si arriva allo stesso risultato applicando anche il metodo della somiglianza (farlo per esercizio, in tal caso $\bar{y}(x) = c_3 \cos x + c_4 \sin x$.....).

Esercizio 4
Integrare la seguente equazione differenziale

$$y'' + 2y' + y = \frac{\ln x}{e^x}. \tag{3.14}$$

Svolgimento

L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ ha la soluzione doppia (molteplicitá 2) $\lambda = -1$. L'integrale generale dell'equazione omogenea é $y_O(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$. Applichiamo il metodo di Lagrange per determinare un integrale particolare dell'equazione completa. Osserviamo che in questo caso il metodo della somiglianza non puó essere applicato in quanto il termine noto dell'equazione $b(x) = \frac{\ln x}{e^x}$ non é del tipo speciale richiesto dal metodo. Cerchiamo allora un integrale particolare del tipo $\bar{y}(x) = \gamma_1(x)e^{-x} + \gamma_2(x)xe^{-x}$. Le derivate prime delle funzioni $\gamma_1(x),\ \gamma_2(x)$ devono soddisfare il sistema:

$$\begin{cases} \gamma_1'(x)e^{-x} + \gamma_2'(x)xe^{-x} = 0, \\ -\gamma_1'(x)e^{-x} + \gamma_2'(x)e^{-x}(1-x) = \ln x e^{-x}. \end{cases} \tag{3.15}$$

Risolvendolo per sostituzione si ha:
$\gamma_1'(x) = -x\gamma_2'(x)$ che sostituito nella seconda equazione del sistema (3.15) ci porta a $\gamma_2'(x) = \ln x$. Integrando si ha

$$\gamma_1(x) = \int -x \ln x dx = -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}$$
$$\gamma_2(x) = \int \ln x = x\ln x - x.$$

L'integrale particolare cercato é perció

$$\bar{y}(x) = \big(-\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}\big)e^{-x} + \big(x\ln x - x\big)xe^{-x} = \big(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2\big)e^{-x}.$$

Infine l'integrale generale dell'equazione completa é
$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \big(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2\big)e^{-x}$.