

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Representação de Weierstrass em variedades Riemannianas e Lorentzianas**

**Emanoel Mateus dos Santos Freire**

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-MAT)



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Emanoel Mateus dos Santos Freire**

## Representação de Weierstrass em variedades Riemannianas e Lorentzianas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Irene Ignazia Onnis

**USP – São Carlos**  
**Dezembro de 2017**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

d722r dos Santos Freire, Emanoel Mateus  
Representação de Weierstrass em variedades  
Riemannianas e Lorentzianas / Emanoel Mateus dos  
Santos Freire; orientador Irene Ignazia Onnis. --  
São Carlos, 2017.  
99 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação  
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas  
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Superfícies Mínimas . 2. Representação de  
Weierstrass. 3. Variedades Riemannianas. 4.  
Variedades Lorentzianas. I. Onnis, Irene Ignazia,  
orient. II. Título.

**Emanoel Mateus dos Santos Freire**

Weierstrass representation in Riemannian and Lorentzian  
manifolds

Master dissertation submitted to the Instituto de  
Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-  
USP, in partial fulfillment of the requirements for  
the degree of the Master Program in Mathematics.  
*EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Irene Ignazia Onnis

**USP – São Carlos**  
**December 2017**



*Este trabalho é  
dedicado à mulher  
que mais admiro e  
que me inspira pela  
sua força, sem ela  
nada disto seria  
possível, minha  
querida mãe Maria.*





---

# Agradecimentos

---

---

Agradeço a Deus por toda ajuda e proteção que forneceu a mim e minha família, e por me guiar na vida possibilitando o encontro com tantas pessoas especiais.

Além disso, agradeço por ter me presenteado com meus pais, Maria e Waldir, que são meus grandes orgulhos e a eles devo todas minhas conquistas. Agradeço a eles por todo amor, carinho, paciência, conforto e tantos outros sentimentos bons que me transmitem quando falo com eles, quando estou com eles.

Sou muito grato à minha orientadora Profa. Irene Ignazia Onnis que a todo momento se mostrou presente me ajudando e me estimulando para poder sempre me superar, pela paciência e dedicação que teve comigo, foi a melhor orientadora que eu poderia ter, nesta fase da minha vida acadêmica. Um exemplo de orientador e pesquisador.

À minha namorada Renata, por sua compreensão, amor, carinho, risos, por estar ao meu lado e mesmo chegando de uma maneira repentina. Se eu pudesse fazer flores e estrelas eu deixaria a terra e o céu tão coloridos e brilhantes quanto você.

Aos meus amigos que tornaram minha vida mais leve e me ensinaram que a felicidade só é real quando compartilhada, em especial queria agradecer a grande vizinhança, Omar Chavez Cussy, David Carbajal (Batman), David Saldaña, Paulo Seminario, Juan Luis Fuentes, Pierre Rodriguez, Alex de la Cruz, Juan Kamasca. Por terem sido minha segunda família, aos meus amigos de Maceió da graduação e dos verões, em especial quero citar Pedro Carvalho, Myrla Kedylna, Vitor

Alves, Thiago Moraes, David Cabral e Diogo Santos por estarem ao meu lado desde o começo. A todos os colegas e amigos do Mestrado e da graduação pelo apoio na vida acadêmica, pelos risos e conversas em bares.

Ao Prof. Daniel Smania Brandão, pelo apoio e conselhos durante o mestrado.

Aos professores e funcionários do ICMC/USP.

Enfim, ao CNPq pelo apoio financeiro.

---

# Resumo

---

dos Santos Freire, E. M. **Representação de Weierstrass em variedades Riemannianas e Lorentzianas**. 2017. 99p. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

O Teorema de Representação de Weierstrass clássico, que faz uso da análise complexa para descrever uma superfície mínima imersa no espaço Euclidiano em termos de dados holomorfos, tem sido extremamente útil seja para construir novos exemplos de superfícies mínimas, seja para o estudo das propriedades destas superfícies.

Em [24], usando a equação harmônica, os autores determinam uma fórmula de representação para superfícies mínimas, simplesmente conexas, imersas em uma variedade Riemanniana qualquer. Neste caso, a condição de holomorficidade dos dados de Weierstrass consiste em um sistema de equações diferenciais parciais com coeficientes não constantes. Logo, em geral, é complicado determinar soluções explícitas. No entanto, escolhendo adequadamente o espaço ambiente, tais equações se simplificam e a fórmula pode ser usada para produzir novos exemplos de imersões mínimas conformes.

No espaço de Lorentz-Minkowski tridimensional uma fórmula de representação tipo-Weierstrass foi provada por Kobayashi, para o caso das imersões mínimas de tipo espaço (ver [18]), e por Konderak no caso das imersões mínimas de tipo tempo (ver [20]). Na demonstração destas fórmulas se utilizam as ferramentas da análise complexa e paracomplexa, respectivamente. Recentemente, em [22] os resultados de Kobayashi e Konderak foram generalizados para o caso de superfícies mínimas (de tipo espaço e de tipo tempo) imersas em 3-variedades Lorentzianas.

Nesta dissertação estudaremos as fórmulas de representação de Weierstrass para superfícies mínimas imersas em variedades Riemannianas e Lorentzianas, que foram obtidas nos artigos [18], [20], [22] e [24].

**Palavras-chave:** Superfícies Mínimas, Representação de Weierstrass, Variedades Riemannianas, Variedades Lorentzianas.

# Abstract

---

---

dos Santos Freire, E. M. **Weierstrass representation in Riemannian and Lorentzian manifolds**. 2017. 99p. Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

The classic Weierstrass Representation Theorem, which makes use of complex analysis to describe a minimal surface immersed in the Euclidean space in terms of holomorphic data, has been extremely useful either to construct new examples of minimal surfaces, rather than to study structural properties of these surfaces.

In [24], using the standard harmonic equation, the authors determine a representation formula for simply connected immersed minimal surfaces in a Riemannian manifold. In this case, the holomorphicity condition of the Weierstrass data is a system of partial differential equations with non-constant coefficients. Therefore, in geral, it is very difficult to determine explicit solutions. However, for particular ambient spaces, these equations become simpler and the formula can be used to produce new examples of conformal minimal immersions.

In the three-dimensional Lorentz-Minkowski space a Weierstrass-type representation formula was proved by Kobayashi for spacelike minimal im-

mersions (see [18]), and by Konderak for the case of timelike minimal immersions (see [20]). In the demonstration of these formulas are used the tools of complex and paracomplex analysis, respectively. Recently, in [22] the results of Kobayashi and Konderak were generalized to the case of (space-like and timelike) minimal surfaces immersed in 3-Lorentzian manifolds.

In this dissertation, we will study the Weierstrass representation formula for immersed minimal surfaces in Riemannian and Lorentzian manifolds, that was obtained in the articles [18], [20], [22] and [24].

**Keywords:** Minimal surfaces, Weierstrass Representation, Riemannian manifolds, Lorentzian manifolds.



# Índice

---

---

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Fórmula de representação de Weierstrass em variedades Riemannianas</b>	<b>5</b>
1.1 Preliminares . . . . .	6
1.2 Representação de Weierstrass em grupos de Lie . . . . .	11
1.2.1 O caso tridimensional . . . . .	13
1.3 Superfícies mínimas no grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3$ . . . . .	15
1.4 Superfícies mínimas no espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	22
1.5 O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$ . . . . .	26
<b>2 Representação de Weierstrass no espaço de Lorentz-Minkowski <math>\mathbb{L}^3</math></b>	<b>27</b>
2.1 O espaço de Lorentz-Minkowski . . . . .	28
2.2 Curvas no espaço de Minkowski . . . . .	34
2.2.1 As equações de Frenet . . . . .	36
2.3 Superfícies em $\mathbb{L}^3$ . . . . .	39



---

2.3.1	Curvatura média de superfícies não-degeneradas . . . . .	41
2.4	Representação de Enneper-Weierstrass para superfícies mínimas de tipo espaço . .	44
2.4.1	Superfícies mínimas de rotação em $\mathbb{L}^3$ . . . . .	54
2.4.2	Superfícies mínimas regradadas em $\mathbb{L}^3$ . . . . .	56
<b>3</b>	<b>Representação de Enneper-Weierstrass para superfícies mínimas de tipo tempo</b>	<b>61</b>
3.1	A álgebra dos números de Lorentz . . . . .	62
3.2	Funções diferenciáveis sobre os números de Lorentz . . . . .	63
3.3	Funções elementares sobre os números de Lorentz . . . . .	66
3.4	Teorema de representação de Weierstrass para superfícies de tipo tempo . . . . .	68
3.4.1	Construção de exemplos . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Superfícies mínimas em 3-variedades Lorentzianas</b>	<b>77</b>
4.1	Introdução . . . . .	78
4.2	O caso dos grupos de Lie Lorentzianos . . . . .	81
4.3	O grupo de Heisenberg Lorentziano . . . . .	83
4.3.1	Imersões de tipo espaço . . . . .	85
4.3.2	Imersões de tipo tempo . . . . .	88
4.4	O espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^3$ . . . . .	93
4.5	O grupo $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ Lorentziano . . . . .	94
	<b>Bibliografia</b>	<b>95</b>



# Introdução

---

---

Esta dissertação de mestrado apresenta alguns resultados relevantes sobre a construção de uma fórmula de representação como a de Weierstrass para superfícies mínimas imersas em variedades Riemannianas e Lorentzianas. O Teorema de Representação de Weierstrass clássico, que constitui uma ligação importante entre a Geometria Diferencial e a Análise Complexa, permite a construção de superfícies mínimas no espaço Euclidiano a partir de funções complexas holomorfas.

Mais especificamente, dada uma terna de funções holomorfas  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , definidas em um aberto  $\Omega \subset \mathbb{C}$  simplesmente conexo, com  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ , podemos determinar uma parametrização mínima isotérmica considerando

$$X(z) = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \Phi dz,$$

em que  $z_0$  é um ponto fixado em  $\Omega$ .

Portanto, conseguimos obter exemplos de superfícies mínimas determinando uma terna de funções holomorfas. Uma maneira eficaz de fazer isto é tomar um par de funções  $(F, G)$ , definidas em um aberto  $\Omega \subset \mathbb{C}$  simplesmente conexo, em que a função  $F$  é holomorfa (e não identicamente nula), a função  $G$  é meromorfa e cada pólo de ordem  $m$  de  $G$  é, também, zero de ordem maior ou igual a  $2m$  de  $F$ . Então, as funções definidas por:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} F (1 - G^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2} F (1 + G^2), \quad \phi_3 = F G,$$

são holomorfas em  $\Omega$  e satisfazem a condição  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ . Logo, fixado um ponto  $z_0 \in \Omega$ , a aplicação

$$X(z) = \mathcal{R}e \left( \int_{z_0}^z F(1 - G^2) dz, \int_{z_0}^z i F(1 + G^2) dz, \int_{z_0}^z 2F G dz \right)$$

é bem definida (i.e. a integral não depende do caminho em  $\Omega$  que liga  $z_0$  a  $z$ ) e define uma imersão mínima isotérmica em  $\mathbb{R}^3$ .

Reciprocamente, se  $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma imersão mínima conforme e consideramos o vetor tangente complexo

$$\Phi := \frac{\partial X}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

então as funções  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são holomorfas e não possuem períodos reais. Além disso, se  $\phi_1 - i\phi_2 \neq 0$ , então pode-se definir uma função holomorfa  $F$  e uma meromorfa  $G$  da seguinte maneira:

$$F = \phi_1 - i\phi_2, \quad G = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}$$

e o par  $(F, G)$  determina a representação de Weierstrass de  $X$ .

A importância do Teorema de Weierstrass na teoria das superfícies mínimas é dúplice: por um lado constitui uma ferramenta poderosa para a produção de exemplos, por outro lado permite usar a teoria das funções holomorfas na investigação das propriedades das superfícies mínimas. De fato, os invariantes geométricos locais de uma superfície mínima podem ser expressos em termos dos *dados de Weierstrass*  $(F, G)$ . Por exemplo, a primeira forma fundamental da superfície mínima é dada por:

$$ds^2 = 2|\Phi|^2 |dz|^2 = |F|^2 (1 + |G|^2)^2 |dz|^2,$$

enquanto a sua curvatura de Gauss se escreve como

$$K = -\frac{4|G'|^2}{|F|^2 (1 + |G|^2)^4}.$$

Além disso, a aplicação normal de Gauss da imersão  $X$ , que é dada por

$$N = \frac{\Phi \wedge \bar{\Phi}}{|\Phi|^2},$$

pode ser identificada com a função  $G$ .

Em [24] foi descrito um método para derivar uma fórmula de representação de Weierstrass para superfícies mínimas, simplesmente conexas, imersas em uma variedade Riemanniana qualquer

$(M^n, g)$ . Neste caso, a *condição de harmonicidade* de  $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow M^n$ , que no espaço  $\mathbb{R}^n$  coincide com a holomorficidade do vetor tangente complexo  $\Phi$  (ou seja, com as equações de Cauchy-Riemann), é dada pelo seguinte sistema de equações

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial \bar{z}} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \bar{\phi}_i \phi_j = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

em que  $\Gamma_{ij}^k$  são os símbolos de Christoffel de  $M$ . Como este sistema é formado por equações diferenciais às derivadas parciais com coeficientes não constantes, em geral é complicado determinar soluções explícitas.

No entanto, no caso em que a variedade ambiente é um grupo de Lie munido de uma métrica invariante à esquerda, as equações se simplificam e podem ser usadas na determinações de exemplos de superfícies mínimas. Isto foi feito em [24] para o caso do grupo de Heisenberg tridimensional  $\mathbb{H}_3$  e do espaço dado pelo produto do plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  com a reta real. Além disso, em [25] a fórmula de Weierstrass foi usada para demonstrar que o Problema de Björling em grupos de Lie tridimensionais admite uma única solução.

No espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^3$ , dado por  $\mathbb{R}^3$  munido da métrica Lorentziana

$$g = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2,$$

um teorema de representação tipo Weierstrass foi provado por O. Kobayashi para as imersões mínimas de tipo espaço (veja [18]) e por J. Konderak para o caso das imersões de tipo tempo (veja [20]). No caso das superfícies mínimas de tipo tempo em  $\mathbb{L}^3$ , são usadas as ferramentas da Análise Paracomplexa, que investiga as funções  $\mathbb{L}$ -holomorfas, isto é, as funções que estão definidas em algum domínio do plano paracomplexo

$$\mathbb{L} = \{u + \tau v \mid u, v \in \mathbb{R} \text{ e } \tau^2 = 1\},$$

que tomam valores em  $\mathbb{L}$  e são diferenciáveis como funções paracomplexas.

Recentemente, estes resultados foram estendidos para as superfícies mínimas imersas em 3-variedades Lorentzianas por J.H. Lira, M. Melo e F. Mercuri (veja [22]). Cabe aqui ressaltar que em [9] foi usada a fórmula de representação de Weierstrass para o caso dos grupos de Lie Lorentzianos tridimensionais, dada em [22], para provar a existência e unicidade da solução do Problema de Björling neste ambientes.

A dissertação é organizada como segue. No Capítulo 1 apresentamos os resultados do artigo [24] e, em seguida, discutimos como a representação de Weierstrass pode ser usada para construir exemplos de superfícies mínimas nos grupos de Lie dados por  $\mathbb{H}_3$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  e no espaço hiperbólico tridimensional  $\mathbb{H}^3$ .

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo dos resultados obtido por Kobayashi em [18] sobre uma fórmula de representação tipo à de Weierstrass para superfícies mínimas de tipo espaço no espaço de Lorentz-Minkowski tridimensional  $\mathbb{L}^3$ . Para este fim, seguindo as referências [2] e [23], apresentamos o espaço  $\mathbb{L}^3$  e, também, recordando alguns conceitos e resultados referentes à geometria diferencial das curvas e das superfícies nesta variedade.

No terceiro capítulo expomos os resultados do artigo [20], no qual Konderak usa as ferramentas da Análise Paracomplexa para produzir uma representação para as superfícies mínimas de tipo tempo imersas em  $\mathbb{L}^3$ . Para isto, foi necessário primeiramente recordar alguns conceitos de base do cálculo Lorentziano, que desempenha o mesmo papel do cálculo complexo no caso clássico. A principal referência utilizada para esta parte foi [5].

No Capítulo 4 tratamos da generalização dos resultados de Kobayashi e Konderak ao caso de superfícies mínimas imersas em uma 3-variedade Lorentziana qualquer, que foi dada em [22]. O resultado principal que provamos é o Teorema 4.1.1 e a sua versão simplificada no caso de grupos de Lie Lorentziano tridimensionais, dada pelo Teorema 4.2.1. Este último, por sua vez, pode ser reescrito usando duas funções (para)complexas oportunamente definidas para as superfícies de tipo espaço (de tipo tempo, respectivamente) imersas no grupo de Heisenberg Lorentziano tridimensional. Com isto, em [10], foi possível determinar novos exemplos de superfícies mínimas neste grupo de Lie, os quais foram descritos nas Seção 4.3.

---

# Fórmula de representação de Weierstrass em variedades Riemannianas

---

---

A fórmula de representação de Weierstrass clássica no espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , e sua generalização em  $\mathbb{R}^n$ , faz uso da análise complexa para descrever uma superfície mínima em termos de dados holomorfos. Tal ferramenta mostrou-se ser extremamente útil para construir novos exemplos de superfícies mínimas e no estudo das propriedades destas superfícies (ver, por exemplo, [4] e [17]).

Em [24], os autores descrevem uma fórmula de representação de Weierstrass para superfícies mínimas, simplesmente conexas, imersas em uma variedade Riemanniana arbitrária. As equações diferenciais parciais que tal fórmula utiliza são, em geral, bastante complicadas para conseguir determinar soluções explícitas. No entanto, escolhendo adequadamente o espaço ambiente, tais equações se simplificam e a fórmula pode ser usada para produzir novos exemplos de imersões mínimas conformes (ver [19] e [24]).

Neste capítulo apresentaremos os resultados do artigo [24]. Em particular, derivaremos uma fórmula tipo Weierstrass para o caso de grupos de Lie tridimensionais munidos de uma métrica Riemanniana invariante à esquerda. Em seguida, discutiremos como esta fórmula pode ser usada para construir exemplos de superfícies mínimas no grupo Heisenberg tridimensional  $\mathbb{H}_3$ , no produto do plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  com a reta real e no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$ .

## 1.1 Preliminares

Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional,  $\Sigma$  uma superfície de Riemann e  $f : \Sigma \rightarrow M^n$  uma aplicação suave. O fibrado pull-back  $f^*(TM)$  dado por:

$$f^*(TM) = \{(e, v) \in \Sigma \times TM : \pi(v) = f(e), v \in T_{f(e)}M\},$$

possui uma métrica e uma conexão compatível, a conexão pull-back, induzidas pela métrica Riemanniana e a conexão de Levi-Civita da variedade  $M$ .

Se consideramos a complexificação do fibrado  $\mathbb{E} = f^*(TM) \otimes \mathbb{C}$ , então a métrica  $g$  pode ser estendida a  $\mathbb{E}$  em duas maneiras:

- como uma forma bilinear complexa  $(\cdot, \cdot) : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ ,
- como uma métrica Hermitiana  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Estas duas extensões são relacionadas por:

$$\langle\langle V, W \rangle\rangle = (V, \overline{W}).$$

Sejam  $(u, v)$  coordenadas locais em  $\Sigma$  e  $z = u + iv$  o parâmetro local complexo. Consideramos os operadores complexos usuais:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

A conexão pull-back se estende a uma conexão complexa em  $\mathbb{E}$ , Hermitiana com respeito à métrica  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ , e se sabe (ver [21]) que  $\mathbb{E}$  possui uma única estrutura holomorfa tal que uma seção  $W : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}$  é holomorfa se, e somente se,

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} W = 0, \tag{1.1}$$



onde  $\tilde{\nabla}$  é a conexão pull-back.

**Proposição 1.1.1.** *Seja  $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{E}$  a seção do fibrado  $\mathbb{E}$  dada por:*

$$\Phi(p) = \frac{\partial f}{\partial z}(p) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u}(p) - i \frac{\partial f}{\partial v}(p) \right),$$

onde

$$\frac{\partial f}{\partial u} \Big|_p = f_{*p} \left( \frac{\partial}{\partial u} \Big|_p \right), \quad \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_p = f_{*p} \left( \frac{\partial}{\partial v} \Big|_p \right).$$

Então, valem as seguintes propriedades:

1. a aplicação  $f$  é uma imersão se, e somente se,  $\langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle \neq 0$ ;
2. se  $f$  é uma imersão, então  $f$  é conforme se, e somente se,  $(\Phi, \Phi) = 0$ .

*Demonstração.* A primeira afirmação é consequência imediata do fato que:

$$\begin{aligned} \langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle &= \frac{1}{4} \langle\langle \left( \frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right), \left( \frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right) \rangle\rangle \\ &= \frac{1}{4} \left[ g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) + g \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left( \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Quanto à segunda, note que

$$\begin{aligned} (\Phi, \Phi) &= \frac{1}{4} \left( \left( \frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right), \left( \frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) - i g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) - i g \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) - g \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[ \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right|^2 - 2i g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right]. \end{aligned}$$

Portanto,  $(\Phi, \Phi) = 0$  se, e somente se,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|^2 = \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right|^2 \quad \text{e} \quad g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) = 0,$$

ou seja se, e somente se  $f$  é conforme. □

Seja, agora,  $f : \Sigma \rightarrow M$  uma imersão conforme e  $z = u + iv$  um parâmetro local conforme. Então, a métrica induzida é dada por:

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2) = \lambda^2 |dz|^2,$$

onde  $\lambda = \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial v} \right|$ . O operador de Beltrami-Laplace<sup>1</sup> em  $\Sigma$ , com respeito à métrica induzida, é dado por:

$$\Delta = \lambda^{-2} \left( \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} \right) = \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Lembramos a seguinte:

**Definição 1.1.2.** Uma aplicação  $f : \Sigma \rightarrow M$  é harmônica se, e somente se,

$$\tau(f) = \text{tr}(\nabla df) = 0, \quad (1.3)$$

onde  $\tau(f)$  é dito campo de tensão de  $f$ .

A equação (1.3) é conhecida como *equação harmônica* e, no que segue, será útil escrevê-la em coordenadas locais. Seja, portanto,  $\{x_1, \dots, x_n\}$  um sistema de coordenadas locais em uma vizinhança  $U$  de  $M$  tal que  $U \cap f(\Sigma) \neq \emptyset$ . Então, em um aberto  $\Omega \subset \Sigma$  podemos escrever

$$\Phi = \sum_{j=1}^n \phi_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

para certas funções complexas  $\phi_j$  definidas em  $\Omega$ . Com respeito à decomposição local de  $\Phi$ , o campo de tensão tem a seguinte expressão (ver [14]):

$$\begin{aligned} \tau(f) &= \sum_{i=1}^n \left( \Delta f_i + 4\lambda^{-2} \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f_k}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \frac{4}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \overline{\phi_j} \phi_k \right) \frac{\partial}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>O operador de Beltrami-Laplace referente à métrica Riemanniana  $g = (g_{ij})$  é dado por

$$\Delta u = \sum_{i,j} \frac{1}{\sqrt{|D_g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{|D_g|} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right), \quad (1.2)$$

onde  $D_g = \det(g_{ij})$ .

onde  $\Gamma_{jk}^i$  são os símbolos de Christoffel de  $M$ . De acordo com a equação (1.1), a seção  $\Phi$  é holomorfa se, e somente se,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \left( \sum_{i=1}^n \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi_i \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi_i \sum_{j=1}^n \bar{\phi}_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi_i \sum_{j,k=1}^n \bar{\phi}_j \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \phi_k \bar{\phi}_j \right] \frac{\partial}{\partial x_i} = 0. \end{aligned}$$

Assim,  $\Phi$  é holomorfa se, e somente se,

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \phi_k \bar{\phi}_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.4)$$

De (1.4) e pela expressão do campo de tensão, temos que:

$$4\lambda^{-2}(\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \Phi) = \tau(f)$$

e, então,  $f : \Sigma \rightarrow M$  é harmônica se, e somente se,  $\Phi$  é uma seção holomorfa de  $\mathbb{E}$ .

Agora, como uma aplicação de uma superfície em uma variedade Riemanniana é harmônica se, e somente se, esta é uma imersão mínima (ver, por exemplo, [13]), concluímos que uma imersão conforme é mínima se, e somente se,  $\Phi$  é uma seção holomorfa de  $\mathbb{E}$ .

Estamos, agora, nas condições de provar o seguinte resultado:

**Teorema 1.1.3** (Representação de Weierstrass em variedades Riemannianas). *Sejam  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana  $n$ -dimensional e  $\{x_1, \dots, x_n\}$  coordenadas locais em  $M$ . Sejam  $\phi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , funções a valores complexos definidas em um aberto simplesmente conexo  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , que são soluções de (1.4). Então, a aplicação  $f$  com funções coordenadas dadas por:*

$$f_i(u, v) = 2 \operatorname{Re} \left( \int_{z_0}^z \phi_i dz \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

onde  $z_0 \in \Omega$ , está bem definida e define uma imersão mínima conforme se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

1.  $\sum_{j,k=1}^n g_{jk} \phi_j \overline{\phi_k} \neq 0$ ;
2.  $\sum_{j,k=1}^n g_{jk} \phi_j \phi_k = 0$ .

*Demonstração.* Devemos mostrar que a função  $f$  está bem definida. Para isso mostraremos que as 1-formas  $\phi_i dz$  não têm períodos reais, ou seja, que a integral de  $\phi_i$  sobre uma qualquer curva fechada  $\gamma = \partial D$ , com  $D \subset \Omega$  aberto, é igual a zero. De fato, como estamos nas hipóteses do Teorema de Green, temos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e \int_{\gamma} \phi_i dz &= \int_{\gamma} \mathcal{R}e(\phi_i) du - \mathcal{I}m(\phi_i) dv \\ &= - \iint_D \left( \frac{\partial \mathcal{R}e(\phi_i)}{\partial v} + \frac{\partial \mathcal{I}m(\phi_i)}{\partial u} \right) du dv. \end{aligned}$$

Além disso, a equação (1.4) se escreve como:

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \phi_k \overline{\phi_j} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j \neq k} \phi_k \overline{\phi_j} \Gamma_{jk}^i + \sum_{j=1}^n \Gamma_{jj}^i |\phi_j|^2 = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Portanto, de  $\overline{\phi_j} \phi_k + \overline{\phi_k} \phi_j = 2 \mathcal{R}e(\overline{\phi_j} \phi_k)$ , segue que

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + 2 \sum_{j>k} \Gamma_{jk}^i \mathcal{R}e(\phi_k \overline{\phi_j}) + \sum_{j=1}^n \Gamma_{jj}^i |\phi_j|^2 = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

onde os  $\Gamma$ 's são calculados em  $f(u, v)$ . Logo, concluímos que  $\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} \in \mathbb{R}$ , e sendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial u} + i \frac{\partial \phi_i}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{R}e(\phi_i)}{\partial u} - \frac{\partial \mathcal{I}m(\phi_i)}{\partial v} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{R}e(\phi_i)}{\partial v} + \frac{\partial \mathcal{I}m(\phi_i)}{\partial u} \right), \end{aligned}$$

resulta que

$$\frac{\partial \mathcal{R}e(\phi_i)}{\partial v} + \frac{\partial \mathcal{I}m(\phi_i)}{\partial u} = 0.$$

Consequentemente,  $\mathcal{R}e(\int_{\gamma} \phi_i dz) = 0$  e a 1-forma  $\phi_i dz$  não tem períodos reais.

Por fim, observe que a prova do que  $f$  é uma imersão mínima conforme segue direto da Proposição 1.1.1. □

## 1.2 Representação de Weierstrass em grupos de Lie

Nesta seção discutiremos o caso de aplicações  $f : \Sigma \rightarrow \mathcal{G}$ , onde  $\mathcal{G}$  é um grupo de Lie  $n$ -dimensional dotado de uma métrica Riemanniana  $g$  invariante à esquerda. Tomemos  $\{E_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , como sendo um referencial de campos vetoriais ortonormais invariantes à esquerda, e sejam  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , os campos vetoriais coordenados numa carta local  $U$  de  $\mathcal{G}$ .

Então, em um aberto  $\Omega \subset \Sigma$ , a seção

$$\Phi = \frac{\partial f}{\partial z} \in \Gamma(f^*(T\mathcal{G}) \otimes \mathbb{C})$$

pode ser expressa seja com respeito aos campos vetoriais coordenados, que com respeito aos campos invariantes à esquerda:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \psi_i E_i, \quad \phi_i, \psi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}.$$

Além disso, existe uma matriz invertível  $A = (A_{ij})$ , cujas entradas

$$A_{ij} : f(\Omega) \cap U \rightarrow \mathbb{R}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

satisfazem a relação:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \psi_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.5)$$

Sejam, agora,  $C_{ij}^k$  as constantes de estrutura da álgebra de Lie de  $\mathcal{G}$ , definidas por:

$$[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k E_k.$$

Observe que a fórmula de Koszul para a conexão de Levi-Civita resulta em

$$2g(\nabla_{E_i} E_j, E_k) = C_{ki}^j - C_{jk}^i + C_{ji}^k := L_{ij}^k. \quad (1.6)$$

De fato, como  $\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^n \frac{L_{ij}^k}{2} E_k$ , então:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{E_i} E_j, E_k) &= 2g\left(\sum_{k=1}^n \frac{L_{ij}^k}{2} E_k, E_k\right) \\ &= L_{ij}^k g(E_k, E_k). \end{aligned}$$

Por outro lado, como os campos  $E_i$  são ortonormais, resulta que:

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_{E_i} E_j, E_k) &= E_j g(E_i, E_k) + E_i g(E_k, E_j) - E_k g(E_j, E_i) - g([E_j, E_k], E_i) \\
&\quad - g([E_i, E_k], E_j) - g([E_j, E_i], E_k) \\
&= -g\left(\sum_{p=1}^n C_{ik}^p E_p, E_j\right) - g\left(\sum_{p=1}^n C_{jk}^p E_p, E_i\right) + g\left(\sum_{p=1}^n C_{ij}^p E_p, E_k\right) \\
&= -C_{ik}^j - C_{jk}^i + C_{ij}^k.
\end{aligned}$$

Consequentemente, obtemos a equação (1.6).

Utilizando a expressão de  $\Phi$  com respeito aos campos vetoriais invariantes à esquerda, temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \left( \sum_{i=1}^n \psi_i E_i \right) &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} E_i + \psi_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} E_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} E_i + \psi_i \sum_{j=1}^n \bar{\psi}_j \nabla_{E_j} E_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \psi_k \bar{\psi}_j L_{ji}^k \right) E_i.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \left( \sum_{i=1}^n \psi_i E_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \psi_k \bar{\psi}_j L_{ji}^k \right) E_i.$$

Isto significa que a seção  $\Phi$  é holomorfa se, e somente se,

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n L_{ji}^k \psi_k \bar{\psi}_j = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.7)$$

Com isto, obtemos o seguinte resultado:

**Teorema 1.2.1.** *Sejam  $\psi_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , funções a valores complexos definidas em um aberto simplesmente conexo  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , que satisfazem as seguintes condições:*

1.  $\sum_{i=1}^n \psi_i \bar{\psi}_i \neq 0$ ;
2.  $\sum_{i=1}^n \psi_i^2 = 0$ .

Então, a aplicação  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{G}$  com funções coordenadas dadas por:

$$f_i(u, v) = 2 \operatorname{Re} \left( \int_{z_0}^z \sum_{j=1}^n A_{ij} \psi_j dz \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

com  $z_0 \in \Omega$ , é uma imersão mínima conforme.

*Demonstração.* A demonstração segue direto do Teorema 1.1.3. □

### 1.2.1 O caso tridimensional

No caso em que  $\mathcal{G}$  é um grupo de Lie tridimensional, como no caso das superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$ , podemos dar uma descrição geométrica simples de quase todas as soluções da equação

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0. \quad (1.8)$$

De fato, de (1.8) temos que

$$(\psi_1 - i\psi_2)(\psi_1 + i\psi_2) = -\psi_3^2.$$

Isto sugere a definição de duas novas funções complexas:

$$G := \sqrt{\frac{1}{2}(\psi_1 - i\psi_2)}, \quad H := \sqrt{\frac{-1}{2}(\psi_1 + i\psi_2)}, \quad (1.9)$$

as quais satisfazem as equações:

$$\begin{cases} \psi_1 = G^2 - H^2, \\ \psi_2 = i(G^2 + H^2), \\ \psi_3 = 2GH. \end{cases} \quad (1.10)$$

Além disso, em termos de  $G$  e  $H$ , a métrica induzida na superfície se escreve da seguinte forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \lambda^2 (du^2 + dv^2) \\ &= 2\langle f_z, f_{\bar{z}} \rangle (du^2 + dv^2) \\ &= 4(|G|^2 + |H|^2)^2 (du^2 + dv^2). \end{aligned}$$

No que segue, determinaremos a expressão da aplicação normal de Gauss  $N$ , em termos dos dados de Weierstrass  $G$  e  $H$ . Como

$$\begin{aligned} 2\Phi &= f_u - i f_v, \\ 2\bar{\Phi} &= f_u + i f_v, \end{aligned}$$

Temos que:

$$\frac{2}{i} (\Phi \wedge \bar{\Phi}) = f_u \wedge f_v.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \Phi \wedge \bar{\Phi} &= \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 & \bar{\psi}_3 \end{pmatrix} \\ &= (\psi_2 \bar{\psi}_3 - \bar{\psi}_2 \psi_3) E_1 + (\psi_3 \bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_3 \psi_1) E_2 + (\psi_1 \bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1 \psi_2) E_3 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$f_u \wedge f_v = 4 (\mathcal{I}m(\bar{\psi}_3 \psi_2) E_1 + \mathcal{I}m(\bar{\psi}_1 \psi_3) E_2 + \mathcal{I}m(\bar{\psi}_2 \psi_1) E_3).$$

De (1.10), podemos escrever

$$\begin{aligned} \psi_2 \bar{\psi}_3 &= 2i \bar{G} \bar{H} (G^2 + H^2), \\ \psi_3 \bar{\psi}_1 &= 2GH(\bar{G}^2 - \bar{H}^2), \\ \psi_1 \bar{\psi}_2 &= -i(\bar{G}^2 + \bar{H}^2)(G^2 - H^2). \end{aligned}$$

Portanto, resulta que:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}m(\psi_2 \bar{\psi}_3) &= (|G|^2 + |H|^2)(G \bar{H} + H \bar{G}), \\ \mathcal{I}m(\psi_3 \bar{\psi}_1) &= i(|G|^2 + |H|^2)(G \bar{H} - H \bar{G}), \\ \mathcal{I}m(\psi_1 \bar{\psi}_2) &= -(|G|^2 + |H|^2)(|G|^2 - |H|^2). \end{aligned}$$

Dessa maneira, obtemos que

$$f_u \wedge f_v = 4(|G|^2 + |H|^2)[(G \bar{H} + H \bar{G}) E_1 - i(H \bar{G} - G \bar{H}) E_2 - (|G|^2 - |H|^2) E_3].$$

Por fim, como  $\|f_u \wedge f_v\| = 4(|G|^2 + |H|^2)^2$ , temos que a aplicação normal de Gauss é dada por:

$$N = \frac{|G|^2}{|G|^2 + |H|^2} \left( 2 \mathcal{R}e \left( \frac{H}{G} \right) E_1 + 2 \mathcal{I}m \left( \frac{H}{G} \right) E_2 + \frac{|H|^2 - |G|^2}{|G|^2} E_3 \right).$$

Seja  $\mathbb{S}^2(1) = \left\{ v = \sum_{i=1}^3 v_i E_i : \sum_{i=1}^3 v_i^2 = 1 \right\}$  a esfera unitária na álgebra de Lie do grupo de Lie  $\mathcal{G}$  e

$$\pi : \mathbb{S}^2(1) \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$



a projeção estereográfica do pólo norte  $\pi(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2)/(1 - v_3)$ . Então, a composta de  $\pi$  com  $N$  é dada por:

$$\pi \circ N = \left( \operatorname{Re} \left( \frac{H}{G} \right), \operatorname{Im} \left( \frac{H}{G} \right) \right).$$

Se identificarmos  $\mathbb{R}^2$  com o plano complexo  $\mathbb{C}$  e estendemos  $\pi$  a uma aplicação  $\tilde{\pi} : \mathbb{S}^2(1) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , com  $\tilde{\pi}(0, 0, 1) = \infty$ , então

$$\pi \circ N = \frac{H}{G}.$$

Isto significa que a aplicação  $\tilde{g} = H/G$  pode ser identificada com a aplicação normal de Gauss da imersão  $f$ .

**Observação 1.2.2.** *A equação (1.7) tem a vantagem, com respeito à equação (1.4), de ser uma equação diferencial parcial com coeficientes constantes. Porém, ainda temos dificuldade em encontrar soluções explícitas de (1.7), enquanto temos que calcular os  $\phi_i$ 's e, para isto, temos que calcular as funções  $A_{ij}$  ao longo de  $f$ . Na próxima seção veremos como podemos superar estas dificuldades no caso de alguns espaços ambientes específicos.*

### 1.3 Superfícies mínimas no grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3$

Vamos considerar o grupo de Heisenberg 3-dimensional  $\mathbb{H}_3$ , representado em  $GL_3(\mathbb{R})$  pelas matrizes da forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ . Muniremos  $\mathbb{H}_3$  com a métrica Riemanniana invariante à esquerda definida por:

$$g = dx_1^2 + dx_2^2 + \left( dx_3 + \frac{x_2}{2} dx_1 - \frac{x_1}{2} dx_2 \right)^2.$$

Uma base ortonormal de campos vetoriais invariantes à esquerda, pode ser expressa com respeito aos campos vetoriais coordenados por:

$$\begin{cases} E_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{x_2}{2}, \\ E_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{x_1}{2}, \\ E_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{cases} \quad (1.11)$$

Observe que os colchetes de Lie são dados por:

$$[E_1, E_2] = E_3, \quad [E_1, E_3] = 0 = [E_2, E_3].$$

Com isto, obtemos que as únicas constantes de estrutura não nulas são  $C_{12}^3 = -C_{21}^3 = 1$ . Logo, os  $L_{ij}^k$ 's que não são nulos são dados por:

$$L_{12}^3 = L_{23}^1 = L_{32}^1 = 1, \quad L_{21}^3 = L_{13}^2 = L_{31}^2 = -1.$$

Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}_3$  uma imersão suave e considere

$$\Phi = \frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \psi_i E_i.$$

Das expressões dos campos invariantes dados em (1.11), encontramos que

$$\phi_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} \psi_j,$$

onde  $A = (A_{ij})$  é a matriz dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-x_2}{2} & \frac{x_1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Desenvolvendo a equação (1.7) podemos concluir que a seção  $\Phi$  é holomorfa se, e somente se, as seguintes equações se verificam

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} + \operatorname{Re}(\psi_2 \bar{\psi}_3) = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \operatorname{Re}(\psi_1 \bar{\psi}_3) = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} - i \operatorname{Im}(\psi_1 \bar{\psi}_2) = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Portanto, neste contexto o Teorema 1.2.1 assume a seguinte forma:

**Teorema 1.3.1** (Representação de Weierstrass no grupo de Heisenberg). *Sejam  $\psi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , funções complexas definidas em um aberto simplesmente conexo  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , que satisfazem as seguintes condições:*

$$1. \sum_{i=1}^3 \psi_i \bar{\psi}_i \neq 0;$$

$$2. \sum_{i=1}^3 \psi_i^2 = 0;$$

3.  $\psi_j$  são soluções do sistema (1.12).

Então, a aplicação  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}_3$ , cujas funções coordenadas são dadas por:

$$f_i(u, v) = 2 \operatorname{Re} \left( \int_{z_0}^z \sum_j A_{ij} \psi_j dz \right),$$

é uma imersão mínima conforme.

Observamos que o sistema (1.12) podem ser escrito em termos das funções  $G$  e  $H$  definidas em (1.9), da seguinte forma:

$$\begin{cases} G \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} - H \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = \operatorname{Im}(G \bar{H})(|G|^2 - |H|^2), \\ i \left( G \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + H \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \right) = \operatorname{Re}(G \bar{H})(|G|^2 - |H|^2), \\ H \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + G \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = \frac{-i}{2} (|G|^4 - |H|^4). \end{cases}$$

Note que, a terceira equação deste sistema é uma combinação das duas primeiras. De fato, multiplicando por  $i$  a primeira equação e somando à segunda, obtemos

$$2i \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} = (|G|^2 - |H|^2) \bar{H}. \quad (1.13)$$

Por outro lado, subtraindo  $i$  vezes a primeira equação da segunda, temos que

$$2i \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = (|G|^2 - |H|^2) \bar{G}. \quad (1.14)$$

Agora, de um cálculo direto segue-se que a terceira equação é dada pela equação (1.13) multiplicada por  $H$  mais a equação (1.14) multiplicada por  $G$ . Logo, o Teorema 1.3.1 se escreve como:

**Teorema 1.3.2.** *Sejam  $G$  e  $H$  funções complexas holomorfas definidas num domínio aberto simplesmente conexo  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , tais que:*

1.  $G$  e  $H$  não são identicamente nulas;
2.  $G$  e  $H$  são soluções de (1.13) e (1.14).

Então, a aplicação  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}_3$  definida por:

$$\begin{cases} f_1 = 2 \operatorname{Re} \left( \int_{z_0}^z (G^2 - H^2) dz \right), \\ f_2 = 2 \operatorname{Re} \left( i \int_{z_0}^z (G^2 + H^2) dz \right), \\ f_3 = 2 \operatorname{Re} \left( \int_{z_0}^z \left( 2GH - \frac{f_2}{2}(G^2 - H^2) + i \frac{f_1}{2}(G^2 + H^2) \right) dz \right), \end{cases} \quad (1.15)$$

é uma imersão mínima conforme em  $\mathbb{H}_3$ .

**Exemplo 1.3.3** (Planos verticais). *Sejam  $G$  e  $H$  duas soluções holomorfas não nulas das equações (1.13) e (1.14), ou seja*

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Então, resulta que  $|G| = |H|$ . Logo, as funções  $G$  e  $H$  diferem por um número complexo unitário, ou seja

$$H = e^{i\theta} G, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Substituindo nas equações (1.15), encontramos que a correspondente imersão mínima  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}_3$  tem funções coordenadas dadas por:

$$\begin{cases} f_1 = 2 \operatorname{Re} \left( (1 - e^{2i\theta}) \tilde{G} \right), \\ f_2 = 2 \operatorname{Re} \left( i(1 + e^{2i\theta}) \tilde{G} \right), \\ f_3 = 2 \operatorname{Re} \left( \int_{z_0}^z \left( 2e^{i\theta} G^2 - \frac{f_2}{2}(1 - e^{2i\theta})G^2 + i \frac{f_1}{2}(1 + e^{2i\theta})G^2 \right) dz \right), \end{cases}$$

onde  $\tilde{G} = \int_{z_0}^z G^2 dz$ .

Nas condições anteriores, é fácil ver que  $f_1 \cos \theta + f_2 \sin \theta = 0$  e, portanto, a imagem da imersão está contida num plano paralelo ao eixo  $x_3$  que forma um ângulo  $\theta$  com o plano  $x_1 = 0$ .

Neste exemplo a aplicação normal de Gauss  $\tilde{g} = H/G = e^{i\theta}$  tem posto zero e estas são as únicas superfícies mínimas de  $\mathbb{H}_3$  que possuem aplicação normal de Gauss de posto zero (ver, por exemplo, [16]).

**Exemplo 1.3.4** (Superfície tipo sela). Neste exemplo discutiremos o caso em que as funções complexas  $G$  e  $H$  são imaginárias puras e dependem só de uma variável, i.e.  $G(u, v) = i l(v)$  e  $H(u, v) = i h(v)$ , onde  $l$  e  $h$  são duas funções diferenciáveis a valores reais definidas num intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ .

Observe que podemos supor  $|H| \neq |G|$ , pois do contrário estaríamos no caso do exemplo anterior. Então, multiplicando a equação (1.13) por  $i\bar{G}$ , a equação (1.14) por  $i\bar{H}$  e comparando os resultados obtemos:

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \bar{G} = \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \bar{H}. \quad (1.16)$$

Substituindo as expressões de  $G$  e  $H$  na equação (1.16) temos que

$$l(v) l'(v) = h(v) h'(v),$$

onde  $'$  denota a derivada com relação a  $v$ . Logo, existe uma constante  $a \in \mathbb{R}$  tal que

$$l^2(v) - h^2(v) = 2a.$$

Considere, então, a função dada por  $q(v) = l^2(v) - a = h^2(v) + a$ . Temos que  $q' = 2l(v) l'(v)$  e, sendo que as funções  $G$  e  $H$  satisfazem (1.13) e (1.14), resulta que  $l'(v) = h(v) (l^2(v) - h^2(v))$  e

$$q' = 4a \sqrt{q^2 - a^2}. \quad (1.17)$$

Logo,

$$\phi_1 = -2a, \quad \phi_2 = -2i q$$

e, integrando, obtemos:

$$\begin{aligned} f_1 &= -2 \operatorname{Re} \int 2a \, dz = -4a u, \\ f_2 &= -2 \operatorname{Re} \int 2i q \, dz = 4Q(v), \end{aligned}$$

onde  $Q(v)$  é uma primitiva de  $q(v)$ .

Para determinar  $f_3$ , primeiro notemos que por integração da (1.17) obtemos que

$$\sqrt{q^2 - a^2} = 4a Q$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\phi_3 &= 2GH - \frac{f_2}{2}(G^2 - H^2) - i\frac{f_1}{2}(G^2 + H^2) \\ &= -2\sqrt{q^2 - a^2} + 4aQ(v) + 4iaqu \\ &= -4aQ(v) + 4iaqu.\end{aligned}\tag{1.18}$$

Integrando (1.18), segue que  $f_3 = -8a u Q(v)$ .

Note que, neste caso, a imagem da imersão  $f$  está contida no gráfico da função  $x_3 = (x_1 x_2)/2$ , ou seja é uma superfície regrada tipo sela. Além disso, o posto da sua aplicação de Gauss é 1, pois

$$\tilde{g} = H/G = \frac{h(v)}{l(v)}$$

depende somente de um parâmetro. Este exemplo de superfície mínima pode ser encontrado em [16].

**Exemplo 1.3.5** (Helicóides). Considere as funções  $G$  e  $H$  dadas por:

$$G(u, v) = l(u) e^{-i\frac{v}{2}}, \quad H(u, v) = i h(u) e^{i\frac{v}{2}},$$

onde  $l$  e  $h$  são funções diferenciáveis definidas num conjunto aberto de  $\mathbb{R}$ . Observe que

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \bar{G} &= \frac{1}{2} l l' + \frac{1}{4} l^2, \\ \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \bar{H} &= \frac{1}{2} h h' - \frac{1}{4} h^2.\end{aligned}$$

Assim, da equação (1.16), temos que

$$l^2 + (l^2)' = -h^2 + (h^2)'.\tag{1.19}$$

Então, existe uma função  $p(u)$  tal que as funções

$$l = \frac{\sqrt{p' - p}}{2}, \quad h = \frac{\sqrt{p' + p}}{2},$$

são soluções de (1.19). Usando (1.13) e (1.14) obtemos que  $p$  é uma solução da seguinte equação diferencial:

$$p'' - p = p \sqrt{(p')^2 - p^2},$$

a qual é equivalente a

$$\sqrt{(p')^2 - p^2} = \frac{p^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

A imersão mínima correspondente  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{H}_3$  possui funções coordenadas dadas por:

$$\begin{cases} f_1(u, v) = p(u) \cos(v), \\ f_2(u, v) = p(u) \sin(v), \\ f_3(u, v) = -cv + b, \quad b \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.20)$$

De fato, sendo

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{p'}{2} \cos(v) + i \frac{p}{2} \sin(v), \\ \phi_2 &= \frac{p'}{2} \sin(v) - i \frac{p}{2} \cos(v), \end{aligned}$$

integrando obtemos as expressões de  $f_1$  e  $f_2$  dadas em (1.20). Consequentemente,

$$\phi_3 = 2GH - \frac{f_2}{2}(G^2 - H^2) - i \frac{f_1}{2}(G^2 + H^2) = i \frac{c}{2}.$$

Observe que se  $c \neq 0$ , então (1.20) representa a parametrização de um helicóide, enquanto quando  $c = 0$ , o sistema (1.20) nos dá uma parametrização do plano horizontal  $x_3 = b$ .

**Exemplo 1.3.6** (Superfície tipo catenóide). Neste exemplo daremos as funções de Weierstrass  $G$  e  $H$  para a superfície tipo catenóide descrita em [16]. Considere

$$h = \sqrt{\frac{g^2 + 4}{g^2 - 4}}, \quad g^2 > 4,$$

onde  $g = g(u)$  é uma função a valores reais que é uma solução da equação diferencial ordinária

$$(g')^2 = \frac{g^2(g^4 - 16) - 4}{g^2 - 4}.$$

Então, as funções dadas por:

$$\begin{aligned} H &= \frac{i}{2} e^{i(v+\frac{l}{2})} \sqrt{g' + 2g \left(1 + i \frac{l'}{2}\right)}, \\ G &= \frac{1}{2} e^{-i(v+\frac{l}{2})} \sqrt{g' - 2g \left(1 + i \frac{l'}{2}\right)}, \end{aligned}$$

em que  $l = l(u)$  é uma função a valores reais, são soluções de (1.13) e (1.14) se

$$l' = \frac{2h}{g^2 + 4}.$$

Como

$$\begin{aligned} \phi_1 &= G^2 - H^2 = \frac{1}{4} \left( 2g' \cos(2v + l) + 4i g \sin(2v + l) - 2g l' \sin(2v + l) \right), \\ \phi_2 &= i(G^2 + H^2) = \frac{1}{2} \left( g' \sin(2v + l) - 2i g \cos(2v + l) + g l' \cos(2v + l) \right), \end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{aligned} f_1 &= g \cos(2v + l), \\ f_2 &= g \sin(2v + l). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \phi_3 &= 2G H - \frac{f_2}{2} \phi_1 + i \frac{f_1}{2} \phi_2 \\ &= \frac{2h(u)}{g^2 + 4} + \frac{1}{4} g^2 l' = \frac{2h}{4 + g^2} + \frac{1}{2} \frac{g^2 h}{g^2 + 4} \\ &= \frac{h}{2} \left( \frac{4 + g^2}{4 + g^2} \right) = \frac{h}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,  $f_3 = \tilde{h}$ , onde  $\tilde{h}$  é uma primitiva de  $h$ . Note que  $f$ , depois uma mudança de parâmetros, representa a parametrização do catenóide de revolução ao redor do eixo  $x_3$  descrito em [16].

## 1.4 Superfícies mínimas no espaço $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Considere o modelo do semi-plano superior do plano hiperbólico

$$\mathbb{H}^2 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0 \right\},$$

munido da métrica Riemanniana de curvatura Gaussiana constante  $-1$  dada por:

$$g_{\mathbb{H}^2} = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_2^2}.$$

O elemento  $(x_1, x_2) \in \mathbb{H}^2$  pode ser identificado com a função afim  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $h(t) = x_2 t + x_1$ , com  $x_2 > 0$ . Assim, o plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  admite uma estrutura de grupo

$$(x_1, x_2) * (x'_1, x'_2) = (x'_1 x_2 + x_1, x_2 x'_2),$$

que deriva da composição de aplicações próprias afins. Com esta estrutura,  $\mathbb{H}^2$  torna-se um grupo de Lie e a métrica  $g_{\mathbb{H}^2}$  definida acima é invariante à esquerda. Portanto, o espaço produto  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  é também um grupo de Lie com a estrutura produto dada por:

$$(x_1, x_2, x_3) * (x'_1, x'_2, x'_3) = (x'_1 x_2 + x_1, x_2 x'_2, x_3 + x'_3), \quad (1.21)$$

e a métrica  $g = g_{\mathbb{H}^2} + dx_3^2$  é invariante à esquerda.



Uma base ortonormal de campos invariantes à esquerda em  $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g)$  é dada por:

$$\begin{cases} E_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ E_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ E_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{cases} \quad (1.22)$$

Neste caso, a matriz definida em (1.5) assume a forma

$$A = \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Além disso, é fácil verificar que

$$[E_1, E_2] = -E_1, \quad [E_1, E_3] = 0 \quad \text{e} \quad [E_2, E_3] = 0.$$

Deste modo, as únicas constantes de estrutura da álgebra de Lie de  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , que não são nulas, são dadas por:

$$C_{12}^1 = C_{12}^2 = C_{12}^3 = -C_{21}^1 = -C_{21}^2 = -C_{21}^3 = -1.$$

Logo, de  $L_{ij}^k = \frac{1}{2}(C_{ki}^j - C_{jk}^i + C_{ji}^k)$ , obtemos  $L_{11}^2 = 1$ ,  $L_{12}^1 = -1$  e os outros  $L_{ij}^k$  são todos nulos. Consequentemente, podemos enunciar o seguinte resultado:

**Teorema 1.4.1** (Representação de Weierstrass no grupo  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{C}$  um domínio simplesmente conexo,  $z_0 \in \Omega$  e  $\psi_j : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , funções que verificam as seguintes condições:*

1.  $\sum_{i=1}^3 \psi_i \bar{\psi}_i \neq 0$ ;

2.  $\sum_{i=1}^3 \psi_i^2 = 0$ ;

3.  $\psi_3$  é holomorfa e  $\psi_1, \psi_2$  são soluções do sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi}_1 \psi_2 = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} + \|\psi_1\|^2 = 0. \end{cases} \quad (1.23)$$

Então, a aplicação  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , cujas funções coordenadas são definidas por:

$$f_i(u, v) = 2 \operatorname{Re} \left( \int_{z_0}^z \sum_{j=1}^3 A_{ij} \psi_j dz \right),$$

define uma imersão mínima conforme.

*Demonstração.* De acordo com (1.7), a seção  $\Phi = \psi_1 E_1 + \psi_2 E_2 + \psi_3 E_3$  é holomorfa se, e só se,

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \overline{\psi_1} \psi_2 = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} + \|\psi_1\|^2 = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} = 0. \end{cases}$$

Então, o resultado segue direto do Teorema 1.2.1. □

Observe que, pondo

$$\tilde{f}_2 := 2 \operatorname{Re} \left( \int_{z_0}^z \psi_2 dz \right),$$

podemos escrever

$$f(u, v) = \left( 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z e^{\tilde{f}_2} \psi_1 dz, e^{\tilde{f}_2}, 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \psi_3 dz \right).$$

No que segue, iremos considerar alguns exemplos de superfícies mínimas em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ .

**Exemplo 1.4.2.** Se  $\psi_2$  é uma função holomorfa, então do sistema (1.23) temos que  $\psi_1$  é identicamente nula e a correspondente imersão é uma parametrização mínima do plano vertical  $x_1 = \text{constante}$ .

Agora, se  $\psi_1$  e  $\psi_2$  não são holomorfas, então de (1.23) resulta que  $\psi_1^2 + \psi_2^2$  é holomorfa. A última condição é certamente satisfeita se  $\psi_1^2 + \psi_2^2 = a$ , para alguma constante  $a \in \mathbb{R}$ . Examinaremos os casos que seguem.

- Se  $a = 0$ , de  $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 = 0$ , temos que  $\psi_3 = 0$  e a imersão mínima correspondente representa o plano horizontal  $x_3 = \text{constante}$ .

- Suponha  $a = -1$ . Neste caso, decompondo  $\psi_1, \psi_2$  nas suas partes reais e imaginárias:

$$\psi_1(u, v) = a_1(u, v) + i a_2(u, v), \quad \psi_2(u, v) = a_3(u, v) + i a_4(u, v),$$

a condição  $\psi_1^2 + \psi_2^2 = -1$  equivale ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 = -1, \\ a_1 a_2 + a_3 a_4 = 0. \end{cases} \quad (1.24)$$

Escolhendo como solução da segunda equação de (1.24)

$$\begin{cases} a_1(u, v) = \sin(2v) a_4(u, v), \\ a_3(u, v) = -\sin(2v) a_2(u, v) \end{cases}$$

e usando (1.23), temos que as funções  $a_1$  e  $a_2$  são soluções de:

$$\left( \frac{\partial a_1}{\partial u} - \frac{\partial a_2}{\partial v} \right) \left( \frac{\partial a_1}{\partial v} - \frac{\partial a_2}{\partial u} \right) = 4 a_1 a_2.$$

A solução da equação acima é dada por:

$$a_1 = \frac{2(\cos(2u) + \sin(2v)) \tan(2v)}{2 - \sin(2(u-v)) + \sin(2(u+v))}, \quad a_2 = \frac{2 \sin(2u)}{-2 + \sin(2(u-v)) - \sin(2(u+v))}.$$

Portanto, integrando, encontramos que

$$\begin{cases} f_1(u, v) = \frac{2 \sin(2u) \tan v}{\sin^2(2u) \tan^2 v + (1 + \cos(2u) \tan v)^2}, \\ f_2(u, v) = \frac{1 - \tan^2 v}{2 \sin^2(2u) \tan^2 v + (1 + \cos(2u) \tan v)^2}, \\ f_3(u, v) = 2u. \end{cases}$$

Por fim, seja  $\tilde{\alpha} : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{H}^2$  a isometria usual do disco hiperbólico  $\mathbb{I} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  em  $\mathbb{H}^2$ , definida por:

$$\tilde{\alpha}(a, b) = \left( \frac{-2b}{(a+1)^2 + b^2}, \frac{b^2 + (1-a)(-a-1)}{(a+1)^2 + b^2} \right).$$

Definindo  $\alpha : \mathbb{I} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  por  $\alpha(x, y, z) = (\tilde{\alpha}(x, y), z)$ , então a imersão  $f$  é dada pela composição  $\alpha \circ \tilde{f}$ , onde

$$\tilde{f}(u, v) = (\tan v \cos(2u), \tan v \sin(2u), 2u)$$

é a imersão mínima de um helicóide em  $\mathbb{I} \times \mathbb{R}$  descrita em [27].

## 1.5 O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^3$

O espaço hiperbólico tridimensional  $\mathbb{H}^3$  pode ser modelado pelo semi-espaço:

$$\mathbb{R}_+^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0 \right\},$$

dotado da métrica:

$$g = \frac{1}{x_3^2} \left( dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \right), \quad (1.25)$$

A métrica de curvatura constante (1.25) é invariante à esquerda com respeito a estrutura de grupo de Lie. Além disso, uma base de campos ortonormais invariantes à esquerda com respeito à métrica (1.25) é dada por:

$$E_1 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad E_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad E_3 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Ao computarmos os colchetes de Lie, obtemos que as únicas constantes de estruturas distintas de zero são:

$$C_{13}^1 = C_{23}^2 = -1, \quad C_{31}^1 = C_{32}^2 = 1.$$

Neste caso, desenvolvendo o sistema obtido em (1.7), obtemos:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \psi_3 \bar{\psi}_1 = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \psi_3 \bar{\psi}_2 = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} + (\psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2) = 0. \end{cases}$$

É fácil ver que

$$\phi_a(u, v) = x_3 \psi_a(u, v), \quad a = 1, 2, 3.$$

Em particular, como

$$f_3 = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f_3 \psi_3 dz,$$

obtemos que:

$$f_3 = \exp \left( 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \psi_3 dz \right).$$

Então, a imersão  $f$ , expressada em termos das componentes  $\psi_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ , é dada por:

$$f(z) = \left( 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f_3 \psi_1 dz, 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f_3 \psi_2 dz, f_3 \right).$$

---

## Representação de Weierstrass no espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^3$

---

Este capítulo é dedicado ao estudo de uma representação de tipo-Weierstrass para superfícies mínimas de tipo espaço e de tipo tempo no espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^3$ , que é dado por  $\mathbb{R}^3$  munido da métrica pseudo-Riemanniana  $g = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$ .

No espaço  $\mathbb{L}^3$  uma fórmula de representação tipo-Weierstrass foi provada por O. Kobayashi em [18], no caso das imersões mínimas de tipo espaço, e por J. Konderak (ver [20]) no caso das imersões mínimas de tipo tempo. Na demonstração destas fórmulas se utilizam as ferramentas da análise complexa e paracomplexa, respectivamente. Recentemente, estes resultados têm sido generalizados por J.H. Lira et al. em [22], para o caso de superfícies mínimas imersas em 3-variedades Lorentzianas.

Antes da exposição dos resultados obtidos por Kobayashi e Konderak, será preciso fazer uma introdução ao espaço de Lorentz-Minkowski e, também, lembrar de alguns conceitos e resultados referentes à geometria diferencial de curvas e superfícies neste ambiente (ver [2] e [23]).

## 2.1 O espaço de Lorentz-Minkowski

O espaço de Lorentz-Minkowski tridimensional  $\mathbb{L}^3$  é o espaço  $\mathbb{R}^3$  equipado com a seguinte métrica Lorentziana:

$$g = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2.$$

Um vetor  $v \in \mathbb{L}^3$  é dito

1. de *tipo tempo*, se  $\langle v, v \rangle < 0$ ,
2. de *tipo espaço*, se  $\langle v, v \rangle > 0$  ou  $v = 0$ ,
3. de *tipo luz*, se  $\langle v, v \rangle = 0$  e  $v \neq 0$ .

Portanto, podemos considerar o conjunto dos vetores de tipo tempo, o conjunto dos vetores de tipo luz (também conhecido como *cone de luz*) e o dos vetores de tipo espaço que são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} T &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0\}; \\ C &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\} - \{(0, 0, 0)\}; \\ E &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 > 0\} \cup \{(0, 0, 0)\}. \end{aligned}$$

O comprimento de um vetor  $v \in \mathbb{L}^3$  é dado por  $|v| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$  e  $v$  é dito *unitário* se  $|v| = 1$ .

A proposição a seguir relaciona a dimensão de um subespaço não degenerado de  $\mathbb{L}^3$  com as dimensões de seu complemento ortogonal e do espaço ambiente.

**Proposição 2.1.1.** *Seja  $U$  um subespaço de  $\mathbb{L}^3$ . Então, temos que:*

- (i)  $\dim(U^\perp) = \dim(\mathbb{L}^3) - \dim(U)$ ;
- (ii)  $(U^\perp)^\perp = U$ ;
- (iii) se  $U$  é não degenerado,  $U^\perp$  é também não degenerado.

*Demonstração.* Ver [23]. □

**Definição 2.1.2.** *Seja  $U$  um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ . Então,  $U$  é chamado de tipo espaço (respectivamente, de tipo tempo ou de tipo luz), se a métrica induzida pela métrica de Minkowski neste subespaço é definida positiva (respectivamente, não degenerada; degenerada e  $U \neq \{0\}$ ).*

Daremos, agora, caracterizações dos subespaços de  $\mathbb{L}^3$  dependendo de seu caráter causal.

**Proposição 2.1.3.** *Seja  $v \in \mathbb{L}^3$ . Então,  $v$  é de tipo tempo se, e somente se,  $\langle v \rangle^\perp$  é de tipo espaço e, assim,  $\mathbb{L}^3 = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp$ . Além disso, para vetores de tipo espaço, temos que  $v$  é de tipo espaço se, e só se,  $\langle v \rangle^\perp$  é de tipo tempo.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que os vetores que compõem a base de  $\langle v \rangle^\perp$  são vetores de tipo espaço. Pela definição temos que  $U = \langle v \rangle$  é um subespaço não degenerado, então da Proposição 2.1.1 temos que  $U^\perp$  também é não degenerado. Logo  $U^\perp$  não é de tipo luz. Suponha por contradição, que existe  $u \in U^\perp$  de tipo tempo, tal que  $\langle u, v \rangle = 0$ . Considere os vetores  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$  e seja  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$  uma base ortonormal de  $\mathbb{L}^3$ . Escrevendo  $u$  e  $v$  nesta base:

$$u = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$

$$v = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3,$$

por  $u$  e  $v$  serem vetores de tipo tempo e ainda serem ortogonais, obtemos:

$$a_1^2 + a_2^2 < a_3^2,$$

$$b_1^2 + b_2^2 < b_3^2,$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = a_3 b_3.$$

Com isto, resulta que

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 < 0,$$

o que é um absurdo. Logo,  $u$  é um vetor de tipo espaço. Então, ao considerarmos  $\{u_1, u_2\}$  como base ortonormal de  $U^\perp$  e  $v$ , obtemos três vetores ortogonais, linearmente independentes e, assim, formam uma base de  $\mathbb{L}^3$ , portanto  $\mathbb{L}^3 = \langle v \rangle \oplus \langle v \rangle^\perp$ . Reciprocamente, se  $\langle v \rangle^\perp$  é um subespaço de tipo espaço, então  $v$  seria o complemento da base de  $\mathbb{L}^3$  e obrigatoriamente seria um vetor de tipo tempo, pois do contrário teríamos três vetores linearmente independentes de tipo espaço.

De maneira análoga pode se mostrar que  $v$  é um vetor de tipo espaço se, e somente se,  $\langle v \rangle^\perp$  é um subespaço de tipo tempo. □

Na seguinte proposição daremos uma relação entre o caráter causal de um subespaço de  $\mathbb{L}^3$  com o de seu espaço ortogonal.

**Proposição 2.1.4.** *Considere um subespaço  $U \subset \mathbb{L}^3$ . Então, temos que:*

(i)  *$U$  é de tipo espaço se, e só se,  $U^\perp$  é de tipo tempo;*

(ii)  *$U$  é de tipo luz se, e só se,  $U^\perp$  é de tipo luz.*

*Demonstração.* Se  $U$  é de tipo espaço, então existe  $u \in U$  que é de tipo espaço e, pela Proposição 2.1.3,  $\langle u \rangle^\perp$  é um subespaço de tipo tempo. Como  $U^\perp$  está contido em  $\langle u \rangle^\perp$ , temos que  $U^\perp$  é de tipo tempo. Reciprocamente, se  $U^\perp$  é de tipo tempo, então existe  $v \in U^\perp$  que é de tipo tempo, assim  $\langle v \rangle^\perp$  é um subespaço de tipo espaço e, como  $U$  está contido em  $\langle v \rangle^\perp$ , temos que  $U$  é de tipo espaço.

Para provar o segundo item, suponha que  $U^\perp$  seja um subespaço de tipo tempo. Então, do primeiro item, temos que  $U$  é de tipo espaço, o que é uma contradição. Se supormos que  $U^\perp$  seja um subespaço de tipo espaço, também obteremos uma contradição. A recíproca é análoga, basta usar que  $(U^\perp)^\perp = U$ .  $\square$

O resultado que segue caracteriza dois vetores de tipo luz que são linearmente dependentes.

**Proposição 2.1.5.** *Se  $u$  e  $v$  são dois vetores de tipo luz, então eles são linearmente dependentes se, e somente, se  $\langle u, v \rangle = 0$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $u$  e  $v$  são linearmente dependentes, então  $u = \alpha v$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Logo,

$$\langle u, v \rangle = \langle \alpha v, v \rangle = \alpha \langle v, v \rangle = 0.$$

Reciprocamente, sejam  $u$  e  $v$  vetores de tipo luz ortogonais, isto é,  $\langle u, v \rangle = 0$ . Considere a decomposição de  $\mathbb{L}^3$  dada por:

$$\mathbb{L}^3 = \langle e_3 \rangle^\perp \oplus \langle e_3 \rangle,$$

onde  $e_3 = (0, 0, 1)$ . Escrevendo  $u = x + a e_3$  e  $v = y + b e_3$ , pelas condições sobre  $u$  e  $v$  obtemos:

$$a = \pm|x|, \quad b = \pm|y|, \quad \langle x, y \rangle = |x| |y|. \quad (2.1)$$



Observe que  $\langle e_3 \rangle^\perp$  é de tipo espaço. Logo,  $g|_{\langle e_3 \rangle^\perp}$  é positiva definida e, portanto, vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz a qual, aplicada a (2.1), nos diz que  $x$  e  $y$  são linearmente dependentes, ou seja

$$x = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Consequentemente,

$$u = a e_3 + x = \pm |x| e_3 + x = \pm |\lambda| |y| e_3 + \lambda y = |\lambda| b e_3 + \lambda y. \quad (2.3)$$

Note que  $\lambda \geq 0$ . De fato, pelas equações (2.1) e (2.2) e do fato de  $x$  e  $y$  serem de tipo espaço, temos que

$$\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} = \frac{|x| |y|}{\langle y, y \rangle} > 0.$$

Portanto  $|\lambda| = \lambda$ . Substituindo em (2.3), resulta que  $u$  e  $v$  são linearmente dependentes.

Se, porém,  $a$  e  $b$  têm sinais contrários, concluímos que

$$-\langle x, y \rangle = |x| |y|.$$

Como  $|x| = |-y|$ , segue que

$$-\langle -x, y \rangle = |-x| |y|.$$

Sendo  $-x$  de tipo espaço, ao aplicarmos Cauchy-Schwarz (assim como foi feito antes), tem-se que  $-x$  e  $y$  são linearmente dependentes, de onde segue que  $u$  e  $v$  são linearmente dependentes.  $\square$

Iremos, agora, caracterizar os subespaços de tipo tempo.

**Proposição 2.1.6.** *Seja  $U \subset \mathbb{L}^3$  um subespaço bidimensional. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $U$  é um subespaço de tipo tempo,
2.  $U$  contém dois vetores linearmente independentes de tipo luz,
3.  $U$  contém um vetor de tipo tempo.

*Demonstração.* Provemos que o primeiro item implica o segundo. Sendo  $U$  de tipo tempo, existe uma base ortonormal  $\{e_2, e_3\}$  de  $U$  tal que  $e_2$  é de tipo espaço e  $e_3$  um vetor de tipo tempo. Então,  $e_2 + e_3$  e  $e_2 - e_3$  são vetores de tipo luz que são linearmente independentes pois  $\langle e_2 + e_3, e_2 - e_3 \rangle \neq 0$ .

Agora vamos mostrar que o segundo item implica o terceiro. Se  $u$  e  $v$  são dois vetores linearmente independentes de tipo luz, então  $u + v$  (ou  $u - v$ ) é de tipo tempo, já que

$$\langle u + v, u + v \rangle = 2\langle u, v \rangle, \quad \langle u - v, u - v \rangle = -2\langle u, v \rangle$$

e, pela Proposição 2.1.5, temos que  $\langle u, v \rangle \neq 0$ .

Por fim, provaremos que o terceiro item implica o primeiro. Seja  $v \in U$  um vetor de tipo tempo. Então,  $U^\perp \subset \langle v \rangle^\perp$  que é um subespaço de tipo espaço. Logo,  $U$  é um subespaço de tipo tempo.  $\square$

A proposição acima nos diz que, se existe um vetor de tipo tempo  $u$  e um vetor de tipo luz  $v$  em um subespaço bidimensional  $U \subset \mathbb{L}^3$ , necessariamente existe um outro vetor de tipo luz  $w$  de forma que  $u$  e  $w$  são linearmente independentes. Portanto,  $U$  é um subespaço de tipo tempo. O caso em que  $U \subset \mathbb{L}^3$  possui apenas um vetor de tipo luz e não existe nenhum vetor de tipo tempo é abordado a seguir:

**Proposição 2.1.7.** *Seja  $U$  um subespaço de  $\mathbb{L}^3$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $U$  é um subespaço de tipo luz,
2.  $U$  contém um vetor de tipo luz, mas nenhum vetor de tipo tempo,
3.  $U \cap C = L - \{(0, 0, 0)\}$  e  $\dim(L) = 1$ .

*Demonstração.* Para provar que o primeiro item implica o segundo, basta observar que se  $U$  é um subespaço de tipo luz, então contém um vetor de tipo luz. Assim, pela Proposição 2.1.6 não existe nenhum vetor de tipo tempo em  $U$ .

Agora, provaremos que o segundo item implica o primeiro. Como existe um vetor de tipo luz em  $U$ , então  $U \cap C$  é um conjunto não vazio. Se  $U$  contém dois vetores de tipo luz linearmente independentes, pela Proposição 2.1.6, existe um vetor de tipo tempo, o que nos resulta numa contradição. Portanto  $U \cap C = L - \{(0, 0, 0)\}$  e  $\dim(L) = 1$ .

Por fim, para mostrarmos que o terceiro item implica o primeiro, basta observar que se  $U \cap C = L - \{(0, 0, 0)\}$  e  $\dim(L) = 1$ , da Proposição 2.1.6 temos que  $U$  não é um subespaço de tipo tempo. Também  $U$  não pode ser um subespaço de tipo espaço, pois existe um vetor de tipo luz em  $U$ . Portanto  $U$  é um subespaço de tipo luz.  $\square$

**Proposição 2.1.8.** *Seja  $P$  um plano de  $\mathbb{L}^3$ . Denotemos por  $n$  um vetor ortogonal com relação à métrica Euclidiana. Então,  $P$  é de tipo espaço (respectivamente, de tipo tempo ou de tipo luz) se, e somente se,  $n$  é um vetor de tipo tempo (respectivamente, de tipo espaço ou de tipo luz).*

*Demonstração.* Supondo que  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$ , então  $n$  é proporcional ao vetor  $(a, b, c)$ . Podemos também escrever  $P$  da seguinte forma:

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = ax + by - (-cz) = 0\} = \langle (a, b, -c) \rangle^\perp.$$

Observe, que o caráter causal de  $(a, b, -c)$  é o mesmo que o do vetor  $n$ . Portanto, segue o resultado.  $\square$

**Proposição 2.1.9.** *Se  $P$  é um plano de tipo espaço e  $P = \langle v \rangle^\perp$ , com  $\langle v, v \rangle = -1$ , temos que:*

$$|v|_e \geq 1,$$

onde o sub-índice  $e$  indica que os cálculos são feitos com relação à métrica Euclidiana de  $\mathbb{R}^3$ .

*Demonstração.* Escrevendo  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$ , com  $n = (a, b, c)$  e  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , resulta que  $P = \langle v \rangle^\perp$ , onde

$$v = \frac{(a, b, -c)}{\sqrt{c^2 - b^2 - a^2}}$$

e satisfaz  $\langle v, v \rangle = -1$ . Calculando a norma Euclidiana de  $v$ , tem-se:

$$|v|_e = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{c^2 - b^2 - a^2} = \frac{1}{c^2 - b^2 - a^2} \geq 1.$$

$\square$

Agora, iremos definir o produto vetorial no espaço de Lorentz-Minkowski.

**Definição 2.1.10.** *Sejam  $u$  e  $v$  vetores de  $\mathbb{L}^3$ , definimos o produto vetorial de  $u$  e  $v$  como sendo o único vetor, denotado por  $u \wedge v$ , que satisfaz:*

$$\langle u \wedge v, w \rangle = \det(u, v, w) \quad (2.4)$$

ou, equivalentemente,

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & -k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

**Proposição 2.1.11.** *O produto vetorial em  $\mathbb{L}^3$  satisfaz as seguintes propriedades:*

1.  $u \wedge v = -v \wedge u$ ;
2.  $u \wedge v$  é ortogonal aos vetores  $u$  e  $v$ ;
3.  $u \wedge v = 0$  se, e somente se,  $u$  e  $v$  são proporcionais;
4.  $u \wedge v \neq 0$  pertence ao plano  $P = \langle u, v \rangle$  se, e somente se, o plano  $P$  é de tipo luz.

*Demonstração.* As primeiras três afirmações seguem direto das propriedades do determinante. O último item segue das Proposições 2.1.5 e 2.1.7.  $\square$

## 2.2 Curvas no espaço de Minkowski

Nesta seção iremos desenvolver a teoria do triedro de Frenet para curvas em  $\mathbb{L}^3$ . Iniciamos com a seguinte:

**Definição 2.2.1.** *Uma curva parametrizada em  $\mathbb{L}^3$  é uma aplicação diferenciável  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$ , onde  $I$  é um intervalo aberto da reta real. Além disso,  $\alpha$  é chamada:*

- (i) de tipo espaço, se  $\alpha'(t)$  é de tipo espaço, para todo  $t \in I$ ;
- (ii) de tipo tempo, se  $\alpha'(t)$  é de tipo tempo, para todo  $t \in I$ ;
- (iii) de tipo luz, se  $\alpha'(t)$  é de tipo luz, para todo  $t \in I$ .

**Observação 2.2.2.** Em geral, uma curva em  $\mathbb{L}^3$  não é de nenhum dos tipos acima. Considere, por exemplo, a curva parametrizada por  $\alpha(t) = (\cosh t, t^2, \sinh t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Como  $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 4t^2 - 1$ , então a curva é de tipo espaço no intervalo  $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, \infty)$ , é de tipo luz para  $t = \pm 1/2$  e de tipo tempo no intervalo  $(-1/2, 1/2)$ .

Claramente se a curva  $\alpha$  é de tipo espaço (respectivamente, de tipo tempo) no ponto  $t_0 \in I$ , então existe um intervalo  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  em que  $\alpha$  é de tipo espaço (respectivamente, de tipo tempo).

No espaço de Minkowski a definição de curva regular é a mesma de  $\mathbb{R}^3$  pois a regularidade não depende da métrica.

**Definição 2.2.3.** Uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$  é chamada regular se  $\alpha'(t) \neq 0$ , para todo  $t \in I$ .

Temos o seguinte resultado:

**Proposição 2.2.4.** Toda curva de tipo luz ou de tipo tempo é regular.

*Demonstração.* Seja  $\alpha$  uma curva em  $\mathbb{L}^3$  parametrizada por  $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ ,  $t \in I$ . Se  $\alpha$  é de tipo luz, temos que  $x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 - x_3'(t)^2 = 0$ . Então  $x_3'(t) \neq 0$ , do contrário  $x_1'(t) = x_2'(t) = 0$ , o que implica que  $\alpha'(t) = 0$ , o que significa que  $\alpha$  é de tipo espaço para todo  $t \in I$ . Portanto,  $x_3'(t) \neq 0$  e, assim,  $\alpha$  é regular.

No caso em que  $\alpha$  é de tipo tempo, resulta que  $x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 - x_3'(t)^2 < 0$ , logo  $x_3'(t) \neq 0$  e, então,  $\alpha$  é uma curva regular.  $\square$

No espaço Euclidiano, toda curva regular pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco, i.e.  $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 1$ . Veremos que o mesmo resultado vale para curvas de tipo espaço e de tipo tempo em  $\mathbb{L}^3$ .

**Proposição 2.2.5.** Toda curva regular  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$ , de tipo tempo ou de tipo espaço, pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.

*Demonstração.* Considere a função comprimento de arco com origem em  $t_0 \in I$ , definida por:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du, \quad t \in I.$$

Note que,

$$s'(t) = |\alpha'(t)| > 0,$$

para todo  $t \in I$ , pois  $\alpha$  é uma curva regular de tipo tempo ou de tipo espaço. Assim,  $s$  é um difeomorfismo sobre  $J := s(I)$ . Seja  $h := s^{-1}$  e  $\beta := \alpha \circ h$ . Temos que  $|\beta'(s)| = 1$ , para todo  $s \in J$ , o que termina a prova.  $\square$

Para uma curva  $\alpha$  de tipo luz, como o vetor  $\alpha'(t)$  é de tipo luz, não faz sentido reparametrizar por comprimento de arco. Entretanto, derivando  $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ , temos que  $\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ . Supondo que  $\alpha''(t) \neq 0$ , então  $\alpha''(t)$  não é proporcional a  $\alpha'(t)$ . Logo, pela Proposição 2.1.5 temos que  $\alpha''(t)$  não é de tipo luz. Além disto, como  $\langle \alpha'(t) \rangle^\perp$  é de tipo luz, a Proposição 2.1.7 afirma que  $\langle \alpha'(t) \rangle^\perp$  não possui nenhum vetor de tipo tempo. Portanto, segue que  $\alpha''(t)$  é de tipo espaço.

Para curvas de tipo luz podemos enunciar o seguinte resultado:

**Proposição 2.2.6.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma curva de tipo luz em  $\mathbb{L}^3$ . Então, existe uma reparametrização da curva  $\alpha$ , dada por  $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$ , de maneira que  $|\beta''(s)| = 1$ . Neste caso, diremos que a curva é pseudo-parametrizada pelo comprimento de arco.*

*Demonstração.* Vamos escrever  $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$ , onde  $\phi$  é a função a ser determinada. Por diferenciação, temos que

$$\beta''(s) = \phi''(s) \alpha'(\phi(s)) + [\phi'(s)]^2 \alpha''(\phi(s)).$$

Assim,

$$|\langle \beta''(s), \beta''(s) \rangle| = [\phi'(s)]^4 |\alpha''(\phi(s))|^2.$$

Então, para ter  $|\beta''(s)| = 1$  definimos  $\phi$  como a solução da seguinte equação diferencial:

$$\phi'(s) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha''(\phi(s))|}}, \quad \phi(0) = t_0.$$

$\square$

## 2.2.1 As equações de Frenet

No que segue, construiremos em todo ponto de uma curva regular de  $\mathbb{L}^3$  uma base ortonormal que descreve a geometria da curva e constitui o *triedro de Frenet*. A variação desta base ao longo

da curva nos fornece informações de como a curva se deforma no espaço ambiente. Ressaltamos que iremos considerar apenas curvas que são parametrizadas pelo comprimento de arco ou pelo pseudo-comprimento de arco.

Seja, então,  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma curva nestas condições. Definimos  $t(s) := \alpha'(s)$  como sendo o *vetor tangente* em  $s \in I$ . Observe que  $\langle t(s), t'(s) \rangle = 0$ ,  $s \in I$ . Vamos supor que  $t'(s) \neq 0$  e que  $t'(s)$  não seja proporcional a  $t(s)$ , para todo  $s \in I$ .

## Curvas de tipo tempo

Se  $\alpha$  é uma curva de tipo tempo (i.e.  $\langle t(s), t(s) \rangle = -1$ ), então  $t'(s) \neq 0$  é um vetor de tipo espaço linearmente independente com  $t(s)$ . Assim, definimos a *curvatura* de  $\alpha$  em  $s \in I$  como  $\kappa(s) := |t'(s)|$ , enquanto o *vetor normal*  $n(s)$  é definido por:

$$n(s) := \frac{t'(s)}{\kappa(s)} = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}.$$

Além disso,  $b(s) = t(s) \wedge n(s)$  é dito *vetor binormal* no ponto  $s$ . Observe que este último é um vetor unitário de tipo espaço, já que  $b(s) \in \langle t(s) \rangle^\perp$  e este é um subespaço de tipo espaço. Portanto, para cada  $s \in I$ ,  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  é uma base ortonormal de  $\mathbb{L}^3$  que é chamada de *triedro de Frenet* de  $\alpha$  no ponto  $s$ . Além disso, definimos a *torção* de  $\alpha$  em  $s$  como sendo:

$$\tau(s) = \langle n'(s), b(s) \rangle.$$

Diferenciando as funções vetoriais do triedro de Frenet, obtemos que as *equações Frenet* para uma curva  $\alpha$  de tipo tempo em  $\mathbb{L}^3$  são dadas por:

$$\begin{cases} t'(s) = \kappa(s) n(s), \\ b'(s) = -\tau(s) n(s), \\ n'(s) = \tau(s) b(s) + \kappa(s) t(s), \end{cases} \quad s \in I.$$

## Curvas de tipo espaço

Suponha, agora, que a curva  $\alpha$  seja de tipo espaço e parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja  $\langle t(s), t(s) \rangle = 1$ ,  $s \in I$ . Como  $t'(s)$  é ortogonal ao vetor  $t(s)$  onde este é de tipo espaço, devemos considerar os três casos abaixo.

1) O vetor  $t'(s)$  é de tipo tempo. Definimos a *curvatura* de  $\alpha$  no ponto  $s \in I$  como sendo  $\kappa(s) := |t'(s)| = -\sqrt{\langle t'(s), t'(s) \rangle}$ , o *vetor normal* por:

$$n(s) = \frac{t'(s)}{\kappa(s)}$$

e o *vetor binormal* por  $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ . Assim,  $n$  é um vetor de tipo tempo e  $b$  é um vetor de tipo espaço. Por cálculos simples, obtemos que as equações de Frenet para este caso são dada por:

$$\begin{cases} t'(s) = \kappa(s) n(s), \\ n'(s) = \tau(s) b(s) + \kappa(s) t(s), \\ b'(s) = \tau(s) n(s), \end{cases} \quad s \in I$$

e a *torção* de  $\alpha$  em  $s \in I$  é  $\tau(s) = \langle n'(s), b(s) \rangle$ .

2) Se o vetor  $t'(s)$  é de tipo espaço, definimos a *curvatura* de  $\alpha$  em  $s \in I$  como  $\kappa(s) = |t'(s)|$ , o *vetor normal* por

$$n(s) := \frac{t'(s)}{\kappa(s)}$$

e o *vetor binormal* por  $b(s) := t(s) \wedge n(s)$ . Consequentemente,  $n$  é um vetor de tipo espaço e  $b$  é de tipo tempo. Logo, as equações de Frenet para este caso são dadas por:

$$\begin{cases} t'(s) = \kappa(s) n(s), \\ n'(s) = \tau(s) b(s) - \kappa(s) t(s), \\ b'(s) = \tau(s) n(s), \end{cases} \quad s \in I,$$

e a *torção* de  $\alpha$  em  $s \in I$  é  $\tau(s) = -\langle n'(s), b(s) \rangle$ .

3) O vetor  $t'(s) \neq 0$  é de tipo luz. Neste caso, definimos o *vetor normal*  $n(s) := t'(s)$ , que é linearmente independente com  $t(s)$ . Como  $\alpha$  é uma curva de tipo espaço, temos  $\langle t(s) \rangle^\perp$  é um subespaço de tipo tempo e, pela Proposição 2.1.6, admite dois vetores de tipo luz, linearmente independentes, que não são ortogonais. Como  $n(s)$  é de tipo luz, defina o *vetor binormal*  $b(s) \in \langle t(s) \rangle^\perp$  como o único vetor de tipo luz tal que  $\langle n(s), b(s) \rangle = 1$ . Além disso, defina a *pseudo-torção* de  $\alpha$  como sendo  $\tau(s) := \langle n'(s), b(s) \rangle$ . Neste caso não temos uma definição para a curvatura e as equações de Frenet são dadas por:

$$\begin{cases} t'(s) = n(s), \\ n'(s) = \tau(s) n(s), \\ b'(s) = -t(s) - \tau(s) b(s), \end{cases} \quad s \in I.$$



## Curvas de tipo luz

Seja, agora,  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma curva de tipo luz parametrizada pelo pseudo-comprimento de arco, ou seja,  $\alpha''(s)$  é um vetor unitário de tipo espaço, para todo  $s \in I$ . Definimos  $n(s) := t'(s)$  como sendo o *vetor normal* a  $\alpha$  em  $s \in I$ , e o *vetor binormal*  $b(s)$  como o único vetor de tipo luz, ortogonal a  $n(s)$ , de forma que  $\langle t(s), b(s) \rangle = 1$ . Analogamente ao caso em que  $\alpha$  é de tipo espaço com  $t'(s)$  de tipo luz, não definimos a curvatura de  $\alpha$ . Já a *torção* de  $\alpha$  em  $s \in I$  é dada por  $\tau(s) = \langle n'(s), b(s) \rangle$ .

Vamos, agora, encontrar as equações de Frenet. Sendo  $\langle t(s), b(s) \rangle = 1$ ,  $s \in I$ , resulta que:

$$0 = \langle t'(s), b(s) \rangle + \langle t(s), b'(s) \rangle = \langle n(s), b(s) \rangle + \langle t(s), b'(s) \rangle = \langle t(s), b'(s) \rangle, \quad s \in I.$$

Como  $b(s)$  é de tipo luz, resulta que  $\langle b(s), b'(s) \rangle = 0$  e podemos escrever  $b'(s) = a n(s) + c t(s)$ . Logo,  $a = -\tau$  e  $c = 0$ , ou ainda,

$$b'(s) = -\tau(s) n(s), \quad s \in I. \quad (2.5)$$

De  $\langle n(s), b(s) \rangle = 0$ ,  $\langle b(s), b'(s) \rangle = 0$  e da equação (2.5), obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle n'(s), b(s) \rangle + \langle n(s), b'(s) \rangle = \langle n'(s), b(s) \rangle - \tau(s) \langle n(s), n(s) \rangle + \langle b(s), b(s) \rangle \\ &= \langle n'(s), b(s) \rangle - \langle \tau(s) t(s), b(s) \rangle + \langle b(s), b(s) \rangle \\ &= \langle n'(s) - \tau(s) t(s) + b(s), b(s) \rangle, \quad s \in I. \end{aligned}$$

Logo,  $n'(s) = \tau(s) t(s) - b(s)$ ,  $s \in I$ . Consequentemente, as equações de Frenet para uma curva de tipo luz em  $\mathbb{L}^3$  são dadas por:

$$\begin{cases} t'(s) = n(s), \\ n'(s) = \tau(s) t(s) - b(s), \\ b'(s) = -\tau(s) n(s), \end{cases} \quad s \in I.$$

## 2.3 Superfícies em $\mathbb{L}^3$

Seja  $M$  uma superfície suave e conexa e  $f : M \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma *imersão*, isto é, uma aplicação diferenciável tal que a diferencial  $df_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva. Pelo Teorema da Função Inversa,

$f$  é localmente um homeomorfismo sobre  $f(M)$ . Se  $f$  é um homeomorfismo global, dizemos que  $f$  é um *mergulho* e que  $M$  é mergulhada (via  $f$ ) em  $\mathbb{L}^3$ . Caso  $M$  seja compacta, esta condição é equivalente ao fato de  $f(M)$  não possuir auto-intersecções.

Identificamos o plano tangente  $T_pM$  com  $(df)_p(T_pM)$ . Consideremos a métrica pull-back  $ds^2 = f^*(\langle, \rangle_p)$ , isto é,

$$ds_p^2(u, v) = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad u, v \in T_pM.$$

No ambiente euclidiano  $(T_pM, \langle, \rangle_p)$  é um espaço Riemanniano, isto é, a métrica é positiva definida. Entretanto, no caso do ambiente ser  $\mathbb{L}^3$ , esta métrica pode ser de três tipos, a saber:

1.  $T_pM$  é um plano de tipo espaço, isto é,  $ds_p^2$  é positiva definida.
2.  $T_pM$  é um plano de tipo tempo, isto é,  $ds_p^2$  é uma métrica com índice 1.
3.  $T_pM$  é um plano de tipo luz, isto é,  $ds_p^2$  é uma métrica degenerada.

**Definição 2.3.1.** *Uma imersão é chamada de tipo espaço (respectivamente, de tipo tempo ou de tipo luz) se todo plano tangente é de tipo espaço (respectivamente, de tipo tempo ou de tipo luz).*

No caso em que a imersão é de tipo espaço ou de tipo tempo, decomponmos o espaço ambiente na forma  $\mathbb{L}^3 = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$ , onde o segundo subespaço, que é unidimensional, será de tipo tempo (respectivamente, de tipo espaço) se a imersão é de tipo espaço (respectivamente, de tipo tempo).

**Proposição 2.3.2.** *Uma superfície de tipo espaço (respectivamente, de tipo tempo) é localmente um gráfico de uma função definida no plano de equação  $z = 0$  (respectivamente,  $x = 0$  ou  $y = 0$ ).*

*Demonstração.* Consideramos uma parametrização local da superfície

$$\psi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Como o vetor  $\psi_u \wedge \psi_v$  é ortogonal a  $\psi_u$  e  $\psi_v$ , então é de tipo tempo (respectivamente, de tipo espaço). Assim a sua terceira coordenada não se anula (respectivamente, a primeira ou a segunda coordenada). Esta coordenada é dada por:

$$- \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \left( \text{respectivamente, } \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix} \right).$$

O Teorema da Função Implícita garante que ao redor de um ponto da superfície, a aplicação

$$\tilde{\psi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

(respectivamente,  $\tilde{\psi}(u, v) = (y(u, v), z(u, v))$  ou  $\tilde{\psi}(u, v) = (x(u, v), z(u, v))$ ) é um difeomorfismo. Reparametrizando a imersão por  $\psi \circ \tilde{\psi}^{-1}$ , então a superfície é o gráfico da função  $z \circ \tilde{\psi}^{-1}$  (respectivamente,  $x \circ \tilde{\psi}^{-1}$  ou  $y \circ \tilde{\psi}^{-1}$ ).  $\square$

### 2.3.1 Curvatura média de superfícies não-degeneradas

Encontraremos uma fórmula geral que englobe os casos em que a imersão seja de tipo espaço e de tipo tempo.

**Teorema 2.3.3** (ver, [2], por exemplo). *Seja  $(M, h)$  uma superfície pseudo-Riemanniana. Então, em uma vizinhança de qualquer ponto existem coordenadas  $(u, v)$  que são isotérmicas, ou seja*

$$h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) = \varepsilon h\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right), \quad h\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = 0,$$

com  $\varepsilon = 1$  se a métrica é positiva definida e  $\varepsilon = -1$  no caso seja indefinida.

**Demonstração. A métrica  $h$  é positiva definida.**

Seja  $r$  uma função suave definida em um subconjunto aberto  $U$  de  $M$  e introduzimos a métrica  $h_0 := e^{2r} h$ . A curvatura Gaussiana com respeito à métrica  $h_0$  é dada por:

$$K^{h_0} = e^{2r}(K^h - \Delta_h r).$$

Sendo que a equação elíptica  $K^h = \Delta_h r$  admite soluções locais, então podemos escolher a função  $r$  de forma tal que a métrica  $h_0$  seja “flat”. Como  $h$  é positiva definida, também  $h_0$  é positiva definida. Então, por um resultado clássico (ver [6]), a superfície plana é localmente isométrica a um aberto do plano Euclidiano, portanto existe coordenadas  $(u, v)$  tal que  $h_0 = du^2 + dv^2$ . Logo,  $h = e^{-2r}(du^2 + dv^2)$ , i.e.  $(u, v)$  são coordenadas isotérmicas para a métrica  $h$ .

**A métrica  $h$  é indefinida.**

Em qualquer ponto de  $p \in M$  existem dois vetores nulos independentes e, sendo a métrica suave, isto implica a existência de dois campos vetoriais nulos  $X$  e  $Y$  em uma vizinhança de  $p$ .

Afirmamos que existem campos de vetores  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  colineares a  $X$  e  $Y$ , respectivamente, tais que  $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$ . De fato, consideremos  $\tilde{X} = fX$  e  $\tilde{Y} = gY$  e calculamos

$$\begin{aligned} [fX, gY] &= \nabla_{fX}gY - \nabla_{gY}fX \\ &= f(g\nabla_X Y + X(g)Y) + g(f\nabla_Y X + Y(f)X) \\ &= fg[X, Y] + X(g)Y - Y(f)X. \end{aligned}$$

Do anulamento de  $[fX, gY]$  na base  $\{X, Y\}$ , obtemos

$$\begin{cases} \lambda f g + Y(f) = 0, \\ \mu f g + X(g) = 0, \end{cases}$$

no qual  $\lambda, \mu$  são os coeficientes de  $[X, Y]$  na base  $\{X, Y\}$ , i.e.  $[X, Y] = \lambda X + \mu Y$ . O sistema de equações diferenciais parciais do primeira ordem nas funções incognitas  $\lambda$  e  $\mu$ , admite soluções locais (ver [29]). A condição  $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = 0$  significa que os fluxos de  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  comutam, ou seja existe um sistema de coordenadas locais  $(s, t)$  tal que  $\partial_s = \tilde{X}$  e  $\partial_t = \tilde{Y}$ . Uma vez que obtemos estas coordenadas para conseguirmos as coordenadas isotérmicas basta tomarmos  $Z := \tilde{X} + \tilde{Y}$  e  $W := \tilde{X} - \tilde{Y}$ , de modo que  $[Z, W] = 2[\tilde{Y}, \tilde{X}] = 0$  e ainda teremos que os fluxos comutam. Denotando por  $(u, v)$  este sistema de coordenadas, temos que:

$$\begin{aligned} g(\partial_u, \partial_u) &= g(Z, Z) = 2g(\tilde{X}, \tilde{Y}), \\ g(\partial_v, \partial_v) &= g(W, W) = -2g(\tilde{X}, \tilde{Y}), \end{aligned}$$

e

$$g(\partial_u, \partial_v) = g(Z, W) = 0,$$

o que completa a demonstração.  $\square$

Denotaremos por  $N$  a normal unitária à superfície  $M$ , que é de tipo tempo (respectivamente, *de tipo espaço*) no caso em que  $M$  é de tipo espaço (respectivamente, *de tipo tempo*).

Seja  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma imersão de uma superfície  $M$  no espaço de Lorentz-Minkowski. Vimos que  $f$  é chamada de *tipo espaço* (respectivamente, *de tipo tempo*) se a métrica induzida na superfície é uma métrica Riemanniana (respectivamente, Lorentziana). Denotaremos por  $N$  a normal unitária à superfície  $M$ , que é de tipo tempo (respectivamente, *de tipo espaço*) no caso em que  $M$  é do tipo espaço (respectivamente, *de tipo tempo*). Ou seja,  $g(N, N) = -\varepsilon$ , com  $\varepsilon = 1$  (respectivamente,  $\varepsilon = -1$ ).

Indicando por  $\bar{\nabla}$  a conexão de Levi-Civita de  $\mathbb{L}^3$  e  $\nabla$  a conexão de Levi-Civita induzida em  $M$ , a *fórmula de Gauss* é dada por:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y),$$

em que  $\alpha(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp$  é chamada *segunda forma fundamental* e  $X, Y$  são campos vetores tangentes a  $M$ . Quanto à *fórmula de Weingarten*, temos que:

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N(X),$$

onde  $A_N$  é o *operador de forma* de  $M$  em  $\mathbb{L}^3$ . Portanto, a segunda forma fundamental pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\alpha(X, Y) = -\varepsilon g(\alpha(X, Y), N) N = -\varepsilon g(Y, A_N(X)) N. \quad (2.6)$$

Seja, agora,  $\{e_1, e_2\}$  base local ortonormal de vetores tangentes a  $M$ , com

$$g(e_1, e_1) = 1, \quad g(e_2, e_2) = \varepsilon.$$

Então, o vetor curvatura média da superfície  $M$  é dado por:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{\alpha(e_1, e_1) + \varepsilon \alpha(e_2, e_2)}{2} \\ &= -\frac{\varepsilon}{2} [g(e_1, A_N(e_1)) + \varepsilon g(e_2, A_N(e_2))] N \\ &= -\frac{\varepsilon}{2} \text{tr}(A) N. \end{aligned}$$

Portanto, a função curvatura média de uma superfície  $M$  de tipo espaço (respectivamente, de tipo tempo) de  $\mathbb{L}^3$  é dada por:

$$H = \varepsilon g(\vec{H}, N) = -\frac{\varepsilon}{2} \text{tr}(A).$$

No que segue, determinaremos a expressão da curvatura média de uma superfície  $M$  de tipo espaço (respectivamente, de tipo tempo) de  $\mathbb{L}^3$  em termos de uma parametrização local  $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$ ,  $\psi = \psi(u, v)$ . Sejam  $E, F$  e  $G$  são os coeficientes da primeira forma fundamental da superfície e

$$N = \frac{\psi_u \wedge \psi_v}{\sqrt{\varepsilon(EG - F^2)}}.$$

o campo unitário normal a  $\psi$ . A matriz do operador de forma  $A_N$  na base  $\{\psi_u, \psi_v\}$  é dada por:

$$\begin{aligned} A_N &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Gl - Fm & Gm - Fn \\ Em - Fl & En - Fm \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde  $l, m, n$  representam os coeficientes da segunda forma fundamental. Portanto, calculando o traço da matriz  $A_N$  obtemos a seguinte fórmula para a curvatura média:

$$H = \frac{-\varepsilon}{2} \frac{lG - 2mF + nE}{EG - F^2}. \quad (2.7)$$

## 2.4 Representação de Enneper-Weierstrass para superfícies mínimas de tipo espaço

Nesta seção apresentaremos os resultados obtidos por O. Kobayashi em [18], sobre a representação de Weierstrass para superfícies mínimas de tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$  e a sua utilização na construção de exemplos. Em particular, determinaremos as superfícies mínimas de tipo espaço que são de rotação ou que são regradas. Considere uma superfície  $M$  de tipo espaço imersa no espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^3$  e  $N$  a sua normal unitária que, como vimos, é de tipo tempo. Então, a imagem de  $N$  pode ser considerada como contida na superfície de tipo espaço dada por:

$$\mathbb{H}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1\},$$

que representa o hiperbolóide de duas folhas e possui curvatura constante negativa igual a  $-1$  com respeito a métrica induzida.

Considere a aplicação estereográfica hiperbólica  $\pi$  com respeito ao pólo sul  $(0, 0, -1)$ , dada por:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{H}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{|z| = 1\} \\ \pi(x_1, x_2, x_3) &= \left( \frac{x_1}{x_3 + 1}, \frac{x_2}{x_3 + 1} \right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

e  $\pi(0, 0, -1) = \infty$ . Ou seja,  $\pi(x_1, x_2, x_3)$  é a intersecção do plano  $x_3 = 0$  com a reta ligando  $(x_1, x_2, x_3)$  ao ponto  $(0, 0, -1)$ . Observe que a inversa da aplicação  $\pi$  é

$$\pi^{-1}(z) = \left( \frac{-2\operatorname{Re} z}{1 - |z|^2}, \frac{-2\operatorname{Im} z}{1 - |z|^2}, \frac{1 + |z|^2}{1 - |z|^2} \right).$$

Em seguida obteremos a fórmula de Weierstrass.

**Teorema 2.4.1** (Fórmula de Enneper-Weierstrass do primeiro tipo). *Toda superfície mínima  $M^2$  de tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$  pode ser representada por*

$$f(z) = \mathcal{R}e \int_{z_0}^z (\tilde{F}(1 + \tilde{G}^2), i\tilde{F}(1 - \tilde{G}^2), -2\tilde{F}\tilde{G}) dz, \quad z \in \Omega, \quad (2.9)$$

onde  $\Omega$  é um domínio em  $\mathbb{C}$  e  $z_0$  é um ponto fixado deste domínio. Além disso,  $\tilde{F}$  é uma função holomorfa e  $\tilde{G}$  uma função meromorfa em  $\Omega$ , tais que  $\tilde{F}\tilde{G}^2$  é uma função holomorfa em  $\Omega$  e  $|\tilde{G}(z)| \neq 1$ , para todo  $z \in \Omega$ . Além disso,

1. a aplicação de Gauss  $N$  da superfície é dada por  $N = -\pi^{-1} \circ \tilde{G}$ , onde  $\pi$  é a aplicação estereográfica hiperbólica definida em (2.8);
2. a métrica induzida é dada por  $ds^2 = (|\tilde{F}| |1 - |\tilde{G}|^2|)^2 |dz|^2$ ;
3. a curvatura de Gauss da superfície  $M$  é dada por

$$K = -\frac{1}{2} \Delta(\ln(E)).$$

*Demonstração.* Suponha que a imersão mínima de tipo espaço  $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{L}^3$  seja dada por  $\tilde{f}(z) = (\tilde{f}_1(z), \tilde{f}_2(z), \tilde{f}_3(z))$ , onde  $z = u + iv$  representa um parâmetro (local) conforme. Sendo a superfície  $M$  mínima, a mesma não pode ser compacta. De fato, caso contrário,  $\tilde{f}$  seria uma função harmônica sobre uma superfície Riemanniana, logo constante. Portanto, pelo Teorema de Uniformização de Koebe (ver [1]), temos que seu espaço de recobrimento  $\Omega$  ou é o plano complexo  $\mathbb{C}$ , ou o disco complexo unitário aberto.

Seja  $\pi : \Omega \rightarrow M$  o recobrimento universal de  $M$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{L}^3$  o levantamento de  $\tilde{f}$ , i.e.  $f = \tilde{f} \circ \pi$ . Observamos que como  $\tilde{f}$  é harmônica e  $\pi$  conforme, resulta que  $f$  é também harmônica. Se consideramos o vetor tangente complexo

$$\Phi(z) := \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{f(z)} = \sum_{i=1}^3 \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

como  $f$  uma imersão mínima conforme, resulta que

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 = 0. \quad (2.10)$$

Além disso, de  $\Delta f = 0$  segue que as funções  $(\phi_i)_z$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são holomorfas. Fixado um ponto  $z_0 \in \Omega$ , podemos escrever

$$f(z) = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \Phi dz. \quad (2.11)$$

Sendo  $\Omega$  um domínio simplesmente conexo e as funções integrandas holomorfas, as integrais acima não dependem do caminho em  $\Omega$  que liga  $z_0$  a  $z$ . Considerando, agora, as funções definidas por:

$$\tilde{F} := \phi_1 - i\phi_2, \quad \tilde{G} := -\frac{\phi_3}{\tilde{F}} = -\frac{\phi_1 + i\phi_2}{\phi_3},$$

temos que

$$\phi_1 = \frac{\tilde{F}(1 + \tilde{G}^2)}{2}, \quad \phi_2 = \frac{i\tilde{F}(1 - \tilde{G}^2)}{2}, \quad \phi_3 = -\tilde{F}\tilde{G}$$

e, portanto, vale a fórmula (2.9). Além disso, sendo  $f$  uma imersão, resulta que:

$$|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 - |\phi_3|^2 \neq 0 \quad \text{em } \Omega.$$

Ou seja,

$$\frac{E}{2} = \frac{|\tilde{F}|^2}{2}(1 - |\tilde{G}|^2)^2 \neq 0.$$

Portanto,  $|\tilde{G}(z)| \neq 1$ , para todo  $z \in \Omega$ .

Note que  $\phi_1 - i\phi_2 = 0$  corresponde ao plano  $xy$  em  $\mathbb{L}^3$ , o qual pode ser obtido tomando  $\tilde{G} = 0$  e  $\tilde{F} = 1$  em (2.9).

Para determinar o vetor normal à superfície  $M$ , observe que um calculo direto nos dá que

$$\partial_u f \wedge \partial_v f = \frac{2}{i} (f_z \wedge f_{\bar{z}}).$$

Como

$$f_z \wedge f_{\bar{z}} = -i \frac{|\tilde{F}|^2}{2} (1 - |\tilde{G}|^2) (2 \operatorname{Re} \tilde{G}, 2 \operatorname{Im} \tilde{G}, -(1 + |\tilde{G}|^2)),$$

então,

$$N = \left( \frac{-2 \operatorname{Re} \tilde{G}}{1 - |\tilde{G}|^2}, \frac{-2 \operatorname{Im} \tilde{G}}{1 - |\tilde{G}|^2}, \frac{1 + |\tilde{G}|^2}{1 - |\tilde{G}|^2} \right).$$

Portanto,

$$\pi \circ N = -\tilde{G}.$$

Sendo  $f$  conforme, segue que:

$$ds^2 = 2E |dz|^2 = (|\tilde{F}| |1 - |\tilde{G}|^2|)^2 |dz|^2.$$



Por fim, pela fórmula de Brioschi (ver [28]) temos que a curvatura Gaussiana de  $M$  é dada por:

$$\begin{aligned} K &= \frac{-1}{E} \left[ \left( \frac{(E^{\frac{1}{2}})_u}{E^{\frac{1}{2}}} \right)_u + \left( \frac{(E^{\frac{1}{2}})_v}{E^{\frac{1}{2}}} \right)_v \right] \\ &= \frac{-1}{E} \left\{ \left( \frac{E_u}{2E} \right)_u + \left( \frac{E_v}{2E} \right)_v \right\} \\ &= -\frac{2}{E} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\ln E) \\ &= -\frac{1}{2} \Delta (\ln E), \end{aligned}$$

onde estamos supondo que  $E = \langle \partial_u, \partial_u \rangle = \langle \partial_v, \partial_v \rangle > 0$ . □

**Observação 2.4.2.** *Contrariamente ao caso das superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$ , observamos que uma superfície mínima em  $\mathbb{L}^3$  que é de tipo espaço tem curvatura Gaussiana não negativa.*

De imediato temos o seguinte corolário.

**Corolário 2.4.3** (Fórmula de Enneper-Weierstrass do segundo tipo). *Qualquer superfície mínima de tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$  pode ser representada como*

$$f(z) = \mathcal{R}e \int_{z_0}^z (\tilde{F} (\tilde{G}^2 + 1), 2i \tilde{F} \tilde{G}, \tilde{F} (\tilde{G}^2 - 1)) dz. \quad (2.12)$$

Além disso, a aplicação normal de Gauss  $N$  satisfaz

$$\pi \circ N = \frac{\tilde{G} - 1}{\tilde{G} + 1}.$$

*Demonstração.* Para provar a fórmula (2.12) basta substituir  $\tilde{F}$  e  $\tilde{G}$  por:

$$\frac{\tilde{F}(1 + \tilde{G})^2}{2} \quad \text{e} \quad \frac{(1 - \tilde{G})}{1 + \tilde{G}},$$

respectivamente, na equação (2.9). □

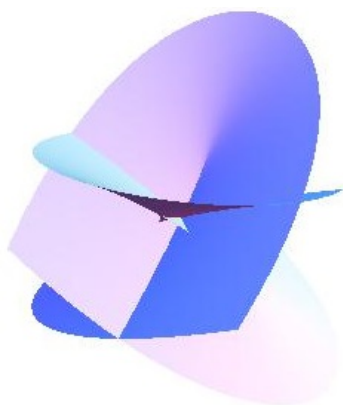
No que segue iremos construir alguns exemplos de superfícies mínimas de tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$  através das fórmulas de representação dadas em (2.9) e (2.12).

**Exemplo 2.4.4** (Superfície de Enneper do primeiro tipo). *Tomando  $\tilde{F} = 1$ ,  $\tilde{G} = z e$*

$$D = \mathbb{C} \setminus \{|z| = 1\}$$

na equação (2.9), obtemos a seguinte parametrização:

$$\begin{aligned} f(z) &= \mathcal{R}e \left( \int (1 + z^2) dz, \int i(1 - z^2) dz, \int -2z dz \right) \\ &= \left( u - uv^2 + \frac{u^3}{3}, -v + u^2v - \frac{v^3}{3}, v^2 - u^2 \right). \end{aligned}$$



**Figura 2.1:** Superfície de Enneper do primeiro tipo em  $\mathbb{L}^3$ .

A primeira vista, podemos achar que esta superfície é muito semelhante à superfície mínima clássica de Enneper. Entretanto, como se observa na Figura 2.1, esta superfície é bem mais complicada.

Para determinar a sua curvatura Gaussiana, usaremos que:

$$E = 2 \langle f_z, f_{\bar{z}} \rangle = |\tilde{F}|^2(1 - |\tilde{G}|^2)^2 = (1 - u^2 - v^2)^2.$$

Logo, pelo item (3) do Teorema 2.4.1, resulta que:

$$K = \frac{4}{(-1 + u^2 + v^2)^4}.$$

**Exemplo 2.4.5** (Superfície de Enneper do segundo tipo). Neste exemplo vamos escolher  $\tilde{F} = a$  e  $\tilde{G} = z$  em (2.12), onde  $a$  é um número real não nulo. Seque que a imersão mínima correspondente é dada por:

$$\begin{aligned} f(z) &= \mathcal{R}e \left( \int a(1 + z^2) dz, \int 2ia z dz, \int a(z^2 - 1) dz \right) \\ &= a \left( u - uv^2 + \frac{u^3}{3}, -2uv, -u - uv^2 + \frac{u^3}{3} \right), \quad u \neq 0. \end{aligned}$$

Trata-se de uma superfície de rotação com eixo de tipo luz  $(1, 0, 1)$  (ver [7]), que pode ser obtida da seguinte maneira:

$$f(z) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{v^2}{2} & v & \frac{v^2}{2} \\ -v & 1 & v \\ -\frac{v^2}{2} & v & 1 + \frac{v^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} au + \frac{a}{3}u^3 \\ 0 \\ -au + \frac{a}{3}u^3 \end{pmatrix}, \quad u \neq 0.$$

Sendo  $E = 4a^2u^2$ , então a curvatura Gaussiana desta superfície é dada por  $K = 1/u^2$ . A superfície é representada na Figura 2.2.



**Figura 2.2:** Superfície de Enneper do segundo tipo em  $\mathbb{L}^3$ .

**Exemplo 2.4.6** (Conjugada da superfície de Enneper do segundo tipo). De forma análoga à definição de superfície conjugada de uma superfície mínima no espaço Euclidiano, definimos a superfície conjugada da superfície de Enneper do segundo tipo em  $\mathbb{L}^3$  considerando  $\tilde{F} = ai$  e  $\tilde{G} = z$  no Corolário 2.4.3. Consequentemente, a imersão mínima se torna:

$$\begin{aligned} f(z) &= \operatorname{Re} \left( \int ai(1+z^2) dz, \int -2az dz, \int ai(z^2-1) dz \right) \\ &= a \left( -v - u^2v + \frac{v^3}{3}, v^2 - u^2, v - u^2v + \frac{v^3}{3} \right) \\ &= a \left( -v + \frac{v^3}{3}, v^2, v + \frac{v^3}{3} \right) - au^2(v, 1, v), \quad u \neq 0. \end{aligned}$$

Observe que esta é uma superfície regrada (ver Figura 2.3) e a sua curvatura Gaussiana é igual à da superfície do Exemplo 2.4.5.



**Figura 2.3:** Superfície conjugada da superfície de Enneper do segundo tipo em  $\mathbb{L}^3$ .

**Exemplo 2.4.7** (Catenóide de tipo espaço do primeiro tipo). *Neste exemplo vamos considerar a superfície de rotação (ver a Figura 2.4) definida por:*

$$x^2 + y^2 - a^2 \sinh^2\left(\frac{z}{a}\right) = 0, \quad z \neq 0,$$

onde  $a$  é um número real não nulo.

Em vista da fórmula de Enneper-Weierstrass obtemos esta superfície escolhendo na equação (2.9)

$$\tilde{F} = \frac{a}{2z^2}, \quad \tilde{G} = z,$$

o que resulta na seguinte imersão:

$$\begin{aligned} f(z) &= \mathcal{R}e \left( \int \frac{a}{2z^2} (1+z^2) dz, \int \frac{ai}{2z^2} (1-z^2) dz, \int -\frac{a}{z} dz \right) \\ &= \frac{a}{2} \mathcal{R}e \left( -\frac{1}{z} + z, -\frac{i}{2} \left( \frac{1}{z} + z \right), -\ln|z| \right). \end{aligned}$$

Usando as coordenadas polares  $z = r e^{-i\theta}$ , resulta que

$$f(z) = \frac{a}{2} \left( \frac{-\cos\theta}{r} + r \cos\theta, -\frac{\sin\theta}{r} + r \sin\theta, -\ln r \right), \quad r \neq 1.$$

Neste caso, de

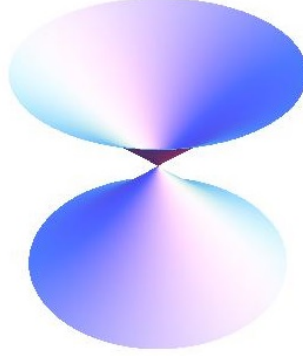
$$E = \frac{a^2 (1 - u^2 - v^2)^2}{4(u^2 + v^2)^2},$$

do terceiro item do Teorema 2.4.1, concluímos que:

$$K = \frac{16(u^2 + v^2)^2}{a^2(u^2 + v^2 - 1)^4}.$$

**Exemplo 2.4.8** (Helicóide). *A superfície conjugada do catenóide do primeiro tipo, isto é, a superfície definida tomando*

$$\tilde{F} = \frac{ia}{2z^2}, \quad \tilde{G} = z$$



**Figura 2.4:** Catenóide do tipo espaço do primeiro tipo em  $\mathbb{L}^3$ .

em (2.9), é dada por:

$$\begin{aligned} f(z) &= \mathcal{R}e \left( \int \frac{ai}{2z^2}(1+z^2) dz, \int -\frac{a}{2z^2}(1-z^2) dz, \int -\frac{ai}{z} dz \right) \\ &= \mathcal{R}e \left( \frac{-ia}{2z} + \frac{iaz}{2}, \frac{a}{2z} + \frac{a}{2}z, -ia \ln z \right). \end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares  $z = r e^{-i\theta}$ , resulta que

$$\begin{aligned} f(z) &= \left( \frac{-a \sin \theta}{2r} - \frac{ra \sin \theta}{2}, \frac{a \cos \theta}{2r} + \frac{ra \cos \theta}{2}, a\theta \right) \\ &= (0, 0, a\theta) + a \cosh(\log r) (-\sin \theta, \cos \theta, 0). \end{aligned}$$

Observe que a imagem desta imersão (ver Figura 2.5) é um subconjunto aberto do helicóide usual

$$x \cos\left(\frac{z}{a}\right) + y \sin\left(\frac{z}{a}\right) = 0.$$

Então, esta superfície também é uma superfície mínima com respeito à métrica  $dx^2 + dy^2 + dz^2$ . Reciprocamente, pode-se provar que esta propriedade caracteriza o helicóide (ver [8]).

Quanto à curvatura de Gauss do helicóide, é fácil verificar que é a mesma da superfície do Exemplo 2.4.7.

**Exemplo 2.4.9** (Catenóide do tipo espaço do segundo tipo). Para obter o catenóide do segundo tipo, representado na Figura 2.6, tomaremos

$$\tilde{F} = \frac{a}{2z^2}, \quad \tilde{G} = z,$$



**Figura 2.5:** Helicóide de tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$ .

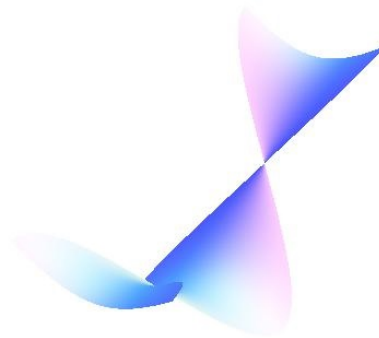
na fórmula de representação de Weierstrass dada no Corolário 2.4.3. Com isto, resulta a seguinte imersão:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \mathcal{R}e \left( \int \frac{a}{2z^2}(1+z^2) dz, \int \frac{ia}{z} dz, \int \frac{a}{2z^2}(z^2-1) dz \right) \\
 &= \mathcal{R}e \left( \frac{az}{2} - \frac{a}{2z}, ia \ln z, \frac{az}{2} + \frac{a}{2z} \right) \\
 &= \left( \frac{ar \cos \theta}{2} - \frac{a \cos \theta}{2r}, -a\theta, \frac{ar \cos \theta}{2} + \frac{a \cos \theta}{2r} \right) \\
 &= a \cos \theta (\sinh \log r, 0, \cosh(\log r)) + (0, -a\theta, 0).
 \end{aligned}$$

Portanto, pode-se escrever

$$f(z) = \begin{pmatrix} \cosh(\log r) & 0 & \sinh(\log r) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\log r) & 0 & \cosh(\log r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -a\theta \\ a \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \cos \theta \neq 0.$$

Neste caso, como  $E = a^2 u^2 / (u^2 + v^2)^2$ , segue que a curvatura de Gauss é dada por  $K = 1/u^2$ .



**Figura 2.6:** Catenóide de tipo espaço do segundo tipo em  $\mathbb{L}^3$ .

**Exemplo 2.4.10** (Helicóide de tipo espaço do segundo tipo). *Considere a superfície regradada cuja equação cartesiana é dada por:*

$$z + x \tanh\left(\frac{y}{a}\right) = 0, \quad x^2 < a^2 \cosh^2\left(\frac{y}{a}\right).$$

*Esta superfície é obtida tomando  $\tilde{F} = \frac{ia}{2z^2}$  e  $\tilde{G} = z$  no Corolário 2.4.3, o que implica na parametrização:*

$$f(z) = \left( -\frac{av}{2} - \frac{av}{2(u^2 + v^2)}, -\frac{a}{2} \ln(u^2 + v^2), -\frac{av}{2} + \frac{av}{2(u^2 + v^2)} \right).$$

*Observe que a curvatura Gaussiana desta superfície, que é representada na Figura 2.7, coincide com a do Exemplo 2.4.9.*



**Figura 2.7:** Helicóide de tipo espaço do segundo tipo em  $\mathbb{L}^3$ .

**Exemplo 2.4.11** (Superfície de Scherk do primeiro tipo). *Consideramos a superfície mínima (ver a Figura 2.8) definida pela equação:*

$$z = \log(\cosh y) - \log(\cosh x), \quad \cosh^{-2}(x) + \cosh^{-2}(y) > 1.$$

*Podemos encontrar uma parametrização ao substituir  $\tilde{F} = 2(1 - z^4)^{-1}$  e  $\tilde{G} = z$  na equação (2.9).*

*De fato, neste caso, obtemos a imersão:*

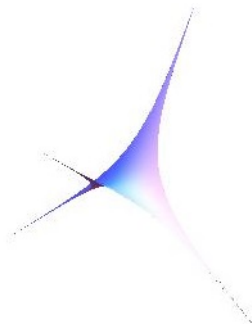
$$f(z) = \mathcal{R}e \left( \int \frac{2}{1 - z^4} (1 + z^2) dz, \int \frac{2i}{1 - z^4} (1 - z^2) dz, \int \frac{-4z}{1 - z^4} dz \right).$$

*Observe que, sendo*

$$E = \frac{4(1 - u^2 - v^2)^2}{(-4u^3v + 4uv^3)^2 + (1 - u^4 + 6u^2v^2 - v^4)^2},$$

*a curvatura gaussiana da superfície de Scherk do primeiro tipo se expressa como:*

$$K = \frac{2(u^2 + (v - 1)^2)[(u - 1)^2 + v^2][(1 + u)^2 + v^2](u^2 + (1 + v)^2)}{(u^2 + v^2 - 1)^4}.$$



**Figura 2.8:** Superfície de Scherk do primeiro tipo.

### 2.4.1 Superfícies mínimas de rotação em $\mathbb{L}^3$

O propósito desta seção é classificar as superfícies mínimas de rotação de tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$ . Lembramos que uma superfície  $\mathbb{L}^3$  é chamada *superfície de rotação ao redor do eixo  $l$*  se é invariante pela ação de um grupo de isometrias de  $\mathbb{L}^3$  que fixa os pontos do eixo  $l$ . Em particular, em contraste com o caso Euclidiano, onde toda superfície mínima de rotação é localmente congruente a um aberto de um plano ou de um catenóide, veremos que em  $\mathbb{L}^3$  existem várias superfícies mínimas de rotação.

**Teorema 2.4.12.** *Toda superfície mínima rotação de tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$  é congruente a um aberto de uma das seguintes superfícies:*

- (i) plano  $xy$ ;
- (ii) catenóide de tipo espaço do primeiro tipo;
- (iii) catenóide de tipo espaço do segundo tipo;
- (iv) superfície de Enneper de tipo espaço do segundo tipo.

*Demonstração.* O plano  $xy$  é obviamente uma superfície de rotação com eixo de tipo tempo, e todo plano de tipo espaço é congruente ao plano  $xy$ . Então, no que segue, iremos supor que a superfície mínima de rotação de tipo espaço não seja um plano.

Se o eixo  $l$  é de tipo tempo (respectivamente, de tipo espaço), podemos supor que ele seja o eixo  $z$  (respectivamente, o eixo  $y$ ), pois todo vetor unitário de tipo tempo (respectivamente, de tipo



espaço) pode ser transformado em  $(0, 0, 1)$  (respectivamente,  $(0, 1, 0)$ ) por uma transformação de Lorentz. Então, a superfície se parametriza como segue:

$$\psi(s, t) = (f(t) \cos s, f(t) \sin s, t), \quad \text{se o eixo é do tipo tempo;} \quad (2.13)$$

$$\psi(s, t) = (g(t) \sinh s, g(t) \cosh s, t), \quad \text{se o eixo é do tipo espaço.} \quad (2.14)$$

Se consideramos o caso da parametrização (2.13), então

$$\det(\psi_s, \psi_t, \psi_{ss}) = -f(t)^2, \quad \det(\psi_s, \psi_t, \psi_{st}) = 0 \quad \text{e} \quad \det(\psi_s, \psi_t, \psi_{tt}) = f(t)f''(t).$$

Além disso,

$$E = f(t)^2, \quad F = 0, \quad G = f'(t)^2 - 1.$$

Portanto, pela equação (2.7), como a curvatura média da superfície é dada por:

$$H = -\frac{-f(t)^2(f'(t)^2 - 1) + f(t)^2(f(t)f''(t))}{2(f(t)^2(f'(t) - 1))^{\frac{3}{2}}},$$

da condição de minimalidade, temos que

$$f'(t)^2 - 1 = f(t)f''(t).$$

No caso da parametrização descrita em (2.14), resulta que

$$\det(\psi_s, \psi_t, \psi_{ss}) = g(t)^2, \quad \det(\psi_s, \psi_t, \psi_{st}) = 0, \quad \det(\psi_s, \psi_t, \psi_{tt}) = g(t)g''(t)$$

e os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por:

$$E = g(t)^2, \quad F = 0, \quad G = 1 - g'(t)^2.$$

Portanto, ao calcularmos a curvatura média da superfície através da equação (2.7), obtemos

$$H = -\frac{g(t)^2(-g'(t)^2 + 1) + g(t)^2(g(t)g''(t))}{2(g(t)^2(-g'(t)^2 + 1))^{\frac{3}{2}}}.$$

Logo, para que seja uma superfície mínima, devemos ter

$$g'(t)^2 - 1 = g(t)g''(t).$$

Deste modo, temos:

$$f'(t)^2 - 1 = f(t)f''(t), \quad f'^2 - 1 > 0, \quad \text{para (2.13),}$$

$$g'(t)^2 - 1 = g(t)g''(t), \quad g'^2 - 1 < 0, \quad \text{para (2.14).}$$

Portanto, segue que  $f(t) = a^{-1} \sinh(at + b)$  e  $g(t) = a^{-1} \cos(at + b)$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes de integração. Então, a superfície é localmente congruente ao catenóide de tipo espaço do primeiro ou do segundo tipo, de acordo com o fato do eixo  $l$  ser de tipo tempo ou de tipo espaço.

No caso em que o eixo de rotação é de tipo luz podemos supor que este seja dado por  $\{t(1, 0, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Note que o subgrupo de isometrias de  $\mathbb{L}^3$  que fixa  $(1, 0, 1)$  é dado por:

$$\left\{ \left( \begin{array}{ccc} 1 - \frac{s^2}{2} & s & \frac{s^2}{2} \\ -s & 1 & s \\ -\frac{s^2}{2} & s & 1 + \frac{s^2}{2} \end{array} \right) : s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Conseqüentemente, a superfície pode ser parametrizada como:

$$\psi(s, t) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{s^2}{2} & s & \frac{s^2}{2} \\ -s & 1 & s \\ -\frac{s^2}{2} & s & 1 + \frac{s^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(t) + t \\ 0 \\ h(t) - t \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

já que

$$T_\theta(x, y, z) = (x + \theta - s^2\theta, y - 2s\theta, z - \theta - \theta s^2),$$

é a rotação em torno do eixo  $(1, 0, 1)$ . Como,

$$\det(\psi_s, \psi_t, \psi_{ss}) = -8t^2, \quad \det(\psi_s, \psi_t, \psi_{st}) = 0, \quad \det(\psi_s, \psi_t, \psi_{tt}) = 4t h''(t)$$

e  $E = 4t^2$ ,  $G = 4h'(t)$ ,  $F = 0$ , para que a imersão seja mínima é necessário que:

$$t h''(t) - 2 h'(t) = 0, \quad t \neq 0, \quad h'(t) > 0.$$

Então, temos a solução  $h(t) = at^3 + b$ ,  $a > 0$ , o que resulta na superfície de Enneper do segundo tipo.  $\square$

## 2.4.2 Superfícies mínimas regradas em $\mathbb{L}^3$

O propósito desta seção é classificar as superfícies mínimas de tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$  que são regradas. Ao contrário do caso de  $\mathbb{H}^3$ , onde toda superfície mínima regradada é localmente congruente a um plano ou a um helicóide, em  $\mathbb{L}^3$  existem várias superfícies mínimas regradas. Iremos provar o seguinte resultado:

**Teorema 2.4.13.** *Toda superfície mínima de tipo espaço que é regrada em  $\mathbb{L}^3$  é congruente a um aberto de uma das seguintes superfícies:*

- (i) plano  $xy$ ;
- (ii) helicóide de tipo espaço;
- (iii) helicóide de tipo espaço do segundo tipo;
- (iv) superfície conjugada da superfície de Enneper do segundo tipo.

*Demonstração.* Qualquer superfície de tipo espaço que é regrada em  $\mathbb{L}^3$  pode ser parametrizada como

$$\psi(s, t) = c(t) + s n(t), \quad (2.16)$$

onde

$$\langle n(t), n(t) \rangle = \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle = 1, \quad \langle \dot{c}(t), n(t) \rangle = 0.$$

Aqui,  $c(t)$  é uma curva de tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$ , denominada *curva base*, que estamos supondo parametrizada pelo comprimento de arco. Além disso,  $n(t)$  é um campo vetorial normal unitário ao longo de  $c(t)$  dito *campo diretor* e representa a direção das retas  $s \mapsto c(t) + s n(t)$  (ditas *geratrizes*). Note que  $n(t)$  é um campo vetorial assintótico na superfície, ou seja a curvatura normal ao longo  $n(t)$  é nula.

No que segue, vamos provar que a minimalidade da superfície implica que o campo vetorial  $c'(t) + s n'(t)$ , que é claramente ortogonal a  $n(t)$ , é uma direção assintótica. De fato, como:

$$\psi_s = n(t), \quad \psi_{ss} = 0, \quad \psi_{st} = \dot{n}(t), \quad \psi_t = \dot{c}(t) + s \dot{n}(t), \quad \psi_{tt} = \ddot{c}(t) + s \ddot{n}(t),$$

resulta que  $\langle \psi_s, \psi_t \rangle = 0$ ,  $\langle \psi_s, \psi_s \rangle = 1$  e  $\langle \psi_{ss}, N \rangle = 0$ , onde  $N$  denota o campo normal à superfície. Logo, pela fórmula (2.7), temos que a curvatura média é nula se, e somente se,

$$\langle \ddot{c}(t) + s \ddot{n}(t), N \rangle = \langle \psi_{tt}, N \rangle = 0.$$

Consequentemente,  $\dot{c}(t) + s \dot{n}(t)$  é uma direção assintótica da superfície.

Em particular, pondo  $s = 0$ , deduzimos que  $n(t)$  é o vetor normal principal de  $c(t)$ . Então, para obter a superfície (2.16), necessitamos somente determinar a curva  $c(t)$ .

Denotando por  $b(t)$  o vetor binormal de  $c(t)$ , temos que valem as fórmulas de Frenet:

$$\begin{cases} \ddot{c}(t) = \kappa(t) n(t), \\ \dot{b}(t) = \tau(t) n(t), \\ \dot{n}(t) = -\kappa(t) \dot{c}(t) + \tau(t) b(t), \end{cases} \quad (2.17)$$

onde  $\kappa$  e  $\tau$  denotam a curvatura e a torção de  $c(t)$ , respectivamente. Então, obtemos que

$$\begin{aligned} \psi_t &= \dot{c}(t) + s \dot{n}(t) = (1 - s \kappa(t)) \dot{c}(t) + s \tau(t) b(t), \\ \psi_{tt} &= \ddot{c}(t) + s \ddot{n}(t) = (\kappa(t) - s \kappa(t)^2 + s \tau(t)^2) n(t) + s (-\dot{\kappa}(t) \dot{c}(t) + \dot{\tau}(t) b(t)). \end{aligned}$$

Como  $n(t) = \psi_s$  e  $\psi_{tt}$  são tangentes à superfície, pois provamos que  $\psi_t$  é uma direção assintótica, da segunda equação resulta que o vetor

$$s (-\dot{\kappa}(t) \dot{c}(t) + \dot{\tau}(t) b(t))$$

também é tangente à superfície. Além disso,  $\dot{c}(t) + s \dot{n}(t)$  também é tangente à superfície e é ortogonal a  $n(t)$ . Logo, o vetor  $s (-\dot{\kappa}(t) \dot{c}(t) + \dot{\tau}(t) b(t))$  é necessariamente paralelo a  $\psi_t$ , em todo ponto  $(s, t)$ . Disto, temos que a curvatura e a torção devem ser constantes e, portanto, a curva  $c(t)$  (que é de tipo espaço) é congruente a (ver Teorema 2.4.3 da referência [23], por exemplo):

1.  $c(t) = \left( r \cos\left(\frac{t}{\sqrt{r^2 - h^2}}\right), r \sin\left(\frac{t}{\sqrt{r^2 - h^2}}\right), \frac{ht}{\sqrt{r^2 - h^2}} \right), \quad r^2 > h^2 > 0;$
2.  $c(t) = \left( r \cosh\left(\frac{t}{\sqrt{h^2 - r^2}}\right), \frac{ht}{\sqrt{h^2 - r^2}}, r \sinh\left(\frac{t}{\sqrt{h^2 - r^2}}\right) \right), \quad h^2 > r^2 > 0.$

No primeiro caso, ao calcularmos a curvatura encontramos que  $\kappa = r/(r^2 - h^2)$ . Sendo,

$$\begin{aligned} n(t) &= \left( -\cos\left(\frac{t}{\sqrt{r^2 - h^2}}\right), -\sin\left(\frac{t}{\sqrt{r^2 - h^2}}\right), 0 \right), \\ b(t) &= \left( \frac{h}{\sqrt{r^2 - h^2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{r^2 - h^2}}\right), \frac{-h}{\sqrt{r^2 - h^2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{r^2 - h^2}}\right), \frac{-r}{\sqrt{r^2 - h^2}} \right), \end{aligned}$$

de  $n' = -\kappa c' + \tau b$  obtemos:

$$h = -\frac{\tau}{\kappa^2 - \tau^2}, \quad r = \frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2}.$$

Consequentemente,

$$c(t) = \left( \frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2} \cos(\sqrt{\kappa^2 - \tau^2} t), \frac{\kappa}{\kappa^2 - \tau^2} \sin(\sqrt{\kappa^2 - \tau^2} t), \frac{-\tau t}{\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}} \right), \quad (2.18)$$

com  $|\kappa| > |\tau| > 0$ .

No segundo caso, por cálculos análogos aos do primeiro, resulta que:

$$c(t) = \left( \frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2} \cosh(\sqrt{\tau^2 - \kappa^2} t), \frac{\tau t}{\sqrt{\tau^2 - \kappa^2}}, \frac{\kappa}{\tau^2 - \kappa^2} \sinh(\sqrt{\tau^2 - \kappa^2} t) \right), \quad (2.19)$$

com  $|\tau| > |\kappa| > 0$ .

Observe que nas equações (2.18) e (2.19), a superfície definida por (2.16) é congruente a um aberto do helicóide de tipo espaço ou do helicóide de tipo espaço do segundo tipo, respectivamente.

Se  $|\tau| = |\kappa| \neq 0$ , pelo sistema de equações (2.17) temos que  $\ddot{n} = 0$  e, então,  $c^{(iv)} = 0$ . Ou seja,  $c(t)$  é um polinômio de grau 3 e, portanto, obtemos a superfície conjugada da superfície de Enneper de tipo espaço do segundo tipo.  $\square$

**Teorema 2.4.14.** *Exceto para o plano, somente o helicóide é uma superfície mínima de tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$  que, também, é mínima com respeito à métrica Riemanniana  $dx^2 + dy^2 + dz^2$ .*

*Demonstração.* Localmente, uma superfície de tipo espaço é um gráfico do tipo  $z = f(x, y)$ . Neste caso, a matriz da métrica induzida é dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 - f_x^2 & -f_x f_y \\ -f_x f_y & 1 - f_y^2 \end{pmatrix},$$

cujas inversa é

$$\begin{pmatrix} \frac{1 - f_y^2}{1 - f_y^2 - f_x^2} & \frac{f_x f_y}{1 - f_y^2 - f_x^2} \\ \frac{f_x f_y}{1 - f_y^2 - f_x^2} & \frac{1 - f_x^2}{1 - f_y^2 - f_x^2} \end{pmatrix}.$$

Considerando a parametrização  $\psi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , temos que

$$\det(\psi_x, \psi_y, \psi_{xx}) = f_{xx},$$

$$\det(\psi_x, \psi_y, \psi_{xy}) = f_{xy},$$

$$\det(\psi_x, \psi_y, \psi_{yy}) = f_{yy}.$$

Logo, a condição de minimalidade da superfície  $z = f(x, y)$  resulta em

$$(1 - f_y^2) f_{xx} + 2f_{xy} f_x f_y + (1 - f_x^2) f_{yy} = 0. \quad (2.20)$$

Por outro lado, lembramos que a equação dos gráficos mínimos em  $\mathbb{R}^3$  é dada por

$$(1 + f_y^2) f_{xx} - 2f_{xy} f_x f_y + (1 + f_x^2) f_{yy} = 0. \quad (2.21)$$

Supondo que  $f$  satisfaz ambas as equações (2.20) e (2.21), encontramos que

$$-f_y^2 f_{xx} + 2f_{xy} f_x f_y - f_x^2 f_{yy} = 0. \quad (2.22)$$

Vamos, agora, considerar  $X := (-f_y, f_x)$ , que é um campo vetorial tangente a  $\{f = \text{constante}\}$  no plano  $xy$ . Sendo que os símbolos de Christoffel da superfície são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^1 &= \frac{-f_x f_{xy}}{1 - f_y^2 - f_x^2}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{-f_y f_{xy}}{1 - f_y^2 - f_x^2}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{-f_x f_{xx}}{1 - f_y^2 - f_x^2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{-f_x f_{yy}}{1 - f_y^2 - f_x^2}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{-f_y f_{xx}}{1 - f_y^2 - f_x^2}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{-f_y f_{yy}}{1 - f_y^2 - f_x^2}, \end{aligned}$$

então, resulta que

$$\det(\nabla_X X, X) = \frac{-f_y^2 f_{xx} + 2f_x f_y f_{xy} - f_x^2 f_{yy}}{f_x^2 + f_y^2 - 1}. \quad (2.23)$$

Portanto, usando a equação (2.22), concluímos que as curvas integrais de  $X$  em  $\mathbb{R}^2$  são retas. De fato, se  $c(t)$  é uma curva integral de  $X$ , de

$$\det \left( \frac{dc}{dt}, \frac{d^2c}{dt^2} \right) = 0,$$

segue que  $c$  é uma reta. Portanto, como  $f$  é constante em cada uma destas curvas integrais, resulta que a superfície  $z = f(x, y)$  é regrada. Sendo que uma superfície mínima regrada em  $\mathbb{R}^3$  ou é o plano ou o helicóide (ver [4], por exemplo) temos a tese do teorema.  $\square$

---

## Representação de Enneper-Weierstrass para superfícies mínimas de tipo tempo

---

---

Neste capítulo apresentaremos de forma detalhada os resultados que foram obtidos por J. Konderak em [20], sobre uma representação de Weierstrass para superfícies de tipo tempo que são imersas no espaço  $\mathbb{L}^3$ .

No caso das superfícies de tipo tempo em  $\mathbb{L}^3$  é necessário que parâmetros locais pertençam a uma estrutura de Lorentz nessas superfícies, a qual é modelada através da álgebra dos *números de Lorentz* (ou *números paracomplexos*), denotada por  $\mathbb{L}$ .

Portanto, na seção que segue iremos introduzir a álgebra  $\mathbb{L}$  e, também, trataremos do conceito de diferenciabilidade para as funções paracomplexas (i.e. funções cujo domínio é um subconjunto de  $\mathbb{L}$  e com valores em  $\mathbb{L}$ ). Maiores detalhes sobre as propriedades das funções  $\mathbb{L}$ -diferenciáveis podem ser encontrados em [12] e [5].

### 3.1 A álgebra dos números de Lorentz

A álgebra dos *números de Lorentz* (ou *números paracomplexos*) é dada por:

$$\mathbb{L} = \{u + \tau v \mid u, v \in \mathbb{R}\},$$

onde a *unidade imaginária*  $\tau$  possui a propriedade de que  $\tau^2 = -1$ . No conjunto  $\mathbb{L}$  temos as duas operações internas de soma e produto definidas da maneira natural:

$$\begin{aligned}(u_1 + \tau v_1) + (u_2 + \tau v_2) &= (u_1 + u_2) + \tau (v_1 + v_2); \\ (u_1 + \tau v_1) \cdot (u_2 + \tau v_2) &= (u_1 u_2 + v_1 v_2) + \tau (u_1 v_2 + u_2 v_1).\end{aligned}$$

Com estas operações, o conjunto  $\mathbb{L}$  se torna uma álgebra sobre  $\mathbb{R}$  que é associativa, comutativa e com unidade. A álgebra  $\mathbb{L}$  possui propriedades similares ao corpo dos complexos  $\mathbb{C}$ , mas tem a desvantagem de admitir divisores de zero, que são os números do tipo

$$K = \{u \pm \tau u : u \neq 0\}.$$

Denotaremos por  $A := \mathbb{L} \setminus K$ . Se  $z \in A$ , então admite inverso que é dado por:

$$z^{-1} := \frac{\bar{z}}{z \bar{z}}.$$

Além disso, quanto à conjugação em  $\mathbb{L}$ , temos:

$$\overline{u + \tau v} = u - \tau v$$

e a  $\mathbb{L}$ -norma é definida por:

$$|u + \tau v|_{\mathbb{L}} = \sqrt{|u^2 - v^2|}.$$

Para simplificar a notação, de agora em diante, omitiremos o índice  $\mathbb{L}$  da  $\mathbb{L}$ -norma. A álgebra  $\mathbb{L}$  é isomorfa à álgebra  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  via a aplicação  $\Phi : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  definida por:

$$\Phi(u + \tau v) = (u + v, u - v),$$

cujas inversa é dada por:

$$\Phi^{-1}(a, b) = \frac{1}{2} \left[ (a + b) + \tau (a - b) \right].$$

Observamos que na literatura são usadas várias nomenclaturas para os números de Lorentz como, por exemplo, números duplos, números hiperbólicos, números hiper-complexos, números perplejos.



## 3.2 Funções diferenciáveis sobre os números de Lorentz

Nesta seção trataremos de alguns conceitos de análise paracomplexa, ou seja investigaremos as funções  $\mathbb{L}$ -holomorfas, isto é, as funções que estão definidas em algum aberto de  $\mathbb{L}$ , que tomam valores paracomplexos e são diferenciáveis como funções paracomplexas.

**Definição 3.2.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{L}$  um conjunto aberto<sup>1</sup> e  $z_0 \in \Omega$ . A aplicação  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{L}$  é dita ser  $\mathbb{L}$ -diferenciável em  $z_0$  se o seguinte limite existe:*

$$f'(z_0) := \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z - z_0 \in \mathbb{L} \setminus K \cup \{0\}}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad (3.1)$$

Neste caso, o limite  $f'(z_0)$  é chamado de  $\mathbb{L}$ -derivada de  $f$  em  $z_0$ . A função  $f$  é dita  $\mathbb{L}$ -holomorfa em  $\Omega$  se for  $\mathbb{L}$ -diferenciável em cada ponto de  $\Omega$ .

Em geral, a condição de  $\mathbb{L}$ -diferenciabilidade é menos restritiva da diferenciabilidade complexa. De fato, por exemplo, a  $\mathbb{L}$ -diferenciabilidade em um ponto  $z_0$  não implica a continuidade em  $z_0$ .

**Exemplo 3.2.2.** *Seja  $f : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$  dada por:*

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{se } z \in \mathbb{L} \setminus K, \\ 1, & \text{se } z \in K. \end{cases}$$

Assim,

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = 0, \quad z \notin K \cup \{0\}.$$

Isto é,  $f$  é  $\mathbb{L}$ -derivável em 0. Note, no entanto, que  $f$  não é contínua em 0 e, portanto, não é diferenciável nesse ponto no sentido usual.

**Observação 3.2.3.** *No entanto, em relação ao exemplo anterior, note que se  $f$  é  $\mathbb{L}$ -diferenciável em um aberto  $\Omega$ , então  $f$  é diferenciável no sentido ordinário em  $\Omega$ . Além disso, observamos que existem aplicações  $\mathbb{L}$ -diferenciáveis de qualquer classe de diferenciabilidade usual (ver [5]).*

É imediato provar que vale o seguinte resultado:

<sup>1</sup>O conjunto  $\mathbb{L}$  possui uma estrutura de espaço vetorial real bidimensional e, portanto, tem uma topologia natural.

**Teorema 3.2.4.** *Sejam  $f, g : \Omega \subset \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$  funções  $\mathbb{L}$ -diferenciáveis em  $z_0 \in \Omega$ ,  $a, b \in \mathbb{L}$  e  $g(z_0) \in \mathbb{L} \setminus A$ . Então, as funções  $(af + bg)$ ,  $fg$ ,  $f/g$  também são  $\mathbb{L}$ -diferenciáveis em  $z_0$  e vale que:*

$$\begin{aligned}(af + bg)'(z_0) &= af'(z_0) + bg'(z_0); \\ (fg)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0); \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}.\end{aligned}$$

A composição de funções  $\mathbb{L}$ -diferenciáveis não é, necessariamente, uma função  $\mathbb{L}$ -diferenciável. De fato, vejamos o exemplo a seguir.

**Exemplo 3.2.5.** *Sejam  $f(z) = (1 + \tau)z$  e*

$$g(z) = \begin{cases} 0, & \text{se } z \in \mathbb{L} \setminus A, \\ \bar{z}, & \text{se } z \in A. \end{cases}$$

*Então, temos que  $f$  é  $\mathbb{L}$ -diferenciável em todos os pontos de  $\mathbb{L}$  e  $g$  é  $\mathbb{L}$ -diferenciável em  $\mathbb{L} \setminus K$ . Contudo,  $(g \circ f)(z) = (1 - \tau)\bar{z}$  e não possui derivada paracomplexa em nenhum ponto.*

Analogamente ao caso complexo, podemos definir os operadores paracomplexos:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + \tau \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - \tau \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

onde  $z = u + \tau v$ . Com isto, podemos dar uma condição necessária para que uma função seja  $\mathbb{L}$ -holomorfa em um conjunto aberto de  $\mathbb{L}$ .

**Teorema 3.2.6.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{L}$  um aberto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{L}$  dada por  $f(u, v) = a(u, v) + \tau b(u, v)$ , com  $a$  e  $b$  funções de classe  $C^1$  em  $\Omega$ . Se  $f$  é  $\mathbb{L}$ -holomorfa em  $\Omega$ , então valem as equações de para-Cauchy-Riemann:*

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial b}{\partial v}(u, v), \\ \frac{\partial a}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial b}{\partial u}(u, v), \end{cases} \quad (3.2)$$

*em todo ponto  $(u, v) \in \Omega$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $f$  seja  $\mathbb{L}$ -holomorfa em  $\Omega$ . Fixado  $z_0 \in \Omega$ , temos que existe o limite dado em (3.1), ou seja:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{L} \setminus K \cup \{0\}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Portanto, para  $h \in \mathbb{R}$ , resulta que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \tau h) - f(z_0)}{\tau h}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(u_0 + h, v_0) + \tau b(u_0 + h, v_0) - a(u_0, v_0) - \tau b(u_0, v_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{a(u_0 + h, v_0) - a(u_0, v_0)}{h} + \tau \frac{b(u_0 + h, v_0) - b(u_0, v_0)}{h} \right] \\ &= \frac{\partial a}{\partial u}(u_0, v_0) + \tau \frac{\partial b}{\partial u}(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \tau h) - f(z_0)}{\tau h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(u_0, v_0 + h) + \tau b(u_0, v_0 + h) - a(u_0, v_0) - \tau b(u_0, v_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \tau \frac{a(u_0, v_0 + h) - a(u_0, v_0)}{h} + \tau^2 \frac{b(u_0, v_0 + h) - b(u_0, v_0)}{h} \right] \\ &= \tau \frac{\partial a}{\partial v}(u_0, v_0) + \frac{\partial b}{\partial v}(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Isto termina a prova. □

**Observação 3.2.7.** A condição (3.2) é equivalente a

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (3.3)$$

Além disso, se  $f$  é uma função  $\mathbb{L}$ -diferenciável, das equações de para-Cauchy-Riemann temos que:

$$f_z = 2(\mathcal{R}e f)_z = 2\tau(\mathcal{I}m f)_z.$$

Observamos que, contrariamente ao caso complexo, a condição (3.2) juntamente com a diferenciabilidade usual não garantem  $\mathbb{L}$ -diferenciabilidade. Considere o seguinte exemplo.

**Exemplo 3.2.8.** Seja  $f : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$  a função dada por  $f(z) = \bar{z}^2$ . Assim,  $f(u + \tau v) = u^2 + v^2 + \tau(2uv)$ . As componentes de  $f$  são infinitamente diferenciáveis e satisfazem as equações de para-Cauchy-Riemann em todos os pontos de  $\mathbb{L}$ . No entanto,  $f$  não é  $\mathbb{L}$ -diferenciável em nenhum ponto de  $\mathbb{L}$ . Vamos verificar esse fato em  $z = 0$ . Sejam  $h(t) = t\sqrt{1 + (t/\epsilon)}$  e  $k(t) = t$ ,  $\epsilon > 0$ . Então,

$\lim_{t \rightarrow 0} (h(t) + \tau k(t)) = 0$ . Além disso, para todo  $t > 0$ , temos que  $h(t) + \tau k(t) \in \mathbb{L} \setminus K$ . Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(h(t) + \tau k(t)) - f(0)}{h(t) + \tau k(t)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\overline{h(t) + \tau k(t)})^2}{h(t) + \tau k(t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(h(t) - \tau k(t))^3}{h^2(t) - k^2(t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 (\sqrt{1 + t/\epsilon} - \tau)^3}{t^3/\epsilon} \\ &= \epsilon (1 - \tau)^3. \end{aligned}$$

Como o limite depende de  $\epsilon$ , segue-se que  $f$  não é  $\mathbb{L}$ -diferenciável em  $z = 0$ .

**Proposição 3.2.9.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{L}$  um conjunto aberto simplesmente conexo e  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $\mathbb{L}$ -diferenciável. Então,*

$$h(z) - h(z_0) = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z h_z(z) dz, \quad (3.4)$$

onde  $z_0 \in \Omega$ .

*Demonstração.* Como  $h$  é uma função a valores reais, temos que

$$\int_{z_0}^z h_{\bar{z}} d\bar{z} = \overline{\int_{z_0}^z h_z dz}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} h(z) - h(z_0) &= \int_{z_0}^z h_z(z) dz + \int_{z_0}^z h_{\bar{z}} d\bar{z} \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z h_z(z) dz. \end{aligned}$$

□

### 3.3 Funções elementares sobre os números de Lorentz

Nesta seção definiremos algumas funções elementares cujo domínio está contido em  $\mathbb{L}$  e que possuem valores paracomplexos. Ressaltamos que as funções da variável de Lorentz  $z = u + \tau v$  serão escritas no “estilo **sans serif**” para distingui-las das respectivas funções complexas clássicas.

Em [11], os autores definem a função *exponencial* sobre os números de Lorentz como:

$$\exp(z) = e^u (\cosh v + \tau \sinh v), \quad z \in \mathbb{L}.$$

Ao colocarmos  $u = 0$ , obtemos

$$\exp(\tau v) = \cosh v + \tau \sinh v, \quad \exp(-\tau v) = \cosh v - \tau \sinh v,$$

e, portanto,

$$\cosh(v) = \frac{\exp(\tau v) + \exp(-\tau v)}{2}, \quad \sinh(v) = \frac{\exp(\tau v) - \exp(-\tau v)}{2\tau}.$$

Estas expressões podem ser usadas para definir o cosseno hiperbólico e o seno hiperbólico como funções  $\mathbb{L}$ -holomorfas em todo o conjunto  $\mathbb{L}$ , da seguinte maneira:

$$\cosh(z) := \frac{\exp(\tau z) + \exp(-\tau z)}{2}, \quad \sinh(z) := \frac{\exp(\tau z) - \exp(-\tau z)}{2\tau},$$

para todo  $z \in \mathbb{L}$ . De imediato obtemos as seguintes fórmulas:

$$\begin{aligned} \cosh(z) &= \cosh(u) \cosh(v) + \tau \sinh(u) \sinh(v), \\ \sinh(z) &= \sinh(u) \cosh(v) + \tau \cosh(u) \sinh(v). \end{aligned}$$

Observamos que,

$$\exp(\tau z) = \cosh(z) + \tau \sinh(z),$$

e

$$\sinh'(z) = \cosh(z), \quad \cosh'(z) = \sinh'(z),$$

para todo  $z \in \mathbb{L}$ . Além disso,

$$\cosh(\tau z) = \cosh(z), \quad \sinh(\tau z) = \tau \sinh(z), \quad z \in \mathbb{L}. \quad (3.5)$$

Estendendo as equações (3.5) para as funções trigonométricas e aplicando as fórmulas usuais de adição de ângulos, definimos:

$$\begin{aligned} \sin(z) &:= \sin(u) \cos(v) + \tau \cos(u) \sin(v), \\ \cos(z) &:= \cos(u) \cos(v) - \tau \sin(u) \sin(v), \quad z \in \mathbb{L}. \end{aligned}$$

Estas funções são  $\mathbb{L}$ -diferenciáveis em  $\mathbb{L}$  e satisfazem as mesmas fórmulas de diferenciação válidas no caso complexo e real.

### 3.4 Teorema de representação de Weierstrass para superfícies de tipo tempo

Seja  $(\Sigma, ds^2)$  uma superfície Lorentziana e  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma imersão suave. Então,  $f$  é chamada de imersão isométrica se a métrica  $ds^2 = f^*g$ . Localmente, a superfície  $\Sigma$  pode ser munida com coordenadas isotérmica paracomplexas  $(u, v)$ , com respeito as quais a métrica Lorentziana é dada por:

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 - dv^2).$$

Temos o seguinte resultado:

**Proposição 3.4.1.** *Dada a aplicação suave  $f : (\Sigma, ds^2) \rightarrow \mathbb{L}^3$ , considere o vetor tangente paracomplexo*

$$\Phi(z) := \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + \tau \frac{\partial}{\partial v} \right) = \sum_{i=1}^3 \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Então, resulta que:

1.  $f$  é conforme se, e somente se,  $\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 = 0$ ;
2. se  $f$  é conforme, então a aplicação  $f$  é uma imersão se, e somente se,  $\langle \Phi, \bar{\Phi} \rangle \neq 0$ .

*Demonstração.* Quanto ao primeiro item, basta observar que:

$$\begin{aligned} \phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 &= \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\partial f_1}{\partial u} + \tau \frac{\partial f_1}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial u} + \tau \frac{\partial f_2}{\partial v} \right)^2 - \left( \frac{\partial f_3}{\partial u} + \tau \frac{\partial f_3}{\partial v} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial u} \frac{\partial f_2}{\partial u} - \frac{\partial f_3}{\partial u} \frac{\partial f_3}{\partial u} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{\partial f_1}{\partial v} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \frac{\partial f_2}{\partial v} - \frac{\partial f_3}{\partial v} \frac{\partial f_3}{\partial v} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \tau \left[ \frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial f_1}{\partial v} + \frac{\partial f_2}{\partial u} \frac{\partial f_2}{\partial v} - \frac{\partial f_3}{\partial u} \frac{\partial f_3}{\partial v} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \right] + \frac{1}{2} \tau \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle. \end{aligned} \tag{3.6}$$

A prova do item 2 segue da seguinte equação:

$$\begin{aligned} \langle \Phi, \bar{\Phi} \rangle &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \left\langle \frac{\partial f}{\partial u} + \tau \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} - \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \left[ \left\langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right\rangle \right]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

□

Observe que, da fórmula (1.2), o Laplaciano com respeito à métrica  $ds^2$  tem a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &= \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\end{aligned}\quad (3.8)$$

e, usando a fórmula de Brioschi (ver [28]), obtemos que a curvatura de Gauss da superfície  $\Sigma$  é dada por:

$$K = \frac{-2}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln(\lambda^2).$$

Além disso, sendo o campo normal unitário  $N$  de tipo espaço, da equação (2.7), temos que

$$2\vec{H} = 2H N = \left( \frac{l-n}{\lambda^2} \right) N = \frac{f_{uu} - f_{vv}}{\lambda^2} = \Delta f. \quad (3.9)$$

Disto segue o seguinte resultado:

**Proposição 3.4.2.** *Sejam  $f : (\Sigma, ds^2) \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma imersão isométrica conforme. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. a aplicação  $f$  é harmônica (i.e.  $\Delta f = 0$ ),
2. a aplicação  $f$  é mínima (i.e. a curvatura média  $H = 0$ ),
3. a função  $\Phi$  é  $\mathbb{L}$ -diferenciável.

*Demonstração.* A equivalência entre os itens segue direto das equações (3.8) e (3.9). □

**Lema 3.4.3.** *Suponha que  $f : (\Sigma, ds^2) \rightarrow \mathbb{L}^3$  seja uma imersão mínima conforme e  $U$  um aberto coordenado em  $\Sigma$ . Então, a fórmula:*

$$\alpha|_U = \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

*define uma 1-forma global  $\mathbb{L}$ -diferenciável em  $\Sigma$ .*

*Demonstração.* Sendo  $f$  uma imersão mínima, pela Proposição 3.4.2 temos que  $\partial f / \partial z$  é  $\mathbb{L}$ -diferenciável. Seja  $(V, \psi)$  uma outra carta local em  $\Sigma$ , com  $U \cap V \neq \emptyset$  e  $(\partial f / \partial z') dz'$  a forma local

$\mathbb{L}$ -diferenciável definida por esta carta. Então, como  $\varphi \circ \psi^{-1}$  e  $\psi \circ \varphi^{-1}$  são  $\mathbb{L}$ -diferenciáveis, pois estamos considerando um atlas  $\mathbb{L}$ -holomorfo em  $\Sigma$  (ver [29]), usando a regra da cadeia obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial(\varphi \circ \psi^{-1})}{\partial z'}, \quad dz' = \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})}{\partial z} dz.$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial z'} dz' = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial(\varphi \circ \psi^{-1})}{\partial z'} \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})}{\partial z} dz = \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

□

Iremos agora provar o resultado principal deste capítulo:

**Teorema 3.4.4** (Teorema de Representação de Weierstrass para superfícies de tipo tempo em  $\mathbb{L}^3$ ). *Sejam  $(\Sigma, ds^2)$  uma superfície Lorentziana conexa e  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  uma 1-forma  $\mathbb{L}$ -diferenciável em  $\Sigma$ , que tem a seguinte expressão  $\alpha_j = \phi_j dz$ ,  $j = 1, 2, 3$ , em uma carta local. Então, resulta que:*

1.  $\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 = 0$ ,
2.  $\phi_1 \overline{\phi_1} + \phi_2 \overline{\phi_2} - \phi_3 \overline{\phi_3} > 0$ .

Além disso, se assumirmos que:

3. as integrais

$$\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \alpha_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

não dependem da escolha da curva suave por partes conectando um ponto fixo  $z_0$  de  $\Sigma$  a um ponto qualquer  $z$  de  $\Sigma$ ,

então, a aplicação  $f : (\Sigma, ds^2) \rightarrow \mathbb{L}^3$  definida por:

$$f(z) := 2 \operatorname{Re} \left( \int_{z_0}^z \alpha_1, \int_{z_0}^z \alpha_2, \int_{z_0}^z \alpha_3 \right), \quad (3.10)$$

é uma imersão mínima conforme.

*Demonstração.* Note que a condição 3 do Teorema 3.4.4 garante que a aplicação  $f$  está bem definida e que  $\partial f / \partial z = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ . Como as  $\phi_i$ 's satisfazem as condições (1), (2) do Teorema 3.4.4 para todo  $i = 1, 2, 3$ , então, do Teorema 3.4.1 segue que  $f$  é uma imersão conforme. Além disso,



sendo que as 1-formas  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são  $\mathbb{L}$ -diferenciáveis, do Teorema 3.4.2 temos que  $f$  é mínima pois  $\partial f/\partial z$  é  $\mathbb{L}$ -diferenciável.

□

As formas diferenciáveis  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  que satisfazem as primeiras duas condições do Teorema 3.4.4 podem ser caracterizadas de forma semelhante ao do caso complexo. Suponha que para cada  $x \in \Sigma$  a 1-forma  $\mathbb{L}$ -diferenciável  $(\alpha_2 + \alpha_3)_x$  pode ser escrita (localmente) como o produto de  $dz$  e um elemento de  $\mathbb{L} \setminus \mathbb{A}$ . Tal propriedade não depende de uma carta local. Tomando:

$$\beta = \alpha_2 + \alpha_3, \quad g = \frac{\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_3}, \quad (3.11)$$

observe que  $\beta$  é uma 1-forma  $\mathbb{L}$ -diferenciável e  $g$  é uma função  $\mathbb{L}$ -diferenciável em  $\Omega$ . Agora podemos escrever  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$  em função de  $\beta$  e  $g$ . De fato, temos que:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= g \beta, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2}(1 - g^2) \beta, \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2}(1 + g^2) \beta. \end{aligned}$$

Então, o item 2. do Teorema 3.4.4 é equivalente a

$$-\frac{1}{2}(g - \bar{g})^2 \tilde{\beta} \bar{\beta} > 0.$$

Consequentemente, para que  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$  satisfaçam as hipóteses do Teorema 3.4.4 devemos ter:

$$\beta \bar{\beta} < 0, \quad \text{Im } g \neq 0.$$

Então, como conclusão temos o seguinte teorema:

**Teorema 3.4.5.** *Seja  $(\Sigma, ds^2)$  uma superfície conexa,  $\beta$  uma 1-forma  $\mathbb{L}$ -diferenciável em  $\Sigma$  e  $g$  uma aplicação  $\mathbb{L}$ -diferenciável, tais que  $\beta \bar{\beta} < 0$  e  $\text{Im } g \neq 0$ . Suponha também que as 1-formas:*

$$g \beta, \quad \frac{1}{2}(1 - g^2) \beta, \quad \frac{1}{2}(1 + g^2) \beta,$$

*não possuam períodos reais. Se fixamos um ponto  $z_0 \in \Sigma$ , então a aplicação  $f : (\Sigma, ds^2) \rightarrow \mathbb{L}^3$  definida por:*

$$f(z) := 2 \text{Re} \left( \int_{z_0}^z g \beta, \int_{z_0}^z \frac{1}{2}(1 - g^2) \beta, \int_{z_0}^z \frac{1}{2}(1 + g^2) \beta \right) \quad (3.12)$$

*é uma imersão mínima e conforme.*

*Demonstração.* Segue de imediato do Teorema 3.4.4.  $\square$

As formas diferenciais  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  que satisfazem o primeiro item do Teorema 3.4.4 podem ser descritas de forma diferente daquela dada em (3.11). Suponha que para cada  $x \in \Sigma$  a 1-forma  $(\alpha_2 - \alpha_3)_x$ , que é  $\mathbb{L}$ -diferenciável, pode ser escrita (localmente) como o produto de  $dz$  e um elemento de  $\mathbb{L} \setminus \mathbb{A}$ . Considere

$$\beta = \alpha_2 - \alpha_3, \quad g = \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_3}.$$

Então, resulta que

$$\alpha_1 = g\beta, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\beta, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{2}(1 + g^2)\beta.$$

Estas formas satisfazem o item 2. do Teorema 3.4.4 se novamente

$$\beta \bar{\beta} < 0, \quad \text{Im}(g) \neq 0.$$

Então, é possível escrever uma fórmula semelhante a (3.12), para a escolha atual de  $g$  e  $\beta$  se, além disso, a condição sobre os períodos é satisfeita.

Uma outra maneira para descrever as 1-formas  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$  é a seguinte: suponha que para todo  $x \in \Sigma$  a 1-forma  $(\alpha_2 \pm \tau\alpha_3)_x$  possa ser escrita, numa carta local, como o produto de  $dz$  e um elemento de  $\mathbb{L} \setminus \mathbb{A}$ . Então, denotando

$$\beta = \alpha_2 \pm \tau\alpha_3, \quad g = \frac{\alpha_1}{\alpha_2 \pm \tau\alpha_3}, \quad (3.13)$$

segue:

$$\alpha_1 = g\beta, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(1 - g^2)\beta, \quad \alpha_3 = \pm \frac{\tau}{2}(1 + g^2)\beta.$$

Alem disso, podemos verificar que o item 2. do Teorema 3.4.4 equivale a

$$\frac{1}{2}\beta \bar{\beta} (1 + g\bar{g})^2 > 0.$$

Ou seja,

$$\beta \bar{\beta} > 0, \quad (1 + g\bar{g})^2 \neq 0.$$

Isto nos dá a seguinte versão do teorema de representação:

**Teorema 3.4.6.** *Sejam  $(\Sigma, ds^2)$  uma superfície de Lorentz conexa,  $\beta$  uma 1-forma  $\mathbb{L}$ -diferenciável em  $\Sigma$  e  $g$  uma aplicação  $\mathbb{L}$ -diferenciável, tais que  $\beta\bar{\beta} > 0$  e  $(1 + g\bar{g})^2 \neq 0$ . Suponha, também, que as 1-formas*

$$g\beta, \quad \frac{1}{2}(1 - g^2)\beta, \quad \frac{\tau}{2}(1 + g^2)\beta,$$

*não possuam períodos reais. Então, fixado um ponto  $z_0 \in \Sigma$ , a aplicação  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{L}^3$  definida por:*

$$f(z) := 2 \operatorname{Re} \left( \int_{z_0}^z g\beta, \int_{z_0}^z \frac{1}{2}(1 - g^2)\beta, \pm \int_{z_0}^z \frac{\tau}{2}(1 + g^2)\beta \right), \quad (3.14)$$

*e uma imersão mínima e conforme.*

*Demonstração.* Segue de imediato pelo Teorema 3.4.4. □

**Observação 3.4.7.** *Se  $\alpha_2 \pm \alpha_3 = 0$  ou  $\alpha_2 \pm \tau\alpha_3 = 0$ , então  $\alpha_1 = 0$  e a imersão definida pela fórmula (3.10) tem seus valores em um plano paralelo ao plano  $f_1 = 0$ .*

**Observação 3.4.8.** *No caso em que*

$$f(z) := 2 \operatorname{Re} \left( \int_{z_0}^z g\beta, \int_{z_0}^z \frac{1}{2}(1 - g^2)\beta, - \int_{z_0}^z \frac{\tau}{2}(1 + g^2)\beta \right),$$

*a função  $g$  pode ser obtida geometricamente como a projeção estereográfica da aplicação normal de Gauss da imersão  $f$  definida por  $g$  e  $\beta$ . De fato, considere*

$$\mathbb{S}_1^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}.$$

*Definimos a aplicação estereográfica  $\pi$ , a partir do polo norte, da seguinte forma:*

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{S}_1^2 \setminus \{x_1 = 1\} &\longrightarrow \mathbb{L} \\ \pi(x_1, x_2, x_3) &:= \left( \frac{x_2}{1 - x_1}, \frac{x_3}{1 - x_1} \right). \end{aligned}$$

*Para determinar o vetor normal  $N$  à superfície, observe que:*

$$f_u \wedge f_v = -\frac{2}{\tau}(f_z \wedge f_{\bar{z}}).$$

*Com isto,*

$$f_z \wedge f_{\bar{z}} = \left( \frac{\tau}{2}\beta\bar{\beta}(1 - g^2\bar{g}^2), -\beta\bar{\beta}\tau(1 + g\bar{g})\operatorname{Re}g, -\beta\bar{\beta}\tau(1 + g\bar{g})\operatorname{Im}g \right).$$

*Logo,*

$$f_u \wedge f_v = (1 + g\bar{g})^2 \beta\bar{\beta} \left( \frac{-1 + g\bar{g}}{1 + g\bar{g}}, \frac{2\operatorname{Re}g}{1 + g\bar{g}}, \frac{2\operatorname{Im}g}{1 + g\bar{g}} \right).$$

Consequentemente,

$$N = \left( \frac{-1 + g\bar{g}}{1 + g\bar{g}}, \frac{2\operatorname{Re} g}{1 + g\bar{g}}, \frac{2\operatorname{Im} g}{1 + g\bar{g}} \right)$$

e, portanto,

$$\pi \circ N = g.$$

**Observação 3.4.9.** *Se considerarmos*

$$f(z) = 2\operatorname{Re} \left( \int_{z_0}^z g \beta, \int_{z_0}^z \frac{1}{2}(1 - g^2) \beta, \int_{z_0}^z \frac{\tau}{2}(1 + g^2) \beta \right),$$

então, resulta que:

$$N = \left( \frac{1 - g\bar{g}}{1 + g\bar{g}}, \frac{-2\operatorname{Re} g}{1 + g\bar{g}}, \frac{2\operatorname{Im} g}{1 + g\bar{g}} \right).$$

Assim,

$$\pi \circ N = -\bar{g}.$$

### 3.4.1 Construção de exemplos

No que segue, iremos construir alguns exemplos de superfícies mínimas de tipo tempo em  $\mathbb{L}^3$ , através da fórmula de representação dada no Teorema 3.4.6.

**Exemplo 3.4.10** (Helicóide de tipo tempo). *No conjunto  $\Sigma = \{z \in \mathbb{L} : \operatorname{Re} z \neq 0\}$ , tome*

$$g(z) = \tau \exp(-z), \quad \beta(z) = \exp(z)/2 dz.$$

Desta maneira, como

$$\exp(z) \overline{\exp(z)} = e^{2u} > 0,$$

resulta que  $\beta \bar{\beta} > 0$ . Por outro lado,

$$1 + g(z) \overline{g(z)} = 1 - \tau e^u \neq 0.$$

Assim,

$$\alpha_1 = \frac{\tau}{2} dz, \quad \alpha_2 = \frac{\sinh z}{2} dz, \quad \alpha_3 = \tau \frac{\cosh z}{2} dz.$$

Consequentemente, a imersão mínima correspondente é dada por:

$$\begin{aligned} f(z) &= \operatorname{Re} \left( \int \tau dz, \int \sinh z dz, \int \tau \cosh z dz \right) \\ &= (v, \cosh u \cosh v, \cosh u \sinh v) \end{aligned}$$

e representa um helicóide de tipo tempo (ver a Figura 3.1). Observamos que sendo

$$E = 2 \langle f_z, f_{\bar{z}} \rangle = (\beta \bar{\beta})(1 + g \bar{g})^2 = \sinh^2 u,$$

a curvatura de Gauss desta superfície é dada por

$$K = -\frac{1}{2} \Delta(\ln(E)) = \frac{1}{(\sinh u)^4}.$$



**Figura 3.1:** Helicóide de tipo tempo em  $\mathbb{L}^3$ .

**Exemplo 3.4.11** (Catenóide de tipo tempo). Para obtermos o catenóide de tipo tempo que é representado na Figura 3.2, vamos considerar:

$$g(z) = \exp(z), \quad \beta(z) = \exp(-z)/2 \, dz, \quad z \in \mathbb{L}.$$

Então, temos que

$$\frac{\exp(-z)}{2} \overline{\frac{\exp(-z)}{2}} = e^{-2u} > 0$$

e, portanto,  $\beta \bar{\beta} > 0$ . Também, resulta que

$$1 + g(z) \overline{g(z)} = 1 + e^u \neq 0.$$

Observe que as 1-formas dadas por:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} dz, \quad \alpha_2 = \frac{-\sinh z}{2} dz, \quad \alpha_3 = \tau \frac{\cosh z}{2} dz,$$

são  $\mathbb{L}$ -diferenciáveis em  $\mathbb{L}$  e, portanto, não têm períodos reais. Por integração, segue que:

$$\begin{aligned} f(z) &= \mathcal{R}e \left( \int dz, \int -\sinh z \, dz, \int \tau \cosh z \, dz \right) \\ &= (u, -\cosh u \cosh v, \cosh u \sinh v). \end{aligned}$$



**Figura 3.2:** Catenóide de tipo tempo em  $\mathbb{L}^3$ .

Neste caso, como  $E = \cosh^2 u$ , a curvatura Gaussiana da superfície é dada por:

$$K = -\frac{1}{2}\Delta(\ln(E)) = -\frac{1}{\cosh^4 u}.$$

**Exemplo 3.4.12** (Superfície de Enneper de tipo tempo). No conjunto  $\Sigma = \{z \in \mathbb{L} : 1 + z\bar{z} \neq 0\}$ , vamos considerar  $g(z) = z$  e  $\beta = 1/2 dz$ . Temos que:

$$\beta\bar{\beta} > 0, \quad 1 + g(z)\overline{g(z)} \neq 0.$$

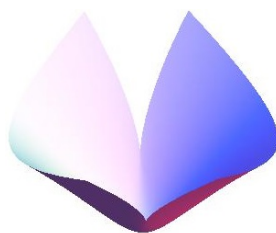
Além disso, como as 1-formas

$$\alpha_1 = \frac{z}{2} dz, \quad \alpha_2 = \frac{1}{4}(1 - z^2) dz, \quad \alpha_3 = \frac{\tau}{4}(1 + z^2) dz,$$

são  $\mathbb{L}$  diferenciáveis em todo  $\mathbb{L}$ , não possuem períodos reais. Logo, usando o Teorema 3.4.4, obtemos a seguinte imersão mínima

$$f(z) = \left( \frac{u^2 + v^2}{2}, \frac{u}{2} - \frac{u^3}{6} - \frac{uv^2}{2}, \frac{v}{2} + \frac{v^3}{6} + \frac{u^2v}{2} \right),$$

que representa a superfície de Enneper de tipo tempo, representada na Figura 3.3.



**Figura 3.3:** Superfície de Enneper de tipo tempo em  $\mathbb{L}^3$ .

Para este exemplo  $E = (1 + u^2 - v^2)^2/4$  e, deste modo, a curvatura de Gauss é dada por

$$K = -\frac{1}{2}\Delta(\ln(E)) = \frac{16}{(1 + u^2 - v^2)^4}.$$

---

# Superfícies mínimas em 3-variedades Lorentzianas

---

O presente capítulo tem como objetivo apresentar os resultados obtidos no artigo [22] sobre a generalização dos teoremas de representação de Weierstrass vistos nos Capítulos 1, 2 e 3, para o caso das superfícies mínimas imersas em variedades Riemannianas e Lorentzianas de dimensão três. Como o caso Riemanniano já foi estudado no primeiro capítulo, nos ocuparemos apenas do caso Lorentziano e trataremos os casos das superfícies mínimas de tipo espaço e de tipo tempo ao mesmo tempo, em uma abordagem unificada. Para isto, no que segue, denotaremos por  $\mathbb{K}$  os números complexos  $\mathbb{C}$ , ou os números de Lorentz  $\mathbb{L}$ . Além disto, nas Seções 4.3.1 e 4.3.2 apresentaremos alguns resultados que foram obtidos no artigo [10], que são inerentes à construção de superfícies mínimas, de tipo espaço e de tipo tempo, no grupo de Heisenberg Lorentziano de dimensão três.

## 4.1 Introdução

Seja  $M$  uma variedade Lorentziana 3-dimensional,  $\Omega \subset \mathbb{K}$  um conjunto aberto e  $f : \Omega \rightarrow M$  uma imersão conforme. Consideremos o fibrado tangente (para)complexo  $TM \otimes \mathbb{K}$  e o fibrado pull-back  $\mathbb{E} = f^*(TM) \otimes \mathbb{K}$ . Então, a métrica em  $M$  induz no fibrado tangente (para)complexo e em  $\mathbb{E}$  as seguintes duas estruturas:

- uma forma  $\mathbb{K}$ -bilinear simétrica, denotada por  $(\cdot, \cdot) : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{K}$ ,
- uma métrica (para)Hermitiana, que denotaremos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{K}$ .

Munido o conjunto  $\Omega$  da métrica induzida, a aplicação  $f$  se torna uma imersão isométrica. Indicaremos por  $\nabla$  e  $\tilde{\nabla}$  as conexões de Levi-Civita em  $\Omega$  e  $M$ , respectivamente. Portanto,  $\tilde{\nabla}$  induz uma conexão em  $\mathbb{E}$ , que é compatível com as duas formas acima, que será denotada por  $\tilde{\nabla}$ .

Como já foi visto, as superfícies Lorentzianas podem ser dotadas de coordenadas isotérmicas paracomplexas e, como no caso Riemanniano, estas são localmente descritas por cartas isotérmicas complexas. Portanto, seja  $z = u + i v$  (respectivamente,  $z = u + \tau v$ ) uma coordenada isotérmica complexa (respectivamente, paracomplexa) em  $\Omega$ .

Seja, também,  $N$  um campo vetorial unitário normal ao longo de  $f$ . Se  $f$  é uma imersão tipo tempo, isto significa que  $\langle N, N \rangle = 1$ . Quanto à notação da primeira e da segunda forma fundamental de  $f$ , respectivamente, temos:

$$ds^2 := \langle df, df \rangle,$$

e

$$II := -\langle dN, df \rangle.$$

Pela escolha dos parâmetros isotérmicos (ver Teorema 2.3.3), temos que existe uma função positiva  $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$I = \lambda^2 (du^2 \pm dv^2). \quad (4.1)$$

No que segue provaremos o resultados principal deste capítulo:

**Teorema 4.1.1** (Representação de Weierstrass em variedades Lorentzianas). *Seja  $f : \Omega \rightarrow M$  uma imersão mínima conforme de tipo espaço (respectivamente, de tipo tempo), em que  $\Omega \subset \mathbb{K}$  é um*



conjunto aberto. Dada uma coordenada isotérmica (para)complexa  $z$ , definimos o vetor tangente (para)complexo  $\Phi \in \Gamma(f^*TM \otimes \mathbb{K})$  por

$$\Phi(z) := \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{f(z)}.$$

Então,  $\Phi$  satisfaz as seguintes condições:

1.  $\langle \Phi, \Phi \rangle \neq 0$ ,
2.  $(\Phi, \Phi) = 0$ ,
3.  $\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \Phi = 0$ .

Reciprocamente, se  $\Omega$  é um aberto simplesmente conexo e  $\Phi \in \Gamma(f^*TM \otimes \mathbb{K})$  satisfaz as três condições acima, então a imersão  $f$  é representada pela integral de linha:

$$f = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \Phi dz,$$

na qual a integração é realizada ao longo de caminhos contidos em  $\Omega$ , ligando um ponto fixo  $z_0 \in \Omega$  a  $z \in \Omega$ .

*Demonstração.* Provaremos somente o caso das imersões de tipo tempo, pois a prova do caso de imersões de tipo espaço é similar. Para provarmos que  $\Phi$  satisfaz o item 3, vamos escrever  $\Phi = 1/2(X_1 + \tau X_2)$ , para certas seções  $X_1, X_2$  de  $f^*(TM)$ . Então, resulta que:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \Phi &= \frac{1}{4} \left[ (\tilde{\nabla}_{X_1} X_1 - \tilde{\nabla}_{X_2} X_2) + \tau (\tilde{\nabla}_{X_1} X_2 - \tilde{\nabla}_{X_2} X_1) \right] \\ &= \frac{1}{4} (\tilde{\nabla}_{X_1} X_1 - \tilde{\nabla}_{X_2} X_2). \end{aligned}$$

Note que, indicando por  $h_{ij}$  as componentes locais da segunda forma fundamental  $II$  e por  $\Gamma_{ij}^k$  os símbolos de Christoffel associados à conexão  $\nabla$  induzida em  $\Omega$ , temos que:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \Phi &= \frac{1}{4} \left[ (\nabla_{X_1} X_1 - \nabla_{X_2} X_2) + (h_{11} - h_{22}) N \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1) X_1 + (\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2) X_2 + (h_{11} - h_{22}) N \right] \\ &= \frac{1}{4} (h_{11} - h_{22}) N. \end{aligned}$$

Sendo que a métrica induzida em  $\Omega$  é dada por  $ds^2 = \lambda^2(du^2 - dv^2)$ , obtemos que:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \frac{\lambda_u}{\lambda}, \quad \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{11}^2 = \frac{\lambda_v}{\lambda}.$$

Portanto,  $f$  é mínima se, e somente se,

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \Phi = 0.$$

Agora, como

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle &= \left\langle \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right), \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \tau \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} - \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[ g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) - g \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \frac{\lambda^2}{2}, \end{aligned}$$

então,  $f$  é uma imersão se, e somente se, a primeira condição é satisfeita. Além disto,

$$\begin{aligned} (\Phi, \Phi) &= \frac{1}{4} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \tau \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} + \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[ g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) + 2\tau g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) + g \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

se, e somente, se

$$g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) = -g \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right), \quad g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) = 0.$$

Ou seja,  $f$  é conforme se, e somente se,  $(\Phi, \Phi) = 0$ .

Reciprocamente, seja  $\Phi$  um campo vetorial ao longo de  $f$ , i.e. uma seção  $\Phi$  de  $\mathbb{E}$ , escrita em coordenadas locais na forma:

$$\Phi = \sum_{a=1}^3 \phi_a \frac{\partial}{\partial x_a}.$$

Suponha que  $\Phi$  satisfaça os itens 1, 2 e 3. Então,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \Phi &= \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \left( \sum_{a=1}^3 \phi_a \frac{\partial}{\partial x_a} \right) \\ &= \sum_{a=1}^3 \frac{\partial \phi_a}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_a} + \sum_{a,b=1}^3 \phi_a \bar{\phi}_b \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_b}} \left( \frac{\partial}{\partial x_a} \right) \\ &= \sum_{c=1}^3 \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial \bar{z}} + \sum_{a,b=1}^3 \tilde{\Gamma}_{ab}^c \phi_a \bar{\phi}_b \right) \frac{\partial}{\partial x_c}. \end{aligned}$$

Além disso, note que:

$$\begin{aligned} \sum_{a,b=1}^3 \tilde{\Gamma}_{ab}^c \phi_a \bar{\phi}_b &= \sum_{a=1}^3 \tilde{\Gamma}_{aa}^c \phi_a \bar{\phi}_a + \sum_{a<b=1}^3 \tilde{\Gamma}_{ab}^c \phi_a \bar{\phi}_b \\ &= \sum_{a=1}^3 \tilde{\Gamma}_{aa}^c \phi_a \bar{\phi}_a + 2 \sum_{a<b=1}^3 \tilde{\Gamma}_{ab}^c \mathcal{R}e(\phi_a \bar{\phi}_b). \end{aligned}$$

Como  $\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \Phi = 0$  e a expressão  $\sum_{a,b=1}^3 \tilde{\Gamma}_{ab}^c \phi_a \bar{\phi}_b$  é real, da igualdade acima segue que:

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial \bar{z}} \in \mathbb{R}, \quad a = 1, 2, 3.$$

Logo,

$$\mathcal{I}m\left(\frac{\partial \phi_a}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{I}m \phi_a}{\partial u} - \frac{\partial \mathcal{R}e \phi_a}{\partial v} \right) = 0.$$

Isto implica que as formas  $\mathcal{R}e(\phi_a) dz$ ,  $a = 1, 2, 3$ , são fechadas e, portanto, exatas em  $\Omega$ . Assim, as integrais de linha  $\mathcal{R}e \int_{z_0}^z \phi_a dz$  estão bem definidas, para  $a = 1, 2, 3$ , onde o ponto fixo  $z_0$  pertence a  $\Omega$ . Por último, observe que segue diretamente da construção que  $f = 2 \mathcal{R}e \int_{z_0}^z \Phi dz$ .  $\square$

## 4.2 O caso dos grupos de Lie Lorentzianos

O terceiro item do Teorema 4.1.1 é uma equação integro-diferencial não linear bastante complicada, então não é razoável esperar de encontrar soluções explícitas dela e, portanto, exemplos de imersões mínimas conformes. No entanto, esta equação se torna mais simples no caso dos grupos de Lie. De fato, como a conexão de Levi-Civita dos grupos de Lie pode ser expressa em termos das constantes da estrutura, então podemos expressar os símbolos de Christoffel em (3) mesmo sem conhecer explicitamente as coordenadas da imersão.

Suponha, a partir de agora, que  $M$  seja um grupo de Lie tridimensional dotado de uma métrica Lorentziana invariante à esquerda. Como antes,  $\Omega \subset \mathbb{K}$  denota um conjunto aberto e  $f : \Omega \subset \mathbb{K} \rightarrow M$  uma imersão mínima conforme.

Seja  $\{E_1, E_2, E_3\}$  uma base ortonormal de campos invariantes à esquerda, com  $E_1, E_2$  de tipo espaço e  $E_3$  de tipo tempo. Fixado um parâmetro isotérmico  $z \in \Omega$ , podemos escrever o campo tangente (para)complexo  $\partial f / \partial z$  ao longo de  $f$  em termos de coordenadas locais  $x_1, x_2, x_3$  em  $M$  e, também, usando a base de campos invariantes à esquerda. Temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{a=1}^3 \phi_a \frac{\partial}{\partial x_a} = \sum_{b=1}^3 \psi_b E_b, \quad (4.2)$$

em que as funções  $\phi_a$  e  $\psi_b$  com  $a, b = 1, 2, 3$ , são relacionados por:

$$\phi_a = \sum_{b=1}^3 A_{ab} \psi_b, \quad a = 1, 2, 3$$

e  $A : \Omega \rightarrow GL(3, \mathbb{R})$ . Em termos das componentes  $\psi_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ , o item (3) do Teorema 4.1.1 pode ser escrito como:

$$\frac{\partial \psi_c}{\partial \bar{z}} + \sum_{a,b=1}^3 L_{ab}^c \bar{\psi}_a \psi_b = 0, \quad c = 1, 2, 3, \quad (4.3)$$

onde os símbolos  $L_{ab}^c$  são definidos por:

$$\tilde{\nabla}_{E_a} E_b = \sum_{c=1}^3 L_{ab}^c E_c, \quad a, b = 1, 2, 3. \quad (4.4)$$

Facilmente se verifica que estes símbolos são constantes dadas em termos da constante de estrutura  $C_{ab}^c = E_c^*([E_a, E_b])$  de uma álgebra de Lie por:

$$L_{ab}^c = \frac{1}{2}(C_{ab}^c - C_{bc}^a \varepsilon_a \varepsilon_c - C_{ac}^b \varepsilon_b \varepsilon_c), \quad (4.5)$$

com  $\varepsilon_a = \langle E_a, E_a \rangle$ ,  $a = 1, 2, 3$ . Consequentemente, o Teorema 4.1.1 pode ser reformulado no caso de grupos de Lie tridimensionais como segue:

**Teorema 4.2.1.** *Sejam  $M$  um grupo de Lie tridimensional dotado de uma métrica Lorentziana invariante à esquerda e  $\{E_a\}_{a=1}^3$  uma base ortonormal de campos invariantes à esquerda. Sejam  $\Omega \subset \mathbb{K}$  um conjunto aberto e  $f : \Omega \rightarrow M$  uma imersão mínima conforme de tipo espaço (respectivamente, tipo tempo). Denotamos por  $\Phi$  o vetor tangente (para)complexo:*

$$\Phi = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Então, as componentes  $\psi_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ , de  $\Phi$  definidas por:

$$\Phi(z) = \sum_{a=1}^3 \psi_a E_a,$$

satisfazem as seguintes condições:

1.  $\psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2 - \psi_3 \bar{\psi}_3 \neq 0$ ,
2.  $\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2 = 0$ ,
3.  $\frac{\partial \psi_c}{\partial \bar{z}} + \sum_{a,b=1}^3 L_{ab}^c \bar{\psi}_a \psi_b = 0, \quad c = 1, 2, 3.$

Reciprocamente, se  $\Omega$  é um conjunto simplesmente conexo de  $\mathbb{K}$  e  $\psi_a : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $a = 1, 2, 3$ , são funções satisfazendo as condições dadas nos itens 1, 2 e 3, então existe uma aplicação  $f : \Omega \rightarrow M$  que satisfaz a equação:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{a=1}^3 \psi_a E_a.$$

As componentes de  $f$  em termos das coordenadas  $x_1, x_2, x_3$  são dadas por:

$$f_a := 2 \operatorname{Re} \int \sum_{b=1}^3 A_{ab} \psi_b dz, \quad a = 1, 2, 3, \quad (4.6)$$

em que a matriz  $A$  é definida por:

$$E_b \Big|_{f(z)} = \sum_{a=1}^3 A_{ab} \frac{\partial}{\partial x_a} \Big|_{f(z)}. \quad (4.7)$$

Além disso, a aplicação  $f$  define uma imersão mínima conforme de tipo espaço (respectivamente, tipo tempo).

### 4.3 O grupo de Heisenberg Lorentziano

Considere o grupo de Heisenberg de dimensão três que, como vimos no Capítulo 1, é dado por:

$$\mathbb{H}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \right\},$$

munido da métrica Lorentziana invariante à esquerda

$$h = dx^2 + dy^2 - \left( dz + \frac{1}{2}y dx - \frac{1}{2}x dy \right)^2.$$

Com relação a  $h$ , os campos invariantes à esquerda são dados por:

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2} \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad E_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial x_3},$$

com  $\langle E_3, E_3 \rangle = -1$ . Das expressões dos colchetes de Lie em  $\mathbb{H}_3$ , temos que o sistema de equações do item (3) do Teorema 4.2.1 se escreve como:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} (\psi_2 \bar{\psi}_3 + \bar{\psi}_2 \psi_3) = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} (\psi_1 \bar{\psi}_3 + \bar{\psi}_1 \psi_3) = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} (\psi_1 \bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1 \psi_2) = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Então, a aplicação  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}_3$ , com coordenadas:

$$\begin{cases} f_1 = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \psi_1 dz, \\ f_2 = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \psi_2 dz, \\ f_3 = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left( \psi_3 - \frac{f_2}{2} \psi_1 + \frac{f_1}{2} \psi_2 \right) dz, \end{cases}$$

define uma imersão mínima em  $\mathbb{H}_3$ . Estas expressões integrais são obtidas considerando que:

$$\phi_1 = \psi_1, \quad \phi_2 = \psi_2, \quad \phi_3 = \psi_3 - \frac{f_2}{2} \psi_1 + \frac{f_1}{2} \psi_2. \quad (4.9)$$

No que segue, veremos alguns exemplos que seguem da aplicação do Teorema 4.2.1, que foram obtidos em [10].

**Exemplo 4.3.1** (Superfícies tipo sela de tipo tempo). *Dada uma constante  $\theta \in \mathbb{R}$ , consideramos as funções paracomplexas definidas por:*

$$\begin{aligned} \psi_1(u, v) &= \frac{1}{2} (\cos \theta + \tau \sin \theta \sinh v), \\ \psi_2(u, v) &= \frac{1}{2} (\sin \theta - \tau \cos \theta \sinh v), \\ \psi_3(u, v) &= -\frac{\cosh v}{2}, \end{aligned}$$

com  $v > 0$ . É fácil verificar que estas funções satisfazem as condições do Teorema 4.2.1 e integrando, obtemos:

$$\begin{cases} f_1(u, v) = u \cos \theta + \sin \theta \cosh v, \\ f_2(u, v) = u \sin \theta - \cos \theta \cosh v. \end{cases}$$

Portanto, substituindo em (4.9), temos que:

$$\phi_3(u, v) = -\frac{\cosh v + \tau u \sinh v}{4}.$$

Logo, por integração, encontramos que  $f_3(u, v) = -(u \cosh v)/2$ . A imagem da imersão  $f$  pertence ao gráfico da função:

$$z = \frac{\cos(2\theta)}{2} x y + \frac{\sin(2\theta)}{4} (y^2 - x^2).$$

Logo, obtemos uma superfície mínima Lorentziana do tipo sela.

Seguindo o artigo [10], escreveremos o Teorema 4.2.1 usando duas novas funções (para)complexas  $G$  e  $H$ , que descrevem quase todas as soluções da equação:

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2 = 0. \quad (4.10)$$

### 4.3.1 Imersões de tipo espaço

Se  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}_3$  é uma imersão de tipo espaço, a equação (4.10) sugere considerar as funções complexas:

$$G := \sqrt{\frac{1}{2}(\psi_1 - i\psi_2)}, \quad H := \sqrt{\frac{1}{2}(\psi_1 + i\psi_2)}, \quad (4.11)$$

as quais satisfazem as relações:

$$\psi_1 = G^2 + H^2, \quad \psi_2 = i(G^2 - H^2), \quad \psi_3 = 2GH.$$

Em termos das funções  $G$  e  $H$ , o sistema (4.8) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} G \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + H \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = \mathcal{I}m(H\bar{G})(|G|^2 + |H|^2), \\ i \left( G \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} - H \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \right) = -\mathcal{R}e(H\bar{G})(|G|^2 + |H|^2), \\ H \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + G \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = -\frac{i}{2}(|G|^4 - |H|^4). \end{cases}$$

Agora, multiplicando a primeira equação por  $i$  e adicionando a segunda obtemos:

$$2i \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} = -(|G|^2 + |H|^2) \bar{H}. \quad (4.12)$$

Enquanto que subtraindo a segunda da primeira, multiplicada por  $i$ , produzimos:

$$2i \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = (|G|^2 + |H|^2) \bar{G}. \quad (4.13)$$

Consequentemente, a terceira equação do sistema que encontramos é dada pela equação (4.12) multiplicada por  $H$ , a qual adicionada a equação (4.13) multiplicada por  $G$ . Além disto, o item 1 é equivalente a  $|H| \neq |G|$ . Portanto, conseguimos o seguinte resultado.

**Corolário 4.3.2.** *Sejam  $G$  e  $H$  funções a valores complexos definidas em um domínio simplesmente conexo  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , tais que:*

1.  $|H| \neq |G|$ ;
2.  $G$  e  $H$  são soluções das equações (4.12) e (4.13).

Então, a aplicação  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}_3$  definida por:

$$\begin{cases} f_1 = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z (G^2 + H^2) dz, \\ f_2 = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z i (G^2 - H^2) dz, \\ f_3 = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left( 2GH - \frac{f_2}{2} (G^2 + H^2) + i \frac{f_1}{2} (G^2 - H^2) \right) dz, \end{cases}$$

é uma imersão mínima conforme de tipo espaço.

*Demonstração.* Segue direto do Teorema 4.2.1.  $\square$

Observe que, no caso que estamos considerando, a métrica induzida é dada por:

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2), \quad \lambda^2 = 4 (|G|^2 - |H|^2)^2$$

e, usando a fórmula de Brioschi (ver [28]), obtemos que a curvatura Gaussiana da superfície mínima de tipo espaço é

$$K = -\frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\ln \lambda^2) = -\frac{\Delta (\ln \lambda^2)}{2}, \quad (4.14)$$

em que  $\Delta$  é o operador de Beltrami-Laplace com respeito à métrica  $ds^2$ . Além disso, como

$$f_u \wedge f_v = \frac{2}{i} \Phi \wedge \bar{\Phi} = 4 \operatorname{Im}(\psi_2 \bar{\psi}_3 E_1 + \psi_3 \bar{\psi}_1 E_2 + \psi_2 \bar{\psi}_1 E_3),$$

a aplicação normal de Gauss de  $f$ , que tem valores no hiperbolóide

$$\mathbb{H}^2 = \left\{ \sum_{i=1}^3 v_i E_i : v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 = -1 \right\}$$

da álgebra de Lie de  $\mathbb{H}_3$ , assume a seguinte forma:

$$N = \frac{2 \operatorname{Re}(H/G) E_1 + 2 \operatorname{Im}(H/G) E_2 + (|H/G|^2 - 1) E_3}{|H/G|^2 + 1}.$$

Ao considerarmos a projeção estereográfica do pólo sul  $\pi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{v_1^2 + v_2^2 = 1\}$ , que é dada por:

$$\pi \left( \sum_{i=1}^3 v_i E_i \right) = \frac{v_1 + i v_2}{1 + v_3},$$

resulta que

$$\pi \circ N = \operatorname{Re}(H/G) + i \operatorname{Im}(H/G).$$



Isto significa que a aplicação  $g = H/G$  pode ser identificada como a aplicação normal de Gauss da imersão  $f$ .

Usaremos, agora, o Corolário 4.3.2 para construir alguns exemplos novos de superfícies mínimas tipo espaço no grupo de Heisenberg Lorentziano.

**Exemplo 4.3.3** (Helicóides de tipo espaço). *Neste exemplo, escolhemos*

$$G(u, v) := e^{-i\frac{v}{2}} l(u), \quad H(u, v) := i e^{i\frac{v}{2}} h(u),$$

onde  $l$  e  $h$  são duas funções diferenciáveis definidas em um conjunto aberto de  $\mathbb{R}$ , com  $|l| \neq |h|$ . Pelas equações (4.12) e (4.13), temos que:

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \bar{G} + \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \bar{H} = 0. \quad (4.15)$$

Então, resulta

$$l^2 + (l^2)' = h^2 - (h^2)'$$

Logo, existe uma função  $p(u)$ , tal que

$$l = \frac{\sqrt{p - p'}}{2}, \quad h = \frac{\sqrt{p' + p}}{2}.$$

Além disso, usando as equações (4.12) e (4.13) obtemos que  $p$  é uma solução da seguinte equação diferencial:

$$p - p'' = p \sqrt{p^2 - (p')^2},$$

a qual é equivalente a

$$p \sqrt{p^2 - (p')^2} = \frac{1}{2} p^2 + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, a correspondente imersão mínima de tipo espaço em  $\mathbb{H}_3$  é dada por:

$$f(u, v) = (-p(u) \cos v, -p(u) \sin v, -c_1 v + c_2), \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Como  $g = H/G = i e^{i v} h(u)/l(u)$ , o posto da aplicação normal de Gauss desta superfície é dois. Além disso, usando a equação (4.14), a curvatura Gaussiana da superfície é  $K = (p''^2 - p' p^3)/p^4$ .

**Exemplo 4.3.4** (Superfícies tipo sela de tipo espaço). *Dada uma constante  $\theta \in \mathbb{R}$ , vamos definir*

$$G(u, v) := e^{-i\frac{\theta}{2}} l(v), \quad H(u, v) := e^{i\frac{\theta}{2}} h(v),$$

em que  $l$  e  $h$  são duas funções a valores reais definidas em um conjunto aberto de  $\mathbb{R}$ , tais que  $|l| \neq |h|$ . Pela equação (4.15), segue que

$$l l' + h h' = 0.$$

Logo, podemos tomar  $h(v) = \cos v$ ,  $l(v) = \sin v$ , com  $v \in (-\pi/2, \pi/2)$ . Então,

$$\phi_1 = \cos \theta + i \sin \theta \cos(2v), \quad \phi_2 = \sin \theta - i \cos \theta \cos(2v). \quad (4.16)$$

Consequentemente, integrando, obtemos:

$$\begin{cases} f_1(u, v) = 2u \cos \theta - \sin \theta \sin(2v), \\ f_2(u, v) = 2u \sin \theta + \cos \theta \sin(2v). \end{cases}$$

Portanto,

$$\phi_3 = \frac{\sin(2v) - 2i u \cos(2v)}{2}$$

e, consequentemente, resulta que  $f_3 = u \sin(2v)$ . Então, a imagem da imersão pertence ao gráfico da função:

$$z = \frac{\cos(2\theta)}{2} x y + \frac{\sin(2\theta)}{4} (y^2 - x^2),$$

que é uma superfície mínima tipo sela de tipo espaço, cuja curvatura Gaussiana é dada por

$$K = \sec^4(2v).$$

Também, note que a aplicação normal de Gauss  $g = e^{i\theta} h(v)/l(v)$  depende somente de um parâmetro  $e$ , então, possui posto 1.

### 4.3.2 Imersões de tipo tempo

No caso das imersões mínimas de tipo tempo, definindo as seguintes funções paracomplexas:

$$G := \sqrt{\frac{1}{2}(\psi_2 - \tau \psi_3)}, \quad H := \sqrt{-\frac{1}{2}(\psi_2 + \tau \psi_3)}, \quad (4.17)$$

resulta que:

$$\psi_1 = 2G H, \quad \psi_2 = G^2 - H^2, \quad \psi_3 = -\tau (G^2 + H^2).$$

Em termos das funções  $G$  e  $H$ , o sistema (4.8) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} H \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + G \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = \mathcal{I}m(G^2 \bar{H}^2), \\ G \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} - H \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = \mathcal{I}m(G \bar{H})(G \bar{G} - H \bar{H}), \\ G \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} + H \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = \mathcal{I}m(G \bar{H})(G \bar{G} - H \bar{H}). \end{cases}$$

Observe que, somando a segunda equação e a terceira temos:

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} = \bar{G} \mathcal{I}m(G \bar{H}). \quad (4.18)$$

Enquanto que, subtraindo a segunda equação da terceira produzimos:

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = \mathcal{I}m(G \bar{H}) \bar{H}. \quad (4.19)$$

Conseqüentemente, a terceira equação do sistema acima é obtida adicionando à equação (4.18) multiplicada por  $H$ , a equação (4.19) multiplicada por  $G$ . Além disto, a condição 1 do Teorema (4.2.1) é equivalente a  $H \bar{H} + G \bar{G} \neq 0$ . Portanto, conseguimos o seguinte resultado.

**Corolário 4.3.5.** *Sejam  $G$  e  $H$  funções a valores paracomplexos, definidas em um domínio simplesmente conexo  $\Omega \subset \mathbb{L}$ , tais que:*

1.  $H \bar{H} + G \bar{G} \neq 0$ ;
2.  $G$  e  $H$  são soluções das equações (4.18) e (4.19).

Então, a aplicação  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}_3$  definida por:

$$\begin{cases} f_1 = 4 \mathcal{R}e \int_{z_0}^z G H dz, \\ f_2 = 2 \mathcal{R}e \int_{z_0}^z (G^2 - H^2) dz, \\ f_3 = 2 \mathcal{R}e \int_{z_0}^z \left( -f_2 G H + \frac{f_1}{2} (G^2 - H^2) - \tau (G^2 + H^2) \right) dz, \end{cases}$$

é uma imersão mínima conforme de tipo tempo.

*Demonstração.* A demonstração segue do Teorema 4.2.1. □

Neste caso, temos que a métrica induzida é dada por:

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 - dv^2), \quad \lambda^2 = 4(G\bar{G} - H\bar{H})^2$$

e a curvatura Gaussiana da superfície mínima de tipo tempo é

$$K = -\frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\ln \lambda^2) = -\frac{\Delta(\ln \lambda^2)}{2}, \quad (4.20)$$

em que  $\Delta$  é o operador de Beltrami-Laplace com respeito à métrica  $ds^2$ . Determinaremos, agora, a aplicação normal de Gauss de uma superfície de tipo tempo em  $\mathbb{H}_3$ . Por uma verificação direta encontramos:

$$f_u \wedge f_v = -\frac{2}{\tau} \Phi \wedge \bar{\Phi} = -4 \mathcal{I}m(\psi_2 \bar{\psi}_3 E_1 + \psi_3 \bar{\psi}_1 E_2 + \psi_2 \bar{\psi}_1 E_3).$$

Consequentemente, a aplicação normal de Gauss de  $f$ , que tem valores na pseudoesfera

$$\mathbb{S}_1^2 = \left\{ \sum_{i=1}^3 v_i E_i : v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 = 1 \right\}$$

da álgebra de Lie de  $\mathbb{H}_3$ , assume a seguinte forma:

$$N = \frac{\left( \frac{H\bar{H}}{G\bar{G}} - 1 \right) E_1 + 2 \mathcal{R}e(H/G) E_2 + 2 \mathcal{I}m(H/G) E_3}{\frac{H\bar{H}}{G\bar{G}} + 1}.$$

Se  $\pi : \mathbb{S}_1^2 \setminus \{v_1 = 1\} \rightarrow \mathbb{L}$  é a projeção com respeito ao pólo  $(1, 0, 0)$ , que é dada por:

$$\pi \left( \sum_{i=1}^3 v_i E_i \right) = \frac{v_2 + \tau v_3}{1 - v_1},$$

temos que

$$\pi \circ N = \mathcal{R}e(H/G) + \tau \mathcal{I}m(H/G).$$

Portanto, a aplicação  $g = H/G$  representa a aplicação normal de Gauss da imersão  $f$ .

Usaremos o Corolário 4.3.5 para construir alguns exemplos interessantes de superfícies mínimas de tipo tempo em  $\mathbb{H}_3$ .

**Exemplo 4.3.6** (Superfícies Lorentzianas tipo sela). *Considere*

$$G(u, v) := l(u), \quad H(u, v) := \tau h(u),$$

onde  $l$  e  $h$  são duas funções suaves a valores reais definidas em um conjunto aberto de  $\mathbb{R}$ , com  $lh \neq 0$  e  $l^2 - h^2 \neq 0$ . Pelas equações (4.18) e (4.19), obtemos:

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{z}} \bar{H} = \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} \bar{G} \quad (4.21)$$

e, portanto,

$$h l' = -l h'.$$

Logo,  $h(u)l(u) = c$ , para alguma constante  $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Da equação (4.18), resulta que  $l'(u) = -2cl(u)$  e, então,

$$l(u) = a e^{-2uc}, \quad h(u) = \frac{c e^{2uc}}{a}, \quad a \neq 0.$$

Consequentemente, escolhendo  $c > 0$  e  $a = \sqrt{c}$ , temos:

$$G(u) = \sqrt{c} e^{-2uc}, \quad H(u) = \tau \sqrt{c} e^{2uc}$$

e, assim,

$$\phi_1 = \psi_1 = 2c\tau, \quad \phi_2 = \psi_2 = -2c \sinh(4uc).$$

Por integração, obtemos que

$$\begin{cases} f_1(u, v) = 4cv, \\ f_2(u, v) = -\cosh(4uc). \end{cases}$$

Além disso, de

$$\phi_3 = -4c^2 v \sinh(4uc) - \tau c \cosh(4uc),$$

segue que

$$f_3 = -2cv \cosh(4uc).$$

Neste caso, a imagem da imersão mínima  $f$  pertence ao gráfico da função:

$$z = \frac{xy}{2},$$

que representa uma superfície Lorentziana tipo sela de tipo tempo. Neste exemplo, a aplicação normal de Gauss  $g = H/G = \tau h(u)/l(u)$  possui posto 1 e, usando a equação (4.20), obtemos que a curvatura Gaussiana da superfície é  $K = 1/\sinh^4(4uc)$ .

**Exemplo 4.3.7.** Neste exemplo, escolheremos as funções paracomplexas:

$$G(u, v) := e^{\frac{\theta}{2}} \left( \frac{e^u + \tau e^{-u}}{2} \right), \quad H(u, v) := e^{-\frac{\theta}{2}} \left( \frac{e^u - \tau e^{-u}}{2} \right),$$

com  $u > 0$  e  $\theta$  uma constante real fixada. Então,

$$\phi_1 = \psi_1 = \sinh(2u), \quad \phi_2 = \psi_2 = \sinh \theta \cosh(2u) + \tau \cosh \theta.$$

Ao integrar, encontramos:

$$\begin{cases} f_1(u, v) = \cosh(2u), \\ f_2(u, v) = \sinh \theta \sinh(2u) + 2v \cosh \theta. \end{cases}$$

Alem disso, sendo

$$\phi_3 = -v \cosh \theta \sinh(2u) - \frac{\tau}{2} \cosh \theta \cosh(2u) - \frac{\sinh \theta}{2},$$

temos que

$$f_3 = -v \cosh \theta \sinh(2u) - u \sinh \theta.$$

Observe que a imagem da imersão mínima assim obtida pertence ao gráfico da função:

$$z = \frac{\sinh \theta (x\sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{arccosh} x)}{2} - \frac{xy}{2}$$

e que a aplicação normal de Gauss,  $g = e^{-\theta}(e^u - \tau e^{-u})/(e^u + \tau e^{-u})$ , possui posto 1. Além disso, a curvatura de Gauss da superfície é dada por:

$$K = \frac{1}{\sinh^4(2u) \cosh^2 \theta}.$$

**Exemplo 4.3.8** (Helicóides de tipo tempo). Considere as funções paracomplexas:

$$G(u, v) := \frac{1 - \cos v - \tau p(u) \sin v}{\sqrt{8(1 - \cos v)}}, \quad H(u, v) := \frac{1 + \cos v + \tau p(u) \sin v}{\sqrt{8(1 + \cos v)}},$$

onde  $v \in (0, \pi)$  e  $p(u) = -\tanh(u/2)$ . Primeiramente, note que as equações (4.18) e (4.19) são satisfeitas. Além disso,

$$H \bar{H} + G \bar{G} = \frac{1}{2(1 + \cosh u)} \neq 0.$$

Como

$$\begin{cases} \phi_1 = -\frac{p'(u) \sin v + \tau p(u) \cos v}{2}, \\ \phi_2 = \frac{p'(u) \cos v - \tau p(u) \sin v}{2}, \end{cases}$$

integrando, encontramos:

$$f_1 = \tanh\left(\frac{u}{2}\right) \sin v, \quad f_2 = -\tanh\left(\frac{u}{2}\right) \cos v.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f_3 &= 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \left( \frac{f_1}{2} (G^2 - H^2) - f_2 G H - \tau (G^2 + H^2) \right) dz \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \tau dz = -\frac{v}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Logo, neste caso obtivemos a parametrização de um helicóide mínimo de tipo tempo. Note que a aplicação normal de Gauss

$$g = \frac{\sqrt{1 - \cos v} \, 1 + \cos v + \tau p(u) \sin v}{\sqrt{1 + \cos v} \, 1 - \cos v - \tau p(u) \sin v},$$

possui posto igual a 2 e que a curvatura de Gauss do helicóide é dada por

$$K = 1 + \cosh u.$$

## 4.4 O espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^3$

O espaço de De Sitter  $\mathbb{S}_1^3$  pode ser modelado pelo semi-espaço:

$$\mathbb{R}_+^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0 \right\},$$

dotado da métrica:

$$h = \frac{1}{x_3^2} \left( dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 \right), \quad (4.23)$$

A métrica de curvatura constante (4.23) é invariante à esquerda com respeito a estrutura de grupo de Lie. Além disso, uma base de campos ortonormais invariantes à esquerda com respeito à métrica (4.23) é dada por:

$$E_1 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad E_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad E_3 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

com  $\langle E_3, E_3 \rangle = -1$ . Ao computarmos os colchetes de Lie, obtemos que as únicas constantes de estruturas distintas de zero são:

$$C_{13}^1 = C_{23}^2 = -1, \quad C_{31}^1 = C_{32}^2 = 1.$$

Neste caso, o sistema obtido do item (3) do Teorema 4.2.1 se escreve como:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \psi_3 \bar{\psi}_1 = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \psi_3 \bar{\psi}_2 = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} - (\psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2) = 0. \end{cases}$$

É fácil ver que

$$\phi_a(u, v) = x_3 \psi_a(u, v), \quad a = 1, 2, 3.$$

Em particular, como

$$f_3 = 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f_3 \psi_3 dz,$$

obtemos que:

$$f_3 = \exp \left( 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \psi_3 dz \right).$$

Então, a imersão  $f$ , expressada em termos das componentes  $\psi_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ , é dada por:

$$f(z) = \left( 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f_3 \psi_1 dz, 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f_3 \psi_2 dz, f_3 \right).$$

## 4.5 O grupo $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ Lorentziano

Consideramos o modelo do semi-plano superior para o plano hiperbólico

$$\mathbb{H}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$$

e indicamos por  $x_3$  a coordenada natural em  $\mathbb{R}$ . Muniremos o grupo produto  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  da métrica Lorentziana invariante à esquerda:

$$h = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_2^2} - dx_3^2, \quad (4.24)$$

com respeito a qual

$$E_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad E_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial x_3},$$

são campos ortonormais invariantes à esquerda, com  $\langle E_3, E_3 \rangle = -1$ . Ao calcularmos os colchetes de Lie, obtemos que as únicas constantes de estruturas distintas de zero são:

$$C_{12}^1 = -1, \quad C_{21}^1 = 1.$$



Assim, o sistema dado no item (3) do Teorema 4.2.1 resulta em:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \overline{\psi_1} \psi_2 = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} + \overline{\psi_1} \psi_1 = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} = 0. \end{cases}$$

Além disso, temos que

$$\phi_1 = x_2 \psi_1, \quad \phi_2 = x_2 \psi_2, \quad \phi_3 = \psi_3.$$

Em particular, a segunda equação admite a solução

$$f_2 = \exp\left(2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \psi_2 dz\right)$$

e, integrando, a imersão  $f$  em termos das componentes  $\psi_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ , se torna:

$$f(z) = \left(2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z f_2 \psi_1 dz, f_2, 2 \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \psi_3 dz\right).$$

Observamos que se  $\psi_2$  é uma função  $\mathbb{L}$ -diferenciável, então, da primeira e da última equações do sistema segue que  $\psi_1 \overline{\psi_1} = 0$  e, portanto,

$$\psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} = 0.$$

Considerando, por exemplo,  $\psi_1 = 0$ , obtemos o plano  $x_1 = \text{constante}$ .



---

## Referências Bibliográficas

---

---

- [1] L.V. Ahlfors, *Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg (1973).
- [2] H. Anciaux, *Minimal Submanifolds in Pseudo-Riemannian Geometry*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Universidade de São Paulo (2011).
- [3] P. Andrade, *Enneper immersions*, J. D'analyse Mathématique **75** (1998), 121–134.
- [4] J.L. M. Barbosa, A.G. Colares, *Minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$* , Lecture Notes in Mathematics, **1195**, Springer-Verlag, Berlin (1986).
- [5] L. Di Terlizzi, J.J. Konderak, I. Lacirasella, *On differentiable functions over Lorentz numbers and their geometric applications*, Differ. Geom. Dyn. Syst. **16** (2014), 113–139.
- [6] M. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Basel, (1), Boston (1992).
- [7] S.Y. Cheng, S.T. Yau *Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces*, Ann. of Math. (2), **104** (1976), 407–419.
- [8] S.S. Chern, *Affine minimal hypersurfaces*, Proc. of US-Japan Seminar on Minimal Submanifolds, Tokyo, **1977** (1979), 17–30.

- [9] A.A. Cintra, F. Mercuri, I.I. Onnis, *The Björling problem for minimal surfaces in a Lorentzian three-dimensional Lie group*, Ann. Mat. Pura Appl. **195** (2016), 95-110.
- [10] A.A. Cintra, F. Mercuri, I.I. Onnis, *Minimal surfaces in Lorentzian Heisenberg group and Damek-Ricci spaces via the Weierstrass representation*, J. Geom. Phys. **121** (2017), 396-412.
- [11] A.A. Cintra, I.I. Onnis, *Enneper representation of minimal surfaces in the three-dimensional Lorentz-Minkowski space*, Ann. Mat. Pura Appl. (2017), DOI: 10.1007/s10231-017-0666-z.
- [12] V. Căruțanu, P. Fortuny, P.M. Pădea *A survey on paracomplex geometry*, Rocky Mt. J. Math., **26** (1996), 83–115.
- [13] J. Eells, L. Lemaire, *Selected Topics in harmonic maps*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **50**, Washington, DC, AMS (1983).
- [14] J. Eells, J.H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.
- [15] C.B. Figueroa, *Geometria das subvariedades do grupo de Heisenberg*, Ph.d Thesis, Unicamp, Campinas.
- [16] C.B. Figueroa, F. Mercuri, R.H.L. Pedrosa, *Invariant surfaces of the Heisenberg groups*, Ann. Mat. Pura Appl. **177** (1999), 173–194.
- [17] A. Gray, *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*, Second edition, CRC Press, Boca Raton, FL, 1998.
- [18] O. Kobayashi, *Maximal surfaces in 3-dimensional Lorentz space  $\mathbb{L}^3$* , Tokyo J. Math. **6** (1983), 297–309.
- [19] M. Kokubu, *Weierstrass representation for minimal surfaces in hyperbolic space*, Tôhoku Math. J. **49** (1997), 367–377.
- [20] J.J. Konderak, *A Weierstrass representation theorem for Lorentz surfaces*, Complex Var. Theory Appl. **50** (5), (2005), 319–332.
- [21] L. Koszul, B. Malgrange, *Sur certaines fibrées complexes*, Arch. Math. **9** (1958), 102–109.

- [22] J.H. Lira, M. Melo, F. Mercuri, *A Weierstrass representation for minimal surfaces in 3-dimensional manifolds*, Results. Math. **60** (2011), 311–323.
- [23] R. López, *Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space*, Int. Electron. J. Geom. **7** (1), (2014), 44–107.
- [24] F. Mercuri, S. Montaldo, P. Piu, *Weierstrass representation formula of minimal surfaces in  $\mathbb{H}_3$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Acta Math. Sinica **22** (2006), 1603–1612.
- [25] F. Mercuri, I.I. Onnis, *On the Björling problem in a three-dimensional Lie group*, Illinois Journal of Math., **53** (2009), 431-440.
- [26] S. Montaldo, I.I. Onnis, *Enneper representation and the Gauss map of minimal surfaces in the product  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Matemática Contemporânea **3** (2007), 199–213.
- [27] B. Nelli, H. Rosenberg, *Minimal surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$* , Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **33** (2002), 263–292.
- [28] B. O’Neill, *Semi Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, Inc. London LTD., (1983).
- [29] T. Weinstein, *An introduction to Lorentz surfaces*, De Gruyter Expositions in Math. **22**, Berlin and New York (1996).