ALGEBRA COMPLESSA

Nel corso dei secoli gli insiemi dei numeri sono andati man mano allargandosi per rispondere all'esigenza di dare soluzione a equazioni e problemi sempre nuovi. I **numeri complessi** sono un'estensione dei numeri reali nata inizialmente per consentire di trovare tutte le soluzioni delle equazioni polinomiali. Ad esempio, l'equazione

$$x^2 + 1 = 0$$

non ha soluzioni reali, perché nell'insieme dei numeri reali non esistono numeri il cui quadrato sia negativo. Si introduce quindi un nuovo elemento, l'**unità immaginaria** j, che ha la seguente proprietà

$$j^2 = -1,$$

ossia

$$j = \sqrt{-1}.$$

Si ha quindi $j^3 = -j$, $j^4 = 1$, $j^5 = j$, ecc. In matematica si usa il simbolo i per l'unità immaginaria, ma in elettrotecnica questa notazione porterebbe a confondersi con la corrente.

Un numero complesso è un'espressione del tipo

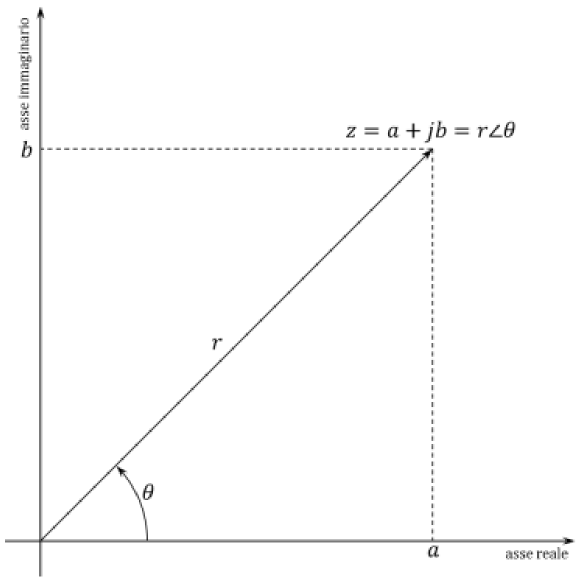
$$z = a + jb,$$

dove a e b sono numeri reali, chiamati rispettivamente **parte reale** e **parte immaginaria** del numero complesso z, che possono essere indicati come

$$a = \mathrm{Re}\{z\},$$

$$b = \mathrm{Im}\{z\}.$$

Il numero complesso $a + jb$ può essere rappresentato in un piano di coordinate cartesiane, chiamato piano complesso, interpretandolo come il punto (a, b). Ossia l'ascissa è a sull'asse reale e l'ordinata è b sull'asse immaginario.



Il numero complesso $z = a + jb$ può anche essere localizzato univocamente sul piano complesso specificando il **modulo** r e la **fase** θ. È quindi possibile rappresentare un numero complesso con la sua forma polare

$$z = r\mathrm{e}^{j\theta} = r\angle\theta.$$

Dalla figura si può vedere che valgono le uguaglianze

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \begin{cases} tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| & a > 0, b > 0 \\ \pi - tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| & a < 0, b > 0 \\ -\pi + tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| & a < 0, b < 0 \\ -tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right| & a > 0, b < 0 \end{cases}$$

$$a = rcos\theta$$

$$b = rsin\theta$$

Dato un numero complesso $z = a + jb$, il **complesso coniugato** di z è indicato con $z^* = a - jb$.

Due numeri complessi sono uguali se e solo se sono uguali sia la parte reale sia quella immaginaria. Questo equivale ad affermare che due numeri complessi sono uguali se e solo se sono uguali sia i moduli sia le fasi.

La somma e la sottrazione di due numeri complessi si ottengono secondo le regole seguenti:

$$(a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2),$$

$$(a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2).$$

Si ha quindi che la somma tra due numeri complessi coniugati è pari al doppio della loro parte reale,

$$z + z^* = (a + jb) + (a - jb) = 2a = 2\mathrm{Re}\{z\},$$

mentre la loro differenza è pari al doppio della parte immaginaria del minuendo moltiplicato per j,

$$z - z^* = (a + jb) - (a - jb) = 2jb = 2j\mathrm{Im}\{z\}.$$

La moltiplicazione e la divisione di due numeri complessi è più conveniente in forma polare. Infatti, nel caso della moltiplicazione, il modulo del prodotto è dato dal prodotto dei moduli e la sua fase è data dalla somma delle fasi,

$$\left(r_1 \mathrm{e}^{j\theta_1}\right)\left(r_2 \mathrm{e}^{j\theta_2}\right) = r_1 r_2 \mathrm{e}^{j(\theta_1 + \theta_2)} = r_1 r_2 \angle(\theta_1 + \theta_2).$$

Si ha quindi che la moltiplicazione tra due numeri complessi coniugati è pari al quadrato del loro modulo,

$$zz^* = \left(r\mathrm{e}^{j\theta}\right)\left(r\mathrm{e}^{-j\theta}\right) = r^2 = |z|^2.$$

Nel caso in cui i numeri complessi siano dati in forma rettangolare, si utilizza la regola secondo cui $j^2 = -1$,

$$(a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = a_1a_2 + ja_1b_2 + ja_2b_1 + j^2b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Nel caso della divisione, il modulo del quoziente è dato dal quoziente dei moduli e la sua fase è data dalla differenza delle fasi,

$$\frac{r_1 \mathrm{e}^{j\theta_1}}{r_2 \mathrm{e}^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} \mathrm{e}^{j(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} \angle(\theta_1 - \theta_2).$$

Nel caso in cui i numeri complessi siano dati in forma rettangolare, si può moltiplicare il numeratore e il denominatore per il complesso coniugato del denominatore, trasformando così il denominatore in un numero reale,

$$\frac{a_1+jb_1}{a_2+jb_2}=\frac{(a_1+jb_1)(a_2-jb_2)}{(a_2+jb_2)(a_2-jb_2)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2-j(a_1b_2-a_2b_1)}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}-j\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_2^2+b_2^2}.$$

Le potenze e le radici dei numeri complessi in forma polare seguono la regola dell'esponente,

$$z^n=\left(r\mathrm{e}^{j\theta}\right)^n=r^n\mathrm{e}^{jn\theta}=r^n\angle n\theta,$$

$$\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}=\left(r\mathrm{e}^{j\theta}\right)^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{j\frac{\theta}{n}}=\sqrt[n]{r}\angle\frac{\theta}{n}.$$

L'**identità di Eulero** afferma che

$$\mathrm{e}^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta.$$

Tutte le usuali formule trigonometriche nel piano complesso discendono dall'identità di Eulero. Le due formule più importanti sono

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{e}^{j\theta}+\mathrm{e}^{-j\theta}}{2}\qquad \sin\theta=\frac{\mathrm{e}^{j\theta}-\mathrm{e}^{-j\theta}}{2j}.$$

MATRICI

Una **matrice** $m\times n$ è un quadro di mn numeri reali o complessi disposti in m righe e n colonne,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}.$$

Una matrice è **quadrata** se $m=n$, in caso contrario viene detta **rettangolare**.

Data una matrice $\boldsymbol{A}$, la sua **aggiunta** $\boldsymbol{A}^*$ si ottiene scambiando le righe di $\boldsymbol{A}$ con le sue colonne e coniugandone gli elementi. Se la matrice $\boldsymbol{A}$ è reale, si parla di matrice **trasposta** $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^*$.

Una matrice quadrata $\boldsymbol{A}$ si dice **invertibile** o **non singolare** se esiste una matrice $\boldsymbol{A}^{-1}$, detta **matrice inversa**, tale che $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$, dove $\boldsymbol{I}$ è la matrice identità.

Il **determinante** $\det(\boldsymbol{A})$ o $|\boldsymbol{A}|$ è una funzione che associa a ciascuna matrice quadrata un numero reale, che può essere calcolato mediante la formula di Laplace

$$\det(\boldsymbol{A})=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det\left(\boldsymbol{A}_{ij}\right),$$

essendo $\boldsymbol{A}_{ij}$ la sottomatrice che si ottiene da $\boldsymbol{A}$ eliminando l'i -esima riga e la j-esima colonna. Una matrice $\boldsymbol{A}$ è non singolare se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

Nel caso di matrici 2×2, con due righe e due colonne, il determinante è definito come

$$\det(\boldsymbol{A})=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Nel caso di matrici 3×3, con tre righe e tre colonne, il determinante è definito come

$$\det(\boldsymbol{A})=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}).$$

Per sistemi di ordine superiore, molto spesso è più conveniente utilizzare software di calcolo, come Excel o Matlab.

Il **rango** $\text{rank}(\boldsymbol{A})$ di una matrice può essere definito come il massimo numero di righe (o colonne) linearmente indipendenti. Una matrice rettangolare di dimensione $m \times n$ è detta **a rango pieno** se il suo rango è pari a $\text{rank}(\boldsymbol{A}) = \min(m, n)$. Una matrice quadrata è a rango pieno se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

TRASFORMAZIONI LINEARI

Una matrice reale $\boldsymbol{A}$ di dimensione $m \times n$ rappresenta la generica **trasformazione lineare** tra due spazi lineari. Se T è una trasformazione lineare descritta dalla **matrice di trasformazione** $\boldsymbol{A}$ che mappa lo spazio $\Re^n$ nello spazio $\Re^m$ e $\boldsymbol{x}$ è un vettore colonna di dimensione n, allora

$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

Son trasformazioni lineari la rotazione, lo scaling, la proiezione ortogonale.

SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

Un **sistema di equazioni lineari** $m \times n$ assume la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

ma viene spesso indicato in maniera più compatta utilizzando la notazione matriciale

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$,

dove $\boldsymbol{A}$ è la matrice dei coefficienti di dimensione $m \times n$, $\boldsymbol{b}$ è il vettore dei termini noti di dimensione $m \times 1$ e $\boldsymbol{x}$ è il vettore soluzione di dimensione $n \times 1$.

Nel caso in cui $m = n$, la matrice $\boldsymbol{A}$ è quadrata, e il sistema lineare ammette una e una sola soluzione se e solo se il determinante di $\boldsymbol{A}$ è diverso da zero ($\boldsymbol{A}$ ha rango pieno).

Nelle applicazioni si incontrano frequentemente sistemi lineari con un numero di equazioni differente dal numero delle incognite ($m \neq n$). Ipotizzando che $\boldsymbol{A}$ sia a rango pieno, si possono presentare due casi: nel caso in cui $m > n$, il sistema si dice **sovradeterminato**, sono disponibili più equazioni che incognite, per cui il problema potrebbe non avere soluzione; nel caso in cui $m < n$, il sistema si dice **sottodeterminato**, vi sono più incognite che equazioni, per cui il problema potrebbe avere infinite soluzioni.

Il caso di rango non pieno, incluso quello in cui la matrice $\boldsymbol{A}$ è quadrata e singolare, può essere ricondotto ad uno dei due casi precedenti.

Un sistema lineare di n equazioni in n incognite si dice **omogeneo** se il vettore dei termini noti $\boldsymbol{b}$ è un vettore nullo. Un sistema **omogeneo** ha sempre come soluzione la soluzione banale $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Se un vettore diverso dalla soluzione banale è soluzione del sistema, essa è detta **autosoluzione** del sistema omogeneo. Se un sistema lineare omogeneo ha un'autosoluzione, esso ne ha infinite, ed esse differiscono tra loro per una costante arbitraria non nulla. Un sistema lineare omogeneo $n \times n$ ha autosoluzioni se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo.

REGOLA DI CRAMER

La soluzione di sistemi di equazioni lineari $n \times n$, che si incontrano nella teoria dei circuiti, si trova abbastanza facilmente utilizzando la **regola di Cramer**. L'uso della regola di Cramer richiede di conoscere il concetto di determinante.

Per illustrare il metodo di Cramer, si risolve a titolo di esempio un sistema di due equazioni in due incognite nella forma più generale. Il metodo può essere generalizzato senza problemi a sistemi di ordine superiore. Tale sistema si scrive nella forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases},$$

dove x_1 e x_2 sono le due incognite da determinare. I coefficienti a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} sono quantità note. Anche le due quantità nel secondo membro, b_1 e b_2, sono note. L'insieme di equazioni può essere riscritto in forma matriciale, come mostrato dall'equazione

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Nell'equazione precedente una matrice di coefficienti moltiplicata per un vettore di variabili incognite viene eguagliata a un vettore di termini noti al secondo membro. Utilizzando le formule seguenti, si utilizza poi la regola di Cramer per trovare x_1 e x_2

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Quindi la soluzione è data dal rapporto di due determinanti: il denominatore è il determinante della matrice dei coefficienti, mentre il numeratore è il determinante della stessa matrice con il vettore dei termini noti sostituito al posto della colonna della matrice dei coefficienti corrispondente alla variabile desiderata, quindi la prima colonna per x_1, la seconda per x_2, e così via. In un problema di analisi circuitale la matrice dei coefficienti è formata dai valori delle impedenze (o delle ammettenze), il vettore delle incognite è costituito dalle correnti di maglia (o dalle tensioni ai nodi), e il vettore dei termini noti contiene le correnti e le tensioni dei generatori.

In pratica, molti casi concreti riguardano sistemi di equazioni lineari.

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Si dicono autovalore e autovettore di una matrice $\boldsymbol{A}$ uno scalare λ ed un vettore $\boldsymbol{x} \neq 0$ che verifichino la relazione

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

Riscrivendo l'equazione nella forma

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0,$$

affinché questo sistema lineare ammetta un'autosoluzione è necessario che il suo determinante

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$$

si annulli. $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ è un polinomio di grado n in λ, ed è detto polinomio caratteristico di $\boldsymbol{A}$.

Per ciascun autovalore λ_k, $k = 1, \dots, n$, una soluzione non nulla del sistema singolare

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_k \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$$

fornisce il corrispondente autovettore che, nel caso in cui la matrice $\boldsymbol{A} - \lambda_k \boldsymbol{I}$ abbia rango $n - 1$, resta quindi determinato a meno di una costante moltiplicativa.