UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA MECCANICA, CHIMICA
E DEI MATERIALI

C.I. Costruzioni di Macchine

Elementi Costruttivi delle Macchine

- 202002~~08~~05 -

Si consideri la figura 1. La trave ABC è incastrata in C al telaio tramite una piastra e due viti mordenti, in B è sostenuta da una molla di rigidezza k = 200 N/mm e in A è sollecitata da una massa eccentrica rotante attorno ad un asse ortogonale al piano del disegno. Sapendo

- che la molla è realizzata in acciaio al silicio (S_{ut} = 1200 MPa, E = 208 GPa, ν = 0.29);
- che la lunghezza AC è pari a 300 mm e che la molla è posta in mezzeria;
- che molla e trave sono connessi in modo da realizzare un vincolo bilatero;
- che la massa eccentrica è pari a 1.013 kg, ruota a 3000 giri/minuto ed il baricentro si trova a 50 mm dall'asse (ossia dal punto A);
- che la trave è realizzata con un trafilato di acciaio a sezione quadrata di lato esterno pari a 30 mm e spessore 5 mm.

1. Si dimensionino le viti in modo da garantire una vita di 600 000 cicli.
2. Si dimensioni la molla a vita indefinita.

Per le dimensioni della piastra si faccia riferimento alla figura 2.
Il candidato ipotizzi i dati eventualmente mancanti utilizzando valori compatibili a quelli forniti ed alla tipologia del problema.

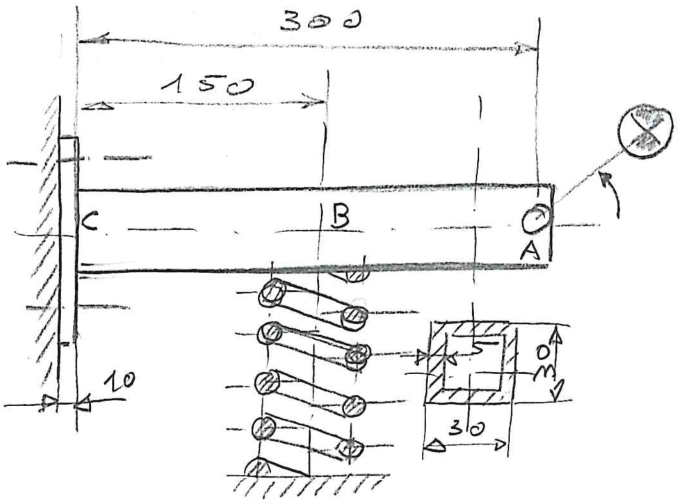


fig. 1

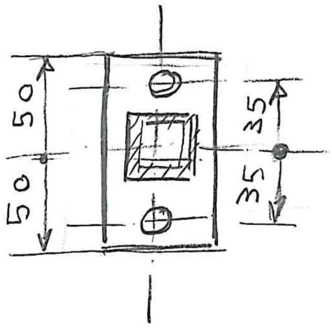
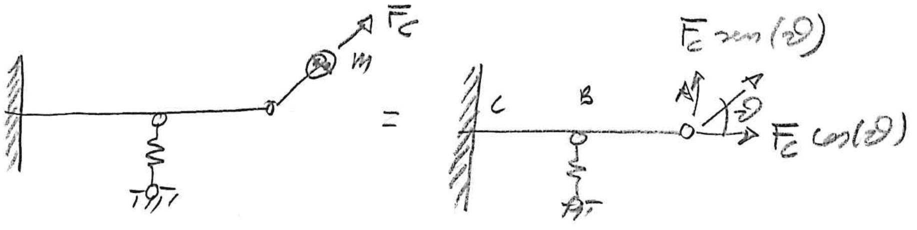


fig. 2

DIMCM - Via Marengo 2 - 09123 CAGLIARI - ITALIA - Tel. (+39) 070 6755951 - FAX (+39) 070 6755717 -C.F. 80019600925 - P.I. 00443370929

05/12/2020

I



La struttura è schematizzata qui.

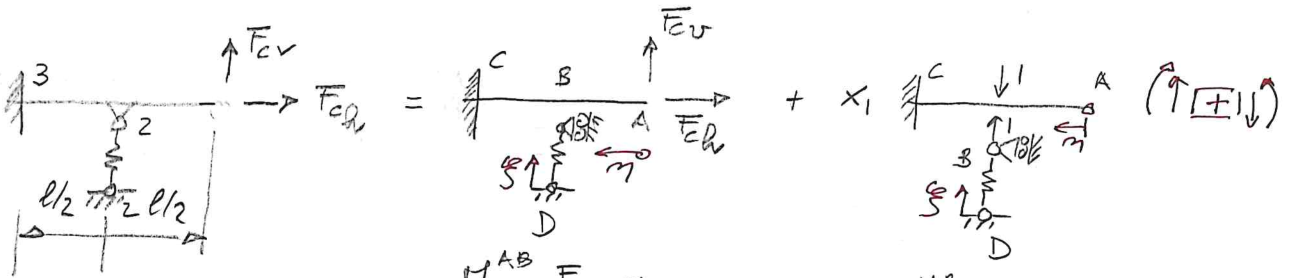
Si noti che quando abbiamo il M flettente max. la sollecitazione dovuta alla componente normale è nulla (e viceversa)

La Forza centrifuga è pari a

$$\omega = \frac{2\pi \cdot 3000}{60} = 100\pi \ \frac{1}{s}$$

$$F_c = m\,\omega^2 r = 1{,}013 \cdot (100\pi)^2 \cdot 0{,}05 \cong 5000\ N$$

quindi, poiché la sezione resistente della trave è $30^2 - 20^2 = 500\ mm^2$, la sollecitazione dovuta alla componente normale sulla trave è sicuramente trascurabile. In realtà noi siamo interessati alle sollecitazioni su viti e molla, quindi procediamo al calcolo completo:



N.b.: $F_{cv} = F_c \sin\theta$, $F_{ch} = F_c \cos\theta$

$$M_0^{AB} = F_{cv} \cdot \eta \qquad M_1^{AB} = \emptyset$$

$$M_0^{BC} = F_{cv} \cdot \eta \qquad M_1^{BC} = -1\left(\eta - \frac{l}{2}\right)$$

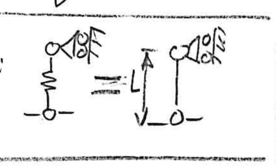
$$N_\emptyset^{AB} = N_0^{BC} = F_{ch} \qquad N_1^{AB} = N_1^{BC} = \emptyset$$

$$N_{BD} = \emptyset \qquad N_1^{BD} = 1$$

$$\eta_1 = \emptyset \qquad \eta_{10} = \int_{l/2}^{l} -\frac{F_{cv}\,\eta\left(\eta - \frac{l}{2}\right)}{ES}\,d\eta = \frac{F_{cv}}{ES}\left[-\frac{l^3}{3} + \frac{l^3}{4} + \frac{l^3}{24} - \frac{l^3}{16}\right] = -\frac{5}{48}\,\frac{F_{cv}\,l^3}{ES}$$

$$\eta_{11} = \int_{l/2}^{l} \left(\eta - \frac{l}{2}\right)^2 \frac{1}{ES}\,d\eta + \int_0^L \frac{1}{EA}\,d\xi = \frac{1}{ES}\left[\frac{\eta^3}{3} + \frac{l^2}{4}\eta - \eta^2\frac{l}{2}\right]_{l/2}^{l} + \frac{L}{EA} = \frac{l^3}{24ES} + \frac{1}{k}$$

N.b.:



05/12/2020 II

$$x_1 = -\frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} = \frac{\frac{5}{48}\frac{F_{cv} l^3}{ES}}{\frac{l^3 k + 24ES}{24ESk}} = \frac{5}{\cancel{48}_{2}} \frac{F_{cv} l^3}{\cancel{ES}} \cdot \frac{\cancel{24ES}k}{k l^3 + 24ES} = \frac{5}{2} \frac{F_v\, l^3 k}{k l^3 + 24ES}$$

$$J = \frac{30^4}{12} - \frac{20^4}{12} \cong 54167\ mm^4$$

$$x_1 = F_{cv} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{300^3 \cdot 200}{200 \cdot 300^3 + 24 \cdot 208000 \cdot 54167} = F_{cv} \cdot 0{,}049\ [N]$$

ossia $x_1 \cong \frac{F_{cv}}{20}\ [N]$

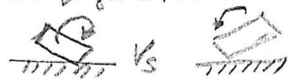
Il M_f in C quindi risulta $(M = M_0 + x_1 M_1) = F_v\, l - \frac{F_c}{20}\frac{l}{2} = \frac{39}{40} F_v\, l$

La sollecitazione normale in C risulta $N = F_c h$

Nell'ipotesi di piastra rigida, possiamo scrivere che

$$F_e^{MAX} = \frac{M_f \cdot b_2}{b_1^2 + b_2^2} = \frac{M_f \cdot 85}{85^2 + 15^2} = M_f \cdot \frac{85}{7225 + 225} = M_f \cdot 0{,}0114\ N$$

Quando il M_f cambia di segno la piastra cambia configurazione



Vs

Quindi la $F_e(M_f)$ è sempre positiva

Quindi la F_e nella vite è

$$F_e(\vartheta) = \left|\frac{39}{40} \cdot l \cdot 0{,}0114 \cdot F_c\, sen(\vartheta)\right| + \frac{1}{2} F_c \cos(\vartheta) = F_c \left[3{,}34 |sen(\vartheta)| + 0{,}5 \cos(\vartheta)\right]$$

La funzione in [ ] è facilmente analizzabile se ignoriamo il modulo:
↳ Ossia supponiamo $\vartheta < \pi$

$$\frac{df}{d\vartheta} = 3{,}34 \cos(\vartheta) - 0{,}5\, sen(\vartheta) = \emptyset \Rightarrow f(\vartheta) = 6{,}68 \text{ max}$$

$$\vartheta = 1{,}42 \quad (81{,}486°)$$

Quindi la $\boxed{F_e^{MAX} = 5000\,[3{,}34\, sen(1{,}42) + 0{,}5 \cos(1{,}42)] = 16886\ N}$

La Forza max (e min) sulla mola si ha invece quando F_v è massima (minima), quindi

$$\boxed{F_m = \pm \frac{5}{2} \cdot \frac{5000 \cdot 300^3 \cdot 200}{200 \cdot 300^3 + 24 \cdot 208 \cdot 54167} = 5000 \cdot 0{,}049 = \pm 245\ N}$$

La $F_{e_{min}}$ sulla vite è ovviamente $\boxed{F_{e_{min}} = -\frac{1}{2} F_c = -2500\ N}$ $(\vartheta = \pi)$

Si noti che la F_c risultante della stima della sola componente flessionale è di poco inferiore:

$$M_f(\vartheta = \tfrac{\pi}{2}) = \frac{39}{40} \cdot \underbrace{5000}_{E} \cdot \underbrace{300}_{\ell} = 1462500 \text{ Nmm}$$

per cui $\quad F_c(\vartheta = \frac{\pi}{2}) = \dfrac{1462500 \cdot 85}{85^2 + 15^2} = 16686 \text{ N}$

Ossia il problema poteva tranquillamente essere studiato considerando le due configurazioni a $\vartheta = \emptyset$ e $\vartheta = \pi/2$

Tale conclusione è rafforzata se si considera che il dimensionamento statico dovrà garantire la resistenza ad attrito. In questo caso l'area della vite può essere stimata come

$$A = \eta \frac{F_c + F_e f k_B}{k_i \sigma_p f}$$ che può essere approssimata con $A = \dfrac{F_c \eta + F_e f}{k_i \sigma_p f}$

assumendo $\eta = 1{,}5$, $k_i = 0{,}6$, $f = 0{,}1$ l'area risulta

$$A = \frac{F_{cv}\,\eta + f\,E\,[3{,}34\,|\sin(\vartheta)| + 0{,}5\cos(\vartheta)]}{\sigma_p k_i f} =$$

$$= \frac{F_c}{\sigma_p k_i f} \cdot [3{,}34(\eta + f)\,|\sin(\vartheta)| + 0{,}5 \cdot f \cos(\vartheta)]$$

Il massimo si ottiene studiando la funzione in parentesi quadra.

Assumendo $\vartheta < \pi$ abbiamo

$$f_{[\,]} = 5{,}34 \sin(\vartheta) + 0{,}05 \cos(\vartheta)$$

Derivando e ponendo il risultato uguale $\emptyset$ si ottiene $\tg(\vartheta) = \dfrac{5{,}34}{0{,}05}$

Ossia $\vartheta = 1{,}56$ $(89{,}46°)$