Analisi Matematica 3

prof. Antonio Greco

Alcune domande da rivolgere agli studenti in sede d'esame[(*)]

18 giugno 2018

Equazioni differenziali

1. Spiegare che cosa si intende per *"equazione differenziale lineare"*.

2. Spiegare che cosa si intende per *"forma normale"* di un'equazione differenziale.

3. Illustrare il teorema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale.

4. Illustrare la struttura dello spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale $y'' + b\,y' + c\,y = f(t)$, dove b e c sono costanti assegnate e $f(t)$ è una data funzione continua.

5. Trovare le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2 - y \\ y(1) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = 2 - y \\ y(0) = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = y + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} xy' = y \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' = y' \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + 3y' = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' = -4y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + 4y = -8\,\cos^2 t \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(*) Vedere anche gli esercizi assegnati a lezione

6. Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni:

$$y' = y^2 \qquad y' = 1 + y^2 \qquad y' = |y|$$

$$y'' + y = 1 \qquad y'' + 4y = 0$$

$$y'' + \omega^2\, y = 0, \text{ essendo } \omega > 0$$

$$y'' = y' \qquad y'' + y' = 0 \qquad y'' + \tfrac{1}{2}\, y' + y = 0$$

7. Spiegare che cosa si intende per *"determinante wronskiano"*.

8. Fra tutte le soluzioni dell'equazione $y'' = y'$, determinare quelle il cui grafico passa per l'origine.

Successioni e serie di funzioni

9. Dare la definizione di *"convergenza uniforme"* di una successione di funzioni.

10. Fare un esempio di una successione di funzioni convergente puntualmente ma non uniformemente.

11. Illustrare un teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

12. Stabilire se la successione di funzioni data da $y_n(x) = x^n$ converge puntualmente o uniformemente nell'intervallo $(0, 1) \subset \mathbb{R}$.

13. Trovare il limite delle seguenti successioni di funzioni:

$$y_n(x) \equiv \frac{1}{n} \qquad y_n(x) = (\operatorname{sen} x)^n \qquad y_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

14. Dare la definizione di *"convergenza uniforme"* di una serie di funzioni.

15. Fare un esempio di serie di funzioni che converge puntualmente ma non uniformemente.

16. Dare la definizione di *"convergenza totale"* di una serie di funzioni.

17. Spiegare che cosa si intende per *serie di potenze*.

18. Spiegare che cos'è il *raggio di convergenza* di una serie di potenze.

19. Discutere la totale convergenza, oppure, a scelta, l'uniforme convergenza della serie
$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

20. Trovare l'intervallo di convergenza della serie precedente.

21. Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:
$$\sum_{k=1}^{+\infty} x^k \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} k\, x^k \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{2^k}$$

22. Trovare la somma della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} x^k$.

23. Trovare la somma della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

24. Stabilire se la serie precedente converge totalmente.

25. Stabilire se la serie
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{k^2}$$
converge totalmente nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

26. Indicata con $f(x)$ la somma della serie precedente, sviluppare $f(x)$ in serie di Fourer.

27. Stabilire se esistono dei numeri a_k e b_k tali che risulti
$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \text{ per ogni } x \in \mathbb{R},$$
ed in caso affermativo determinare il valore di a_k e b_k.

28. Determinare i coefficienti dello sviluppo di Fourier della funzione $f(x) = \operatorname{sen} x$.

I principali spazi funzionali

29. Fissato un numero reale $x_0 \in \mathbb{R}$, e posto $x_{k+1} = \operatorname{sen} x_k$ per $k = 0, 1, 2, \dots$, stabilire se la successione degli x_k ammette limite, ed in caso affermativo determinarne il valore.

30. Definire la metrica canonica dello spazio funzionale $C^1([a,b])$, detto talvolta "spazio di Lagrange".

31. Definire la norma canonica dello spazio funzionale $C^1([a,b])$, detto talvolta "spazio di Lagrange".

32. Stabilire come deve essere preso l'intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset \mathbb{R}$ affinché lo spazio funzionale $C^1([a,b])$, detto talvolta "spazio di Lagrange", risulti completo rispetto alla metrica canonica.

33. Fare un esempio, se possibile, di una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e di una costante $\alpha \in (0,1)$ tali che
$$|f(x) - f(y)| < \alpha\, |x - y| \text{ per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

34. Fare un esempio di una funzione lipschitziana $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

35. Fare un esempio di una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia una contrazione.

36. Fare un esempio di un'applicazione $F\colon C^1([a,b]) \to C^1([a,b])$ che sia una contrazione rispetto alla metrica canonica dello spazio funzionale $C^1([a,b])$, detto talvolta "spazio di Lagrange".

37. Stabilire se l'applicazione $F\colon C^1([a,b]) \to C^1([a,b])$, che alla funzione $y \in C^1([a,b])$ associa la funzione $z \in C^1([a,b])$ data da
$$z(x) = \int_a^x y(t)\, dt$$
è una contrazione rispetto alla metrica canonica dello spazio funzionale $C^1([a,b])$, detto talvolta "spazio di Lagrange".

38. Stabilire se nello spazio euclideo bidimensionale $\mathbb{R}^2$ esistono norme diverse da quella canonica ma equivalenti ad essa.

Misura e integrazione secondo Lebesgue

39. Determinare una successione di intervalli aperti $(a_k, b_k) \subset \mathbb{R}$ la cui intersezione sia l'intervallo chiuso $[0, 1]$.

40. Determinare una successione di intervalli chiusi $[a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$ la cui unione sia l'intervallo aperto $(0, 1)$.

41. Determinare una successione di intervalli chiusi $[a_k, b_k]$, a due a due privi di punti interni in comune, la cui unione sia l'intervallo aperto $(0, 1)$.

42. Fare un esempio di una successione decrescente di intervalli $I_k \subset \mathbb{R}$.

43. Fare un esempio di una successione decrescente di intervalli non vuoti $I_k \subset \mathbb{R}$ la cui intersezione sia l'insieme vuoto.

44. Determinare la misura di Lebesgue unidimensionale dell'intervallo $I_k = [0, \frac{1}{k}]$ e quella dell'intersezione $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} I_k$.

45. Determinare, applicando la definizione, la misura di Lebesgue unidimensionale dell'intervallo aperto $(0, 1) \subset \mathbb{R}$.

46. Determinare, applicando la definizione, la misura di Lebesgue unidimensionale dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

47. Scrivere una successione di funzioni $f_k \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ integrabili secondo Riemann e convergenti ad una funzione non integrabile secondo Riemann.

48. Stabilire se la funzone $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ è integrabile secondo Lebesgue sull'intervallo $(-1, 1)$, ed in caso affermativo calcolare l'integrale.

49. Calcolare l'integrale di Lebesgue della funzione caratteristica dell'insieme dei numeri razionali, talvolta indicata con $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$, esteso all'intervallo $(0, 1) \subset \mathbb{R}$.

50. Determinare il limite puntuale della successione delle funzioni $f_k \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ date da $f_k(x) = x^k$, e stabilire se si può passare al limite sotto il segno di integrale. Stabilire se sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Beppo Levi o di quello della convergenza dominata.

51. Determinare il limite puntuale della successione delle funzioni $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ date da $f_k(x) = k\, x^{k-1}$ e stabilire se si può passare al limite sotto il segno di integrale. Stabilire se sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Beppo Levi o di quello della convergenza dominata.

52. Determinare il limite puntuale della successione delle funzioni $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ date da

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0, \\ k - k^2\, x, & \text{se } x \in (0, \frac{1}{k}), \\ 0, & \text{se } x \in [\frac{1}{k}, 1], \end{cases} \tag{1}$$

e stabilire se si può passare al limite sotto il segno di integrale. Stabilire se sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Beppo Levi o di quello della convergenza dominata.

53. Stabilire se la successione (1) soddisfa le ipotesi del lemma di Fatou, ed in caso affermativo scrivere la tesi.

54. Determinare il limite puntuale della successione delle funzioni $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ date da

$$f_k(x) = \begin{cases} 2k^2\, x, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2k}], \\ 2k(1 - kx), & \text{se } x \in (\frac{1}{2k}, \frac{1}{k}), \\ 0, & \text{se } x \in [\frac{1}{k}, 1], \end{cases} \tag{2}$$

e stabilire se si può passare al limite sotto il segno di integrale. Stabilire se sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Beppo Levi o di quello della convergenza dominata.

55. Stabilire se la successione (2) soddisfa le ipotesi del lemma di Fatou, ed in caso affermativo scrivere la tesi.

56. Determinare il limite puntuale della successione delle funzioni $f_k\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ date da

$$f_k(x) = k\, x\, e^{-k\, x^2} \tag{3}$$

e stabilire se si può passare al limite sotto il segno di integrale. Stabilire se sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Beppo Levi o di quello della convergenza dominata.

57. Stabilire se la successione (3) soddisfa le ipotesi del lemma di Fatou, ed in caso affermativo scrivere la tesi.