

fondamenti della matematica il programma logicista.

- Il programma logicista è legato ai nomi di G. Frege, B. Russell e L. Wittgenstein.
- Frege per primo sostenne che l'aritmetica non è altro che logica nel senso che le nozioni aritmetiche sono definibili in termini logici e che i teoremi dell'aritmetica sono deducibili a partire dai principi della logica.

Frege senso e significato (denotazione):
il problema dell'uguaglianza.

- differenza tra “ $a=a$ ” e “ $a=b$ ”
- $a=a$: vera a-priori; necessaria; universale.
- $a=b$: vera a-posteriori; contingente; particolare.

senso e significato

- La soluzione offerta da Frege si articola distinguendo il senso di un'espressione dal suo significato o denotazione.
- “a” e “b” sono uguali in quanto significano, denotano uno stesso oggetto, ma questo oggetto viene descritto in termini differenti.

Espero e fosforo

stella della sera



senso

stella del mattino

Espero=Fosforo

Venere *significato o denotazione*

Venere ha l'aspetto di una stella lucentissima di colore giallo-biancastro, di gran lunga più brillante di qualsiasi altra stella nel firmamento. Raggiunge la sua massima brillantezza poco prima dell'alba o poco dopo il tramonto e per questa ragione è spesso stato chiamato da popoli antichi la "Stella del Mattino" (Fosforo) o la "Stella della Sera" (Espero).

senso e denotazione: nomi propri

- la denotazione di un nome proprio o di una descrizione definita è l'oggetto a cui il nome si riferisce. Il senso invece è il modo di darsi dell'oggetto, la via per raggiungere l'oggetto denotato.
- Nel caso del nome “Aristotele”, si potrebbe assumere come senso: “l'allievo di Platone”, “il maestro di Alessandro Magno”.
- Il senso è ciò che un parlante competente di una lingua deve conoscere per determinare la denotazione di un'espressione.
- Dato un termine singolare T prima afferriamo il senso di T e, poi attraverso T, determiniamo il suo riferimento.

il senso degli enunciati

- Per Frege il senso di un enunciato è il pensiero che esso esprime, il contenuto proposizionale che costituisce l'oggetto della traduzione.
- “It is raining” e “Piove” esprimono lo stesso senso, ovvero lo stesso pensiero.

denotazione degli enunciati

- Frege sostiene che siamo interessati a conoscere la denotazione di un enunciato solo quando siamo interessati alla loro verità.
- Nelle opere d'immaginazione il fatto che le vicende narrate abbiano un carattere fittizio non ci impedisce di comprenderle e neppure ci chiediamo se gli enunciati che le compongono indichino qualcosa di reale, al di là del linguaggio.
- Il problema della denotazione si pone solo se l'enunciato è usato per fare un'affermazione.

la denotazione degli enunciati

- La denotazione di un enunciato è il suo valore di verità: tutti gli enunciati veri hanno la stessa denotazione, il Vero, e tutti gli enunciati falsi hanno come significato il Falso.
- Questa concezione fregeana permette di produrre un calcolo degli enunciati, una logica vero-funzionale

logica estensionale

- si stabilisce una distinzione tra proposizioni elementari, o atomiche, e proposizioni molecolari: le proposizioni molecolari sono costruite sulla base delle proposizioni elementari mediante l'impiego di connettivi o operatori.
- Le proposizioni atomiche sono vere o false, e i connettivi proposizionali sono definiti in modo tale che il valore di verità di una proposizione molecolare è determinato unicamente dai valori di verità delle proposizioni elementari che la costituiscono.
- Wittgenstein nel 1921 (*Tractatus logico-philosophicus*) introdusse le tavole di verità

tavole di verità

A	$\neg A$
F	V
V	F

A	B	$A \wedge B$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

A	B	$A \vee B$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

A	B	$A \supset B$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

A	B	$A \equiv B$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

tavole di verità e classificazione delle proposizioni

- Le tavole di verità forniscono un metodo meccanico per calcolare tutti i possibili valori di una proposizione molecolare.
- Qualora vengano costruite le tavole di verità complete troviamo che esse si dividono in tre classi:
- quelle che sono vere per certi valori e false per altri;
- quelle che sono false per tutti i valori, chiamate contraddizioni;
- quelle che sono sempre vere per tutti i valori, chiamate tautologie.

principio di non contraddizione

$\neg (p \wedge (\neg p)) =$ principio di non contraddizione

\neg	p	$\neg p$	$(p \wedge (\neg p))$
V	V	F	F
V	F	V	F

principio del terzo escluso

$p \vee (\neg p)$ principio del terzo escluso

p	$\neg p$	$p \vee (\neg p)$
V	F	V
F	V	V

equivalenze

$$(\neg p \supset q) \equiv (p \vee q)$$

p	q	$(\neg p \supset q)$	\equiv	$(p \vee q)$
V	V	$(F \supset V) = V$	V	$(V \vee V) = V$
F	F	$(V \supset F) = F$	V	$(F \vee F) = F$
F	V	$(V \supset V) = V$	V	$(F \vee V) = V$
V	F	$(F \supset F) = V$	V	$(V \vee F) = V$

$$(p \supset q) \equiv \neg(p \wedge \neg q)$$

p	q	$(p \supset q)$	\equiv	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	F	F	V	F
V	V	V	V	V
F	F	V	V	V
F	V	V	V	V

la natura della logica 1/2

- La natura dei giudizi logici e matematici era stato indicato in modo vago dalla riflessione metodologica precedente.
- Leibniz li aveva definiti “necessari, veri in ogni mondo possibile”
- Kant invece diceva che “erano giudizi analitici universali e necessari”
- Per Wittgenstein i giudizi logici sono “enunciati veri in virtù del loro significato”, ovvero sono enunciati veri in virtù della loro forma.

la natura della logica 2/2

In questo senso le proposizioni della logica non dicono nulla del mondo: sono proposizioni analitiche, che non possono “essere confermate dall’esperienza, così come dall’esperienza non possono essere infirmate”. “Ma tutte le proposizioni della logica dicono lo stesso. Ossia nulla” (5.43).

La logica rappresenta la struttura del linguaggio, e il linguaggio descrive la realtà; in questo modo, tramite il linguaggio, la logica rispecchia la struttura del mondo:

“Le proposizioni della logica descrivono l’armatura del mondo, o piuttosto, la rappresentano” (6.124).

Wittgenstein: fatti e stati di cose

- Essenziale per comprendere il criterio di demarcazione è la distinzione che Wittgenstein compie tra *fatti*, “il mondo si divide in fatti”, e *stati di cose*, “uno stato di cose e una combinazione di oggetti”.
- Uno *stato di cose* è un fatto *logicamente possibile*,
- Un *fatto* è uno stato di cose che *sussiste davvero*.
- Ogni proposizione che corrisponde a uno stato di cose è significativa (è dotata di senso)
- una proposizione che corrisponde a un fatto è anche vera (ha una denotazione)

principio di verificaione 1

- Poiché nulla di illogico può accadere, avremo che la logica descrive tutti i possibili stati di cose, dunque non si può dare alcun fatto che non sia previsto dalla logica.
- Se assumiamo inoltre che una proposizione significativa è una raffigurazione logica di uno stato di cose, ovvero ci indica come arrivare alla sua denotazione, ovvero alla sua verità.

La tesi di Wittgenstein (secondo Russell)

- “La Funzione essenziale del linguaggio è asserire o negare i fatti. Data la sintassi di un linguaggio, il significato di un enunciato è determinato non appena sia noto il significato delle parole componenti.
- Affinché un certo enunciato asserisca un certo fatto, comunque il linguaggio possa essere costruito, vi dev’essere qualcosa in comune tra la struttura dell’enunciato e la struttura del fatto.
- Questa è, forse, la tesi fondamentale della teoria di Wittgenstein. Ciò che vi deve essere in comune tra l’enunciato e il fatto non può (secondo W.) venire esso stesso *detto* nel linguaggio. Nel lessico di W., ciò può venire solo *mostrato*.

dire vs mostrare

Le proposizioni descrivono gli stati di cose, e rappresentano la realtà, in quanto esse sono delle immagini della realtà. Così come il disegno di un'automobile rappresenta l'automobile, in quanto gli elementi del disegno sono in relazione fra loro nello stesso modo in cui lo sono gli elementi dell'automobile reale, così la proposizione rappresenta la realtà in quanto condivide con essa la struttura logica.

Se conosciamo il significato delle parole che la costituiscono, noi comprendiamo il senso di una proposizione senza che essa ci venga spiegata.

“La proposizione è un'immagine della realtà: Infatti io conosco la situazione da essa rappresentata se comprendo la proposizione. E la proposizione la comprendo senza che me ne si dia il senso” (4.021).

Noi capiamo una proposizione così come guardando una figura ne comprendiamo il contenuto, senza che questo debba essere spiegato. Infatti il senso di una proposizione lo spiegheremmo con un'altra proposizione, e dunque dovremmo comunque comprendere questa seconda proposizione.

dire vs mostrare

Una proposizione, quindi, può rappresentare tutta la realtà, tranne la relazione fra la proposizione e la realtà stessa, poiché lo faremmo comunque con una proposizione; questa relazione, allora, si *mostra* da sé, ed è la forma logica del mondo: “...La proposizione mostra la forma logica della realtà. L’esibisce” (4.121).

Ecco, quindi, la distinzione fra la possibilità che ha il linguaggio di descrivere, di rappresentare il mondo, e la relazione fra lo stesso linguaggio e il mondo, che invece si mostra, nel senso che non è rappresentabile; infatti per descrivere tale relazione dovremmo uscire – per così dire – con il linguaggio al di fuori del linguaggio, ma ciò evidentemente non è possibile: “Ciò che può essere mostrato non può essere detto” (4.1212).

Principio di verificaione 3: enunciazione

- Da quanto detto sopra ne discende la dottrina centrale del positivismo logico: *la teoria verificazionista del significato*
- una **proposizione** contingente **è significativa** se e solo **se può essere verificata** empiricamente, vale a dire se e solo se c'è **un metodo empirico per decidere se è vera o falsa**; se un tale metodo non esiste essa è una pseudo-proposizione insignificante.

Schlick: liberalizzazione del criterio di verifica

Dalla verifica alla verificabilità

“In primo luogo vorrei sottolineare che, quando diciamo che ‘una proposizione ha significato solo se è verificabile’, non stiamo dicendo ‘...solo se è *verificata*’. [...] Cadiamo nella trappola solo se consideriamo la verifica stessa come criterio di significato e non la ‘possibilità di verifica’ (= verificabilità; ciò condurrebbe all’assurdo del significato.”

In altri termini, la possibilità di verifica che è rilevante per il significato non può essere quella di tipo empirico; non può essere stabilita *post-festum*. Bisogna essere sicuri di essa prima di considerare le circostanze empiriche e di indagare se a consentiranno. [...] quando parliamo di verificabilità, intendiamo parlare della possibilità *logica* di verifica e nient’altro.”

Principio di verificaione (liberalizzato).

- Secondo tale principio, il significato di un enunciato è dato dalle condizioni della sua verificaione e, in secondo luogo, un enunciato è significante se e solo se è verificabile **in linea di principio**, cioè se esistono circostanze possibili, **non necessariamente attuali**, che verificandosi, determinerebbero in modo definitivo la verità dell'enunciato.

Carattere linguistico dell'indagine filosofica

- Gli empiristi logici consideravano le affermazioni sulla realtà del mondo esterno prive di significato, dal momento che non c'è la possibilità di verificare in via preliminare l'asserzione che esiste, o non esiste, un mondo esterno indipendente dalla nostra esperienza.
- La tesi che prevalse fu quella di Carnap secondo cui ciò che si richiedeva per la scienza era l'accettazione di un linguaggio realistico, per contro l'affermazione della realtà del mondo esterno era da considerarsi una sovrapposizione inutile al sistema della scienza.