# Premessa

In questo file.pdf vengono riassunti i principali concetti preliminari che consentono di seguire con profitto il Corso di Geometria e Algebra (secondo semestre, primo anno per i corsi di Laurea in Ingegneria e Architettura).

In particolare, verranno trattati i seguenti argomenti: teoria degli insiemi e linguaggio logico-matematico, geometria analitica nel piano, calcolo algebrico e polinomiale.

L'approccio scelto non prevede l'approfondimento di questioni di natura teorica, ma piuttosto si propone di stimolare razionalità e senso critico, unitamente ad autonomia di ragionamento e metodo. Ogni capitolo termina con una sezione di esercizi ricapitolativi interamente svolti, seguita da un paragrafo di esercizi proposti attraverso i quali il lettore può verificare il proprio livello di preparazione.

Ogni suggerimento dei lettori per migliorare questo prodotto e per eliminare errori o refusi è gradito.

Questo lavoro costituisce una rielaborazione parziale, sintetica e semplificata di parti del libro:

**MATEMATICA: $2^3$ CAPITOLI PER TUTTI**
Stefano Montaldo e Andrea Ratto
Liguori Editore (2011) pp. 1-272.
ISBN: 978-88-207-5511-9

Cagliari, 20 Ottobre 2015

Andrea Ratto

# Indice

# 1

# Insiemi, funzioni e linguaggio logico-matematico

## 1.0 Scopi del capitolo

In questo capitolo introduciamo simboli e nozioni di base inerenti alla teoria degli insiemi. Illustriamo gli insiemi numerici fondamentali partendo dai numeri naturali sino ad arrivare ai numeri reali. Poi procediamo all'illustrazione del concetto di funzione tra due insiemi. Il capitolo termina con una sezione in cui vengono presentate alcune delle tecniche usuali di dimostrazione: si tratta di un argomento importante per sviluppare le capacità critiche di ragionamento e il rigore matematico del lettore.

## 1.1 Elementi di teoria degli insiemi

Conviene considerare il concetto di *insieme* come primitivo, cioè non riconducibile a nozioni più elementari. Più precisamente, diremo che un

insieme è una collezione di oggetti, determinati e distinti, della nostra percezione o del nostro pensiero, concepiti come un tutto unico. Tali oggetti si chiamano *elementi* dell'insieme.
Generalmente, indichiamo gli insiemi con le lettere maiuscole $A, B, C, D$, etc., mentre per i suoi elementi useremo le lettere $a, b, c, d, etc.$ Se $a$ è un elemento di $A$ scriviamo

$$a \in A \quad (a \text{ appartiene a } A) \ .$$

Se invece $b$ non appartiene a $A$, si scrive:

$$b \notin A \ .$$

Quando un insieme $A$ possiede un *numero finito* di elementi, chiameremo questo numero *cardinalità*[1] di $A$, e lo indicheremo con il simbolo $\#(A)$. In certi testi, come sinonimo di cardinalità si può trovare *numerosità* o *potenza.*

Prima di continuare, è utile introdurre alcuni altri simboli e notazioni che saranno regolarmente usati in seguito:

$$\begin{array}{ll} : & \text{significa } \textit{tale che}^2 \\ \exists & \text{significa } \textit{esiste} \\ \forall & \text{significa } \textit{per ogni} \\ \Rightarrow & \text{significa } \textit{implica}\,. \end{array} \tag{1.1.1}$$

Altri simboli verranno di volta in volta introdotti all'occorrenza.

♢ **Esempio 1.1.** (i) Un insieme si può definire in modo *estensivo*, cioè esibendo i suoi elementi. Ad esempio, l'insieme $A$ dei numeri naturali da 0 a 5 si scrive come

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{(si noti l'uso delle parentesi graffe)} \ . \tag{1.1.2}$$

In questo esempio $\#(A) = 6\,.$

[1] Nella teoria assiomatica degli insiemi viene data una definizione più rigorosa di cardinalità, adattabile al caso di insiemi con infiniti elementi.
[2] A volte si possono usare i simboli alternativi t.c. oppure |.

(ii) Un insieme può essere definito in modo *intensivo*, cioè a partire da una proprietà comune a tutti i suoi elementi; per esempio, se denotiamo con $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali (si veda il §1.2), allora l'insieme $A$ definito in (1.1.2) si può ridefinire come

$$A = \{n \in \mathbb{N} \; : \; n \leq 5\}$$

e si legge: l'insieme degli $n$ appartenenti ai numeri naturali tali che $n$ è minore o uguale a 5.

(iii) L'insieme privo di elementi si chiama *insieme vuoto* e si indica con $\emptyset$.

Consideriamo ora gli insiemi:

$$A = \{a, b, c, d\}, \qquad B = \{a, b, d\} \; . \tag{1.1.3}$$

Confrontando i due insiemi $A$ e $B$ possiamo facilmente dedurre la veridicità della seguente affermazione:

$$x \in B \quad \Rightarrow \quad x \in A \; . \tag{1.1.4}$$

A parole, la (1.1.4) significa semplicemente che il generico elemento $x$ di $B$ è anche elemento di $A$. Questo può essere riscritto nel modo seguente:

$$B \subseteq A \; , \tag{1.1.5}$$

dove il nuovo simbolo $\subseteq$ esprime appunto il fatto, intuitivamente evidente, che l'insieme $B$ è *contenuto* nell'insieme $A$. Alternativamente, possiamo anche dire che $B$ è un *sottoinsieme* di $A$. Notiamo anche che nella nostra situazione

$$A \not\subseteq B \; , \tag{1.1.6}$$

cioè $A$ *non* è contenuto in $B$. (In generale, una / su un simbolo indica la *negazione* del simbolo stesso: per esempio $\nexists$ significa *non esiste*).

Tra due insiemi $A$ e $B$ si possono definire le seguenti operazioni:

$$\text{Unione:} \quad A \cup B = \{x \; : \; x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

$$\text{Intersezione:} \quad A \cap B = \{x \; : \; x \in A \text{ e } x \in B\}$$

$$\text{Differenza:} \quad A \setminus B = \{x \in A \; : \; x \notin B\} \, .$$

Inoltre, se $A \subseteq B$, definiamo il *complementare* di $A$ rispetto a $B$ come:

$$\mathcal{C}_B(A) = \{x \in B \ : \ x \notin A\} \ .$$

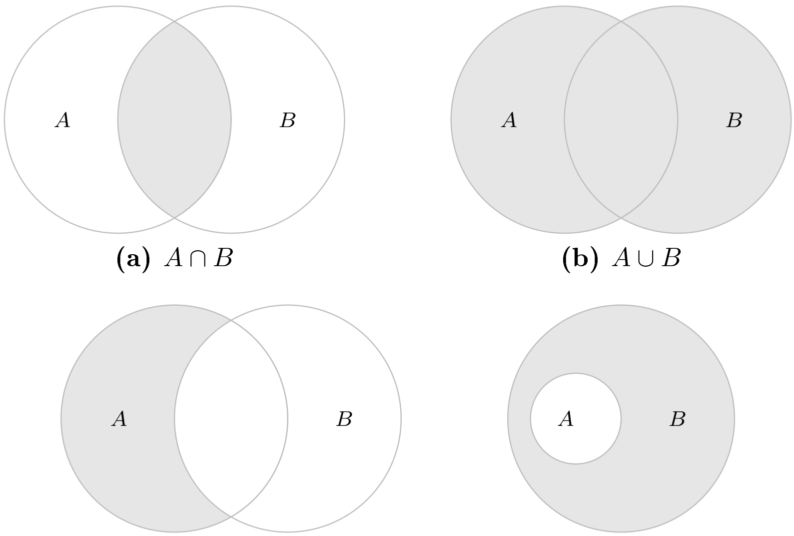
$\diamondsuit$ **Esempio 1.2.** Se $A = \{1,2,3,5,7\}$ e $B = \{0,2,3,6,8\}$, allora

$$A \cup B = \{0,1,2,3,5,6,7,8\}, \quad A \cap B = \{2,3\}, \quad A \setminus B = \{1,5,7\} \, .$$

Se $A = \{1,2,3,5,7\}$ e $B = \{1,2,3,5,7,9,11\}$, allora

$$\mathcal{C}_B(A) = \{9,11\} \ .$$

Le operazioni elementari con gli insiemi si possono visualizzare in modo grafico con l'ausilio dei *diagrammi di Venn*, come mostrato nella Figura 1.1.




**(a)** $A \cap B$ **(b)** $A \cup B$

**(c)** $A \setminus B$ **(d)** $\mathcal{C}_B(A)$

**Figura 1.1** – Diagrammi di Venn.

$\triangleright$ **Esercizio 1.1.** Siano $A$ e $B$ due sottoinsiemi di $C$. Verificare, con l'ausilio dei diagrammi di Venn, le seguenti uguaglianze, note col nome di formule di De Morgan:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \mathcal{C}_C(A \cup B) = \mathcal{C}_C(A) \cap \mathcal{C}_C(B) \\ &\text{(ii)} \quad \mathcal{C}_C(A \cap B) = \mathcal{C}_C(A) \cup \mathcal{C}_C(B) \, . \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

**Suggerimento:** Pensare $C$ come il foglio in cui sono rappresentati $A$ e $B$, oppure, in altre parole, considerare $C$ come l'ambiente in cui si trovano $A$ e $B$.

Adesso il lettore non dovrebbe avere difficoltà a svolgere in modo autonomo il seguente:

▷ **Esercizio 1.2.** Siano $A$ e $B$ gli insiemi definiti in (1.1.3). Siano poi:

$$C = \{a, b, 1\}\,, \qquad D = \{a, c, 2\}\,, \qquad E = \{c, 1\}\,.$$

Verificare che:

$$\begin{array}{rlrl} \text{(i)} & A \cup B = A & \text{(ii)} & A \cap B = B \\ \text{(iii)} & A \cup C = \{a, b, c, d, 1\} & \text{(iv)} & A \cap C = \{a, b\} \\ \text{(v)} & A \not\subseteq (C \cup D) & \text{(vi)} & D \cap C = \{a\} \\ \text{(vii)} & B \cap E = \emptyset & \text{(viii)} & E \subseteq (C \cup D) \\ \text{(ix)} & B \setminus A = \emptyset & \text{(x)} & \mathcal{C}_A(B) = \{c\}\ . \end{array} \tag{1.1.8}$$

Si noti che, al fine di interpretare correttamente, da un punto di vista logico-matematico, l'uguaglianza fra due insiemi, si deve tenere conto del fatto che

$$(\,A = B\,) \quad \Leftrightarrow \quad (A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A)\ , \tag{1.1.9}$$

dove il simbolo $\Leftrightarrow$ denota *equivalenza* fra due proposizioni.

Per concludere questa breve introduzione al concetto di insieme illustriamo il significato di *prodotto cartesiano* tra due insiemi. Dati due insiemi $A$ e $B$, si considerino tutte le coppie $\{a, b\}$ dove $a \in A$ e $b \in B$. Una coppia si dice *ordinata* se il primo elemento appartiene al primo insieme ed il secondo al secondo insieme. Le coppie ordinate si indicano con $[a, b]$[3]. Due coppie ordinate $[a, b]$ e $[a', b']$ sono uguali se $a = a'$ e $b = b'$. Ora possiamo dare la seguente:

**Definizione 1.1.** Siano $A$ e $B$ due insiemi. Allora il *prodotto cartesiano* di $A$ e $B$, denotato con il simbolo $A \times B$, è l'insieme di tutte le coppie ordinate $[a, b]$ con $a \in A$ e $b \in B$.

♢ **Esempio 1.3.** Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$ il prodotto cartesiano è

$$A \times B = \{[1, a], [1, b], [1, c], [2, a], [2, b], [2, c]\}\ .$$

[3] In altri testi si può trovare la notazione $(a, b)$ per indicare le coppie ordinate.

## 1.2 Insiemi numerici fondamentali

Prima di illustrare il concetto di funzione, che sarà argomento del §1.3, conviene prendere familiarità con i principali insiemi numerici. In particolare, abbiamo[4]:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(i)} & \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\} \\
\text{(ii)} & \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \\
\text{(iii)} & \mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, m \text{ e } n \text{ sono primi tra loro}\} ,
\end{array}
\tag{1.2.1}
$$

che rappresentano rispettivamente l'insieme dei numeri *naturali*, dei numeri *interi relativi*, e dei numeri *razionali*.
È evidente che $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Talvolta può essere utile anche utilizzare il simbolo $\subsetneq$, che indica l'inclusione stretta. Più precisamente, $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$ in quanto $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ ma $\mathbb{Z} \nsubseteq \mathbb{N}$. Osserviamo anche che, a differenza degli esempi incontrati nel §1.1, gli insiemi in (1.2.1) sono costituiti da un *numero infinito* di elementi.
Un insieme numerico fondamentale per i nostri scopi è poi quello dei cosiddetti *numeri reali* : questo insieme sarà indicato con il simbolo $\mathbb{R}$. Una definizione formalmente rigorosa dell'insieme dei numeri reali richiede conoscenze matematiche avanzate che esulano dai nostri scopi. Quindi ci accontentiamo di dire che *operativamente* possiamo identificare l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ con i punti di una retta su cui sono fissati, come mostra la Figura 1.2, l'origine $O$, corrispondente al valore 0, l'unità di misura $u$ ed il verso.

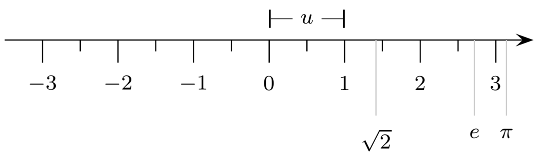



**Figura 1.2** – Corrispondenza fra numeri reali e punti di una retta.

Si può osservare che $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$: in questo caso, l'inclusione è stretta, in quanto, ad esempio, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (si veda il Teorema 1.3).
D'altra parte, sottolineiamo che $\sqrt{2}$ compare in modo naturale sia in contesti geometrici (ad esempio, rappresenta la misura della diagonale

[4] Due numeri interi si dicono primi fra loro se il loro massimo comune divisore è 1.

di un quadrato di lato 1), sia in ambito algebrico, come una soluzione dell'equazione:

$$x^2 - 2 = 0 \; . \tag{1.2.2}$$

I numeri reali non razionali, come ad esempio $\sqrt{2}$, vengono detti *irrazionali*. La rappresentazione decimale di un numero irrazionale ha un numero infinito di cifre, senza andamento periodico. Inoltre all'interno dei numeri irrazionali esistono dei numeri reali, come $\pi$ o il numero di Nepero[5] $e$ che, diversamente da $\sqrt{2}$, non sono soluzione di alcuna equazione polinomiale a coefficienti interi (si veda il Capitolo 3 per la definizione rigorosa di polinomio). Questi numeri, concettualmente più complicati, vengono chiamati numeri *trascendenti*.
Infine, precisiamo che anche certi numeri razionali hanno, nell'usuale rappresentazione decimale, un numero infinito di cifre dopo la virgola, ma queste si ripetono con periodicità. I seguenti esempi fissano le idee e la terminologia:

$$\frac{1}{3} = 0,3333\ldots = 0,\overline{3} \; .$$

$$1,453\overline{57} = 1,45357575757\ldots$$

In questo secondo esempio 1 è la *parte intera*, 453 sono le cifre del cosiddetto *antiperiodo*, mentre 57 è il *periodo*. Numeri di questo tipo vengono comunemente chiamati *periodici*. Per effettuare correttamente le operazioni con i numeri periodici è opportuno preliminarmente trasformarli nella corrispondente frazione (ad esempio, sostituire $0,\overline{3}$ con $(1/3)$). Per non spezzare il flusso dell'esposizione, rimandiamo agli esercizi di riepilogo nel §1.5 l'illustrazione di questa tecnica di trasformazione.

## 1.3 Il concetto di funzione

Il concetto di *funzione*[6] riveste un ruolo fondamentale non solo in matematica, ma in tutte le discipline scientifiche. Questa duttilità universale deriva dalla semplicità dell'idea che ne sta alla base: una funzione possiamo intenderla come un apparecchio di Input-Output (Ingresso-Uscita). Più formalmente:

---

[5] Le prime quindici cifre del numero di Nepero $e$ sono $2.71828182845905$.

[6] In matematica, un sinonimo di funzione è *applicazione*.

**Definizione 1.2.** Siano $A$, $B$ due insiemi. Una funzione $f : A \to B$ (si legge: *funzione $f$ dall'insieme $A$ all'insieme $B$*) è una legge che a *ogni* elemento $a \in A$ associa un elemento $b \in B$. Si scrive $f(a) = b$ e si dice che $b$ è l'immagine di $a$ (attraverso $f$). L'insieme $A$ è detto *dominio* di $f$ (oppure *insieme di definizione* di $f$), mentre $B$ si chiama *codominio* di $f$.

◇ **Esempio 1.4.** Siano $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Sia poi $f : A \to B$ definita da

$$f(a) = 1\,, \qquad f(b) = 2\,, \qquad f(c) = 1\,, \qquad f(d) = 2\,. \tag{1.3.1}$$

La legge (1.3.1) definisce correttamente una funzione $f : A \to B$. Questa stessa funzione può anche essere rappresentata mediante il diagramma in Figura 1.3.

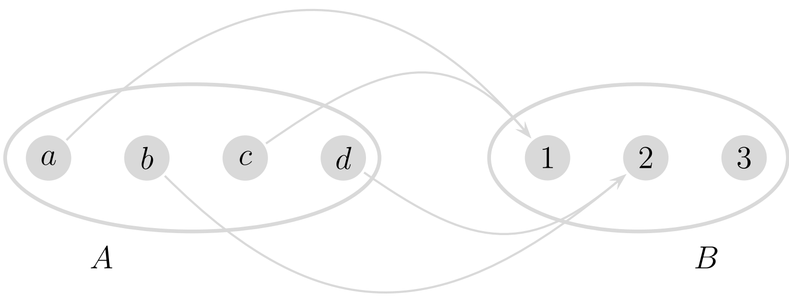



**Figura 1.3** – Visualizzazione della funzione dell'Esempio 1.4.

◇ **Esempio 1.5.** Siano $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Sia poi $g : A \to B$ la legge definita da

$$g(a) = \{1, 2\}\,, \qquad g(b) = 2\,, \qquad g(c) = 3\ .$$

La legge $g$ *non* definisce una funzione poiché l'elemento $a$ ha due immagini e l'elemento $d$ non ha nessuna immagine. Si veda il diagramma in Figura 1.4.

Riprendendo l'Esempio 1.4, si può osservare che gli elementi $a, c \in A$ hanno la stessa immagine. Inoltre l'elemento $3 \in B$ *non* è l'immagine di alcun elemento di $A$. Tutto ciò *non* contraddice la Definizione 1.2, ma rientra in quelle che sono le proprietà della funzione $f$. Più precisamente, abbiamo:

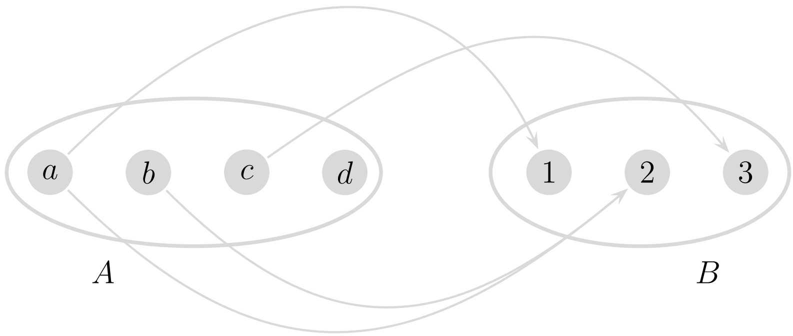



**Figura 1.4** – Esempio di una legge che *non* è una funzione.

**Definizione 1.3.** Sia $f : A \to B$ una funzione. Diremo che essa è *surgettiva* (o *suriettiva*) se:

$$\forall\, y \in B\,, \quad \exists\, x \in A \;\; \text{t.c.} \quad f(x) = y\ . \tag{1.3.2}$$

Con riferimento all'Esempio 1.4, abbiamo già osservato che:

$$\nexists\, x \in A \quad \text{t.c.} \quad f(x) = 3, \tag{1.3.3}$$

per cui la funzione $f$ dell'Esempio 1.4 non è surgettiva.

**Definizione 1.4.** Sia $f : A \to B$ una funzione. Diremo che $f$ è *iniettiva* se:

$$\forall x_1, x_2 \in A \qquad (\, f(x_1) = f(x_2)\,) \Rightarrow (\, x_1 = x_2\,)\,. \tag{1.3.4}$$

Un'alternativa *equivalente* alla (1.3.4) è

$$\forall x_1, x_2 \in A \qquad (\, x_1 \neq x_2\,) \Rightarrow (\, f(x_1) \neq f(x_2)\,)\,. \tag{1.3.5}$$

(L'equivalenza logica tra (1.3.4) e (1.3.5) sarà verificata nell'Esercizio 1.5). La funzione dell'Esempio 1.4 non è iniettiva, in quanto $f(a) = f(c)$ contraddice la (1.3.4).

▷ **Esercizio 1.3.** Siano $A$ e $B$ come nell'Esempio 1.4.

(i) Definire una funzione $f : A \to B$ surgettiva.
(ii) Definire una funzione $f : B \to A$ iniettiva.
(iii) $\exists$ una funzione $f : A \to B$ iniettiva?
(iv) $\exists$ una funzione $f : B \to A$ surgettiva?
(v) Definire una funzione $f : A \to A$ iniettiva e surgettiva.

**Soluzione.**

(i) *Ad esempio*, si può porre $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$, $f(d) = 1$.

(ii) *Ad esempio*, si può porre $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$.

(iii) No, poiché $\#(A) > \#(B)$. Infatti, dovendo ogni elemento di $A$ avere un'immagine in $B$, necessariamente almeno due elementi di $A$ dovranno avere la stessa immagine.

(iv) No. Affinché la funzione $f : B \to A$ sia surgettiva ci dovrebbe essere almeno un elemento di $B$ per ogni elemento di $A$.

(v) *Ad esempio*, si può porre $f(a) = a$, $f(b) = c$, $f(c) = d$, $f(d) = b$.

◁

**Definizione 1.5.** Sia $f : A \to B$. Diremo che $f$ è *bigettiva* (o *corrispondenza biunivoca*) se $f$ è *surgettiva* e *iniettiva*.

Per esempio, la funzione descritta nella soluzione dell'Esercizio 1.3 (v) è bigettiva. Ora, al fine di arrivare rapidamente ad esempi a cui siamo maggiormente interessati, passiamo ai casi più significativi in cui dominio e codominio di $f$ sono insiemi aventi infiniti elementi, con particolare attenzione al caso di insiemi numerici.

◇ **Esempio 1.6.** Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definita da:

$$f(n) = n\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\ .$$

Questa funzione è iniettiva ma non surgettiva.

◇ **Esempio 1.7.** Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da:

$$\begin{cases} f(n) = 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ f(n) = \dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari}\ . \end{cases} \tag{1.3.6}$$

Questa funzione non è iniettiva, ma è surgettiva (verificarlo!).

▷ **Esercizio 1.4.** Definire una funzione bigettiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

**Soluzione.** Si può porre, per esempio:

$$\begin{cases} f(n) = \dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ f(n) = -\dfrac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari .} \end{cases} \tag{1.3.7}$$

◁

*Osservazione* 1.1. Lo zero è un numero pari. Per capire meglio l'Esempio 1.7 e l'Esercizio 1.4, può essere d'aiuto scrivere esplicitamente le immagini di alcuni valori numerici. Per esempio, per (1.3.6) possiamo scrivere $f(1) = 1$, $f(2) = 0$, $f(3) = 2$, $f(4) = 0$, $f(5) = 3$, etc.
Invece per (1.3.7) si ha: $f(0) = 0$, $f(2) = 1$, $f(4) = 2$, $f(6) = 3$, etc. e poi $f(1) = -1$, $f(3) = -2$, $f(5) = -3$, etc.

## 1.4 Tecniche di dimostrazione

Per *proposizione* intendiamo un enunciato per il quale si può stabilire il suo valore di verità, cioè se è vero ($V$) o falso ($F$). Vediamo, a titolo di esempio, alcune proposizioni:

$p_1$ : 2 è un numero naturale

$p_2$ : $2 + 2 \geq 7$

$p_3$ : $\pi \in \mathbb{R}$ .

I corrispondenti valori di verità sono $V$ per $p_1$ e $p_3$, $F$ per $p_2$. Proposizioni più complesse possono essere ottenute mediante l'uso dei cosiddetti *connettivi logici*, che elenchiamo di seguito ponendo a fianco di ognuno di essi il suo significato:

| | |
|---|---|
| $\sim$ | non |
| $\wedge$ | e |
| $\vee$ | oppure |
| $\Rightarrow$ | implica (se . . . , allora . . .) |
| $\Leftrightarrow$ | doppia implicazione (se e solo se) |

La costruzione delle proposizioni più complesse richiede l'uso di parentesi per rendere il linguaggio non ambiguo. Ecco due esempi:

(i) $p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow p_3)$

(ii) $(p_1 \wedge p_2) \Leftrightarrow p_3$ ,

che in parole diventano:

(i) Se vale $p_1$, allora $p_2$ implica $p_3$

(ii) $p_1$ e $p_2$ valgono se e solo se vale $p_3$ .

Se una proposizione complessa $p$ è ottenuta, mediante l'uso dei connettivi logici, a partire da proposizioni $p_1 \dots p_n$, è naturale chiedersi quale sia il suo valore di verità in funzione dei valori di verità delle proposizioni $p_1 \dots p_n$ mediante le quali essa è costruita. Il punto di partenza è dato dalle *tavole di verità* mostrate nella Tabella 1.1.

| $p$ | $\sim p$ |
|---|---|
| $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ |

**(a)**

| $p_1$ | $p_2$ | $p_1 \wedge p_2$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

**(b)**

| $p_1$ | $p_2$ | $p_1 \vee p_2$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

**(c)**

| $p_1$ | $p_2$ | $p_1 \Rightarrow p_2$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |

**(d)**

| $p_1$ | $p_2$ | $p_1 \Leftrightarrow p_2$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |

**(e)**

**Tabella 1.1** – Tavole di verità.

Queste tavole di verità hanno un significato intuitivamente molto chiaro: ad esempio, nessuno dovrebbe meravigliarsi, leggendo la Tabella 1.1b, del fatto che $p_1 \wedge p_2$ risulta vera se, e solo se, entrambe $p_1$ e $p_2$ sono vere. Solo la tabella 1.1d potrebbe generare qualche perplessità nel lettore, per cui ora la discutiamo brevemente: poniamo

$p_1$ : c'è il sole

$p_2$ : faccio una passeggiata

La proposizione

$$p_1 \Rightarrow p_2 \text{ (Se c'è il sole, allora faccio una passeggiata)}$$

è *falsa solo se c'è il sole e non faccio una passeggiata*; cioè, $p_1 \Rightarrow p_2$ è falsa solo se $p_1$ è vera e $p_2$ è falsa. In parole, se non c'è il sole, il fatto che io faccia la passeggiata o meno non cambia il valore di verità, che è $V$ in entrambi i casi.
Ora, concentrandosi un momento, si può anche riconoscere che tutto ciò è equivalente al fatto che la proposizione (1.4.1) sotto è una *tautologia* (dove tautologia significa proposizione vera sempre, indipendentemente dai valori di verità delle proposizioni usate per costruirla):

$$(p_1 \Rightarrow p_2) \quad \Leftrightarrow \quad ((\sim p_1) \vee p_2) \ . \tag{1.4.1}$$

Il fatto che la (1.4.1) sia una tautologia deriva dall'osservazione, innanzitutto, che la tavola di verità di $((\sim p_1) \vee p_2)$ coincide con la Tabella 1.1d; poi, si applica la Tabella 1.1e.
Il seguente esercizio risulterà utile quando discuteremo le tecniche di dimostrazione di un teorema.

▷ **Esercizio 1.5.** Verificare che la seguente proposizione è una tautologia:

$$(p_1 \Rightarrow p_2) \quad \Leftrightarrow \quad ((\sim p_2) \Rightarrow (\sim p_1)) \tag{1.4.2}$$

**Soluzione.** La tavola di verità di $(\sim p_2) \Rightarrow (\sim p_1)$ è la seguente:

| $p_1$ | $p_2$ | $(\sim p_2) \Rightarrow (\sim p_1)$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |

(1.4.3)

Poiché (1.4.3) coincide con Tabella 1.1d, la conclusione segue immediatamente dalla Tabella 1.1e. ◁

In particolare, useremo la (1.4.2) nelle cosiddette *dimostrazioni per contrapposizione.*

### Tecniche di dimostrazione

Adesso illustriamo, mediante esempi semplici, dimostrazioni

(i) : costruttive;

(ii) : per contrapposizione;

(iii) : per assurdo;

(iv) : per induzione.

**Teorema 1.1.** *Esiste una funzione bigettiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.*

*Dimostrazione.* (costruttiva) : Questo teorema può essere dimostrato *costruendo esplicitamente* la $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ con le proprietà richieste. I dettagli di questa costruzione sono stati forniti nell'Esercizio 1.4. $\square$

**Teorema 1.2.** *Sia $n \in \mathbb{N}$. Se $n^2$ è pari, allora $n$ è pari.*

*Dimostrazione.* (per contrapposizione): Poniamo

$p_1$ : $n^2$ è pari

$p_2$ : $n$ è pari

L'asserto da dimostrare è $p_1 \Rightarrow p_2$. In virtù della tautologia (1.4.2) possiamo, in modo equivalente, dimostrare che $(\sim p_2) \Rightarrow (\sim p_1)$. In parole, è sufficiente dimostrare che:

$$\text{se } n \text{ è dispari, allora } n^2 \text{ è dispari.} \tag{1.4.4}$$

Ma, se $n$ è dispari, allora si può scrivere $n = 2k + 1$, dove $k \in \mathbb{N}$. Dunque

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

è dispari, come richiesto. $\square$

**Teorema 1.3.** $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

*Dimostrazione.* (per assurdo): In questo caso, la dimostrazione consiste nel mostrare che, negando la tesi, si arriva ad una contraddizione (assurdo). Supponiamo dunque che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$: allora deve essere possibile scrivere

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}\,, \tag{1.4.5}$$

dove $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \neq 0$ e $m, n$ *sono primi fra loro.*
Elevando al quadrato la (1.4.5), si ottiene facilmente

$$2m^2 = n^2\,.$$

Dunque $n^2$ è pari e, per il Teorema 1.2, anche $n$ è pari, cioè $n = 2k$. Quindi

$$m^2 = 2k^2\ ,$$

da cui anche $m$ è pari, cosa che contraddice il fatto che $m$ e $n$ siano primi tra loro. □

Per chiudere questa sezione, illustriamo ora il principio di induzione matematica. Il modo più semplice per enunciarlo è il seguente:

**Proprietà 1.1** (Principio di induzione)**.** Sia $p_n$, $n \in \mathbb{N}$, una famiglia di proposizioni. Se

(i) $p_0$ è vera;

(ii) ($p_k$ vera) $\Rightarrow$ ($p_{k+1}$ vera),

allora $p_n$ è vera $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Per visualizzare il significato del principio di induzione si può pensare ad una fila di soldati in cui

(i) il primo soldato cade;

(ii) (la caduta del soldato al posto $k$) $\Rightarrow$ (la caduta del soldato al posto $k+1$).

Allora tutti i soldati cadono.

Introduciamo l'utile simbolo di sommatoria $\Sigma$. In particolare, precisiamo che, se $a_1, \ldots, a_n$ sono $n$ numeri reali, allora vale la regola di scrittura:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ \ldots + a_n \tag{1.4.6}$$

(si legge sommatoria per $i$ da 1 a $n$ di $a_i$). Il simbolo $i$ viene chiamato *indice di sommatoria.* Altre lettere comunemente usate per denotare un indice di sommatoria sono $j$, $k$ oppure $\ell$, ad esempio.

**Teorema 1.4.** $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *si ha*

$$\sum_{\ell=0}^{n} \ell = \frac{n\,(n+1)}{2}\ . \tag{1.4.7}$$

*Dimostrazione.* (per induzione): dobbiamo verificare che sono soddisfatte le due ipotesi induttive (i) e (ii) del principio di induzione (Proprietà 1.1). Per la (i), si ha semplicemente

$$\sum_{\ell=0}^{0} \ell = \frac{0\,(0+1)}{2} = 0\ ,$$

che effettivamente risulta vera. Per quanto invece riguarda la (ii), possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{k+1} \ell &= \sum_{\ell=0}^{k} \ell + (k+1) = \frac{k\,(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= (k+1)\,(\frac{k}{2}+1) = \frac{(k+1)\,[(k+1)+1]}{2}\ , \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

dove, per la seconda uguaglianza in (1.4.8), abbiamo usato il fatto che la (1.4.7), per l'ipotesi induttiva, è vera per $n = k$. A questo punto la (1.4.8) non è altro che la (1.4.7) con $n = k + 1$. $\square$

**Aneddoto:** Si narra che Gauss, all'età di 7 (sette!) anni, abbia ottenuto la (1.4.7) nel modo seguente:

$$\boxed{\begin{array}{c}1\\ n\end{array}} \begin{array}{c}+\\ +\end{array} \boxed{\begin{array}{c}2\\ (n-1)\end{array}} \begin{array}{c}+\\ +\end{array} \boxed{\begin{array}{c}3\\ (n-2)\end{array}} \begin{array}{c}+\\ +\end{array} \cdots\cdots \begin{array}{c}+\\ +\end{array} \boxed{\begin{array}{c}(n-1)\\ 2\end{array}} \begin{array}{c}+\\ +\end{array} \boxed{\begin{array}{c}n\\ 1\end{array}}$$

Ognuno dei $\boxed{\phantom{x}}$ vale (n+1), e di $\boxed{\phantom{x}}$ ce ne sono $n$. Quindi la somma delle *due* righe vale $n\,(n+1)$. Dividendo per 2, si ottiene la (1.4.7)!

## 1.5 Esercizi di riepilogo

▷ **Esercizio 1.6.** Sia $A$ l'insieme dei naturali multipli di 2 e sia $B$ l'insieme dei naturali multipli di 6. Descrivere i seguenti insiemi:

$$A \cap B \ ; \quad \mathcal{C}_A(B) \ ; \quad \mathcal{C}_{\mathbb{N}}(A) \ ; \quad A \times B \ .$$

**Soluzione.** Osserviamo preliminarmente che

$$A = \{2k \in \mathbb{N} \ : k \in \mathbb{N}\} \ ; \quad B = \{6k \in \mathbb{N} \ : k \in \mathbb{N}\} \ .$$

Quindi $B \subset A$, per cui $A \cap B = B$. Poi,

$$\mathcal{C}_A(B) = \{(2 + 6k) \in \mathbb{N} \ : k \in \mathbb{N}\} \cup \{(4 + 6k) \in \mathbb{N} \ : k \in \mathbb{N}\} \ .$$

Proseguendo, troviamo:

$$\mathcal{C}_{\mathbb{N}}(A) = \{(2k + 1) \in \mathbb{N} \ : k \in \mathbb{N}\} \ .$$

Infine

$$A \times B = \{[2k, 6\ell] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : k, \ell \in \mathbb{N}\} \ .$$

Si può notare che $A \times B$ è un sottoinsieme del prodotto cartesiano di $\mathbb{N}$ con se stesso.

◁

▷ **Esercizio 1.7.** Siano $A$ e $B$ gli insiemi definiti nell'Esercizio 1.6; sia poi

$$D = \{[k, k] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : k \in \mathbb{N}\} \ .$$

Descrivere l'insieme

$$(A \times B) \cap D \ .$$

**Soluzione.**

$$(A \times B) \cap D = \{[6k, 6k] \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : k \in \mathbb{N}\} \ .$$

◁

▷ **Esercizio 1.8.** Siano $A$ e $B$ gli insiemi definiti nell'Esercizio 1.6. Si consideri la funzione $f : A \to B$ definita da:

$$f(n) = 6n \quad \forall \, n \in A \ .$$

$f$ è iniettiva? $f$ è surgettiva?

**Soluzione.**

$$6n_1 = 6n_2 \quad \Rightarrow \quad n_1 = n_2 \ ,$$

quindi $f$ è iniettiva. Per quanto riguarda la surgettività, è sufficiente osservare che, dato che $1 \notin A$,

$$\nexists \ n \in A \quad \text{tale che} \quad f(n) = 6 \ .$$

Quindi $f$ non è surgettiva.

◁

▷ **Esercizio 1.9.** Siano $A$ e $B$ gli insiemi definiti nell'Esercizio 1.6. Si definisca, se possibile, una funzione bigettiva $f : B \to A$.

**Soluzione.** Basta porre:

$$f(n) = \frac{n}{3}\,, \qquad \forall \ n \in B \ .$$

◁

Vediamo ora alcuni esercizi che ci consentiranno di acquisire la tecnica necessaria per trasformare un numero periodico nella corrispondente frazione, in cui numeratore e denominatore sono numeri interi (in molti testi questa, una volta ridotta ai minimi termini, viene chiamata *frazione generatrice* del numero periodico).

▷ **Esercizio 1.10.** Verificare che

$$0,\overline{9} = 1 \ . \tag{1.5.1}$$

**Soluzione.** Poniamo $x = 0,\overline{9}$. Possiamo scrivere:

$$10x = 9,\overline{9} \ ,$$

da cui

$$10x - x = 9,\overline{9} - 0,\overline{9} = 9 \ .$$

Da questo si ricava subito

$$9x = 9 \ ,$$

e quindi $x = 1$. Alternativamente, il lettore avrebbe potuto procedere per assurdo, supponendo $1 - 0,\overline{9} > 0$ e derivando una contraddizione. ◁

Il metodo dell'esercizio precedente consente in realtà di costruire la frazione generatrice di qualunque numero periodico, come adesso mostriamo in dettaglio.

Rappresentiamo un generico numero periodico in forma decimale mediante la scrittura:

$$x = r_1 \ldots r_n, a_1 \ldots a_p \overline{b_1 \ldots b_q} \tag{1.5.2}$$

Tutte le cifre che compaiono nella scrittura di $x$ sono numeri naturali, con $r_1 \neq 0$: in particolare $x$ ha $q$ cifre nel periodo e $p$ cifre nell'antiperiodo. Per abbreviare la scrittura poniamo:

$$R = r_1 \ldots r_n \ , \quad A_p = a_1 \ldots a_p \ , \quad B_q = b_1 \ldots b_q \ , \tag{1.5.3}$$

per cui $x = R, A_p \overline{B_q}$. Ora osserviamo che:

$$10^p \cdot x = R\, A_p, \overline{B_q} \quad \text{e} \quad 10^{p+q} \cdot x = R\, A_p\, B_q, \overline{B_q} \ .$$

Da questo possiamo scrivere:

$$10^{p+q} \cdot x - 10^p \cdot x = R\, A_p\, B_q, \overline{B_q} - R\, A_p, \overline{B_q} = R\, A_p\, B_q - R\, A_p \ ,$$

da cui si deduce:

$$10^p \cdot (10^q - 1) \cdot x = R\, A_p\, B_q - R\, A_p \ ,$$

ovvero:

$$x = \frac{R\, A_p\, B_q - R\, A_p}{99 \ldots 900 \ldots 0} \ , \tag{1.5.4}$$

dove il numero di 9 nella frazione generatrice (1.5.4) è pari a $q$, mentre il numero di 0 è esattamente $p$. Si noti però che, per completare il processo, può risultare necessario ridurre la frazione generatrice trovata in (1.5.4) ai minimi termini.

$\triangleright$ **Esercizio 1.11.** Determinare la frazione generatrice di:

$$x = 34, \overline{23} \ . \tag{1.5.5}$$

**Soluzione.** Applichiamo la (1.5.4) (con $q = 2$ e $p = 0$). Si ottiene:

$$x = \frac{3423 - 34}{99} = \frac{3389}{99} \ .$$

Notiamo che gli unici numeri primi che dividono 99 sono 3 e 11: dato che il numeratore non è divisibile per nessuno di questi due numeri, concludiamo che la frazione generatrice trovata è già ridotta ai minimi termini. $\triangleleft$

▷ **Esercizio 1.12.** Determinare la frazione generatrice di:

$$x = 37,72\overline{41}\ . \tag{1.5.6}$$

**Soluzione.** Applichiamo la (1.5.4) (con $q = 2$ e $p = 2$). Otteniamo:

$$x = \frac{377241 - 3772}{9900} = \frac{373469}{9900}\ .$$

Notiamo che gli unici numeri primi che dividono 9900 sono 2, 3, 5 e 11: dato che il numeratore non è divisibile per nessuno di questi quattro numeri, concludiamo che la frazione generatrice trovata è già ridotta ai minimi termini. ◁

▷ **Esercizio 1.13.** Dimostrare la seguente formula per induzione:

$$\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell}{2^\ell} = 2 - \left(\frac{n+2}{2^n}\right)\ . \tag{1.5.7}$$

**Soluzione.** Come primo passo, verifichiamo che la (1.5.7) è soddisfatta per $n = 1$. Abbiamo:

$$2 - \left(\frac{1+2}{2^1}\right) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\ .$$

D'altra parte, anche

$$\sum_{\ell=1}^{1} \frac{\ell}{2^\ell} = \frac{1}{2}\ ,$$

come richiesto. Adesso dobbiamo utilizzare l'ipotesi induttiva per dimostrare che:

$$\sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{\ell}{2^\ell} = 2 - \left(\frac{n+3}{2^{n+1}}\right)\ .$$

Abbiamo:

$$\sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{\ell}{2^\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell}{2^\ell} + \frac{(n+1)}{2^{n+1}}\ .$$

Ora, usando l'ipotesi induttiva, si ha:

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{\ell}{2^\ell} &= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell}{2^\ell} + \frac{(n+1)}{2^{n+1}} = 2 - \left(\frac{n+2}{2^n}\right) + \frac{(n+1)}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{2(n+2) - (n+1)}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \left(\frac{n+3}{2^{n+1}}\right)\ ,
\end{aligned}$$

come richiesto. $\triangleleft$

$\triangleright$ **Esercizio 1.14.** Un vecchio saggio dice:

(i) nessuna persona irrazionale è un matematico;

(ii) tutte le persone razionali che si impegnano per far fortuna diventano ricche.

In base a questi principi di saggezza si può dedurre che:

(a) nessuno che non si impegni può essere un matematico;

(b) i matematici che si impegnano per far fortuna diventano ricchi;

(c) i matematici diventano ricchi solo se si impegnano per far fortuna;

(d) le persone razionali sono sempre dei matematici;

(e) tutti i ricchi sono persone razionali oppure sono dei matematici.

**Soluzione.** Le due affermazioni del saggio possono essere schematizzate come segue:

(i) matematico $\Rightarrow$ razionale

(ii) ( razionale e impegno) $\Rightarrow$ ricco

(si noti che per (i) abbiamo usato l'Esercizio 1.5). Ora, applicando (i), deduciamo che:

(iii) ( matematico e impegno) $\Rightarrow$ ( razionale e impegno)

Infine, da (iii) e (ii):

(iv) ( matematico e impegno) $\Rightarrow$ ricco

Quindi la risposta (b) è corretta. Il lettore completerà lo studio di questo esercizio verificando che le altre possibili risposte NON sono accettabili.

$\triangleleft$

## 1.6 Esercizi proposti

▷ **Esercizio 1.15.** Ordinare i seguenti numeri razionali in ordine crescente

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{13}{10}, \frac{1}{2} .$$

▷ **Esercizio 1.16.** Gigi ha una torta: dopo un'ora, ne ha mangiato i (2/7) e, nell'ora seguente, ne mangia i (2/7) di ciò che rimaneva dopo la prima ora. Quale parte di torta viene mangiata da Gigi in queste due ore?

▷ **Esercizio 1.17.** Scrivere in forma di quoziente di interi il numero periodico $2,13\overline{31}$.

▷ **Esercizio 1.18.** Si consideri la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da:

$$f(n) = n^3 , \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} .$$

Stabilire se $f$ è: iniettiva, surgettiva, bigettiva.

▷ **Esercizio 1.19.** Calcolare la somma dei primi $n$ numeri dispari:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) .$$

▷ **Esercizio 1.20.** Calcolare la somma dei primi $n$ numeri pari.

▷ **Esercizio 1.21.** Dimostrare che la somma dei quadrati dei primi $n$ numeri naturali è:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

▷ **Esercizio 1.22.** Dimostrare le seguenti affermazioni:

(i) la somma di due numeri pari è un numero pari;

(ii) la somma di due numeri dispari è un numero pari;

(iii) il prodotto di due numeri dispari è un numero dispari.

▷ **Esercizio 1.23.** Dati due numeri reali $a$ e $b$, con $a < b$, poniamo:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\} \ .$$

L'insieme $(a, b)$ viene chiamato *intervallo aperto* di estremi $a$ e $b$ (si noti che $a \notin (a, b)$ e $b \notin (a, b)$). Ora si consideri l'insieme

$$I = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k, k+1)$$

(questa simbologia significa che l'insieme $I$ è l'unione degli (infiniti) intervalli aperti $(k, k+1)$, dove $k$ è un numero intero). Determinare $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(I)$ .

▷ **Esercizio 1.24.** Si consideri la proposizione seguente:

(i) ogni uomo politico ha qualche buona qualità;

Dire che la proposizione (i) è falsa equivale a dire che:

(a) esiste almeno un uomo politico senza alcuna buona qualità;

(b) tutti gli uomini politici sono senza alcuna buona qualità;

(c) se un uomo non ha nessuna buona qualità, allora è un politico;

(d) ogni uomo politico è senza buone qualità;

(e) se un uomo ha almeno una buona qualità, allora è un politico.

## 1.7 Commenti

La teoria degli insiemi è stata inizialmente sviluppata, nella seconda metà del secolo XIX, dal matematico tedesco G. Cantor. Una sistemazione più moderna (assiomatica) dei fondamenti di questa teoria è stata iniziata da Zermelo, intorno al 1908. Attualmente, questa teoria svolge un ruolo importante per i fondamenti della matematica e si colloca nell'ambito della cosiddetta *logica matematica.*

In questo capitolo abbiamo lavorato, in modo operativo e diretto, con l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$: segnaliamo però che un'introduzione matematicamente rigorosa dei numeri naturali richiederebbe un approccio assiomatico di cui il principio di induzione risulta essere una conseguenza; gli assiomi relativi ai numeri naturali sono noti come *assiomi di Peano*, in onore del matematico che, rielaborando un precedente lavoro di Dedekind, per primo li introdusse nel 1889.

Riprendiamo ora brevemente il concetto di numero trascendente: formalmente, si tratta di un numero irrazionale che non è algebrico, cioè non è soluzione di nessuna equazione polinomiale della forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \ ,$$

dove $n \geq 1$ e i coefficienti $a_i$ sono numeri interi, non tutti nulli. L'insieme dei numeri trascendenti non è chiuso rispetto all'addizione e al prodotto; ad esempio, se $x$ è trascendente, così sarà $-x$, ma la loro somma (che è 0) è evidentemente un numero algebrico. L'insieme dei numeri algebrici è *numerabile*, cioè ammette una corrispondenza biunivoca (= funzione bigettiva) con l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Al contrario, l'insieme di tutti i numeri reali $\mathbb{R}$ è non numerabile; ciò implica che l'insieme dei numeri trascendenti è non numerabile, cioè esistono infinitamente più numeri trascendenti che algebrici (lasciamo al solo livello intuitivo il significato di questa affermazione). Tale risultato fu dimostrato da Cantor alla fine del secolo XIX.
In generale, diciamo che dimostrare che un dato numero è trascendente può essere molto difficile: l'esistenza dei numeri trascendenti fu dimostrata per la prima volta nel 1844 dal grande matematico francese J. Liouville, che riuscì a costruire un'intera importante classe di numeri trascendenti, i cosiddetti *numeri di Liouville*.
In particolare, la scoperta dei numeri trascendenti consentì la dimostrazione dell'impossibilità di risolvere diversi antichi problemi geometrici riguardanti costruzioni con riga e compasso. Il più famoso, cioè la cosiddetta *quadratura del cerchio*, consiste nel costruire, mediante riga e compasso, un quadrato avente la stessa area di un dato cerchio: l'impossibilità di risolvere questo problema equivale alla trascendenza di $\pi$, che fu dimostrata rigorosamente da F. Von Lindemann nel 1882.

# 2

# Geometria analitica nel piano

## 2.0 Scopi del capitolo

Nel Capitolo 1 abbiamo identificato l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ con i punti di una retta. Ora stabiliamo una corrispondenza biunivoca fra i punti $P$ del piano e le coppie ordinate di numeri reali $[a, b]$.

Più precisamente, diremo che un *sistema di riferimento cartesiano* nel piano è costituito da due assi come in Figura 2.1. Questa terminologia rappresenta un omaggio al grande matematico e filosofo francese René Descartes (Cartesio) che, intorno alla metà del secolo XVII, introdusse questi sistemi di riferimento e li applicò allo studio di vari problemi geometrici. Per i nostri scopi possiamo assumere che gli assi siano ortogonali fra loro e orientati come nella Figura 2.1. Tradizionalmente, l'asse orizzontale è indicato come asse $x$, mentre quello verticale come asse $y$.

Il numero reale $a$, corrispondente alla proiezione ortogonale di $P$ sull'asse $x$, è detto *ascissa* di $P$, mentre $b$ (corrispondente alla proiezione ortogonale di $P$ sull'asse $y$) si chiama *ordinata* di $P$. La coppia ordinata di numeri reali $[a, b]$ rappresenta le *coordinate cartesiane* di $P$ (in seguito, le chiame-

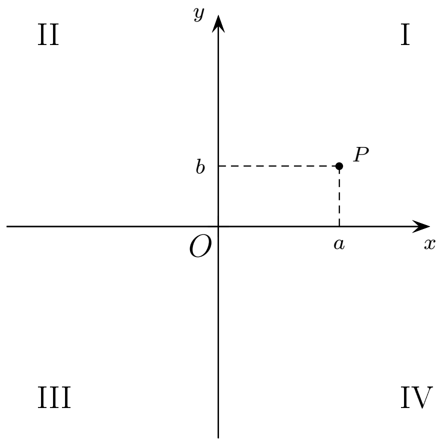



**Figura 2.1** – Sistema di riferimento cartesiano per il piano.

remo semplicemente coordinate di $P$). L'origine $O$ è il punto di coordinate $[0, 0]$. Useremo la scrittura $\mathbb{R}^2$ per denotare il piano munito di un sistema di riferimento cartesiano come in Figura 2.1 (si noti che, dal punto di vista strettamente insiemistico, $\mathbb{R}^2$ corrisponde al prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Si può anche notare che il piano risulta suddiviso in quattro quadranti, tradizionalmente chiamati I, II, III e IV, come indicato nella Figura 2.1 (anche, rispettivamente, primo quadrante, secondo quadrante etc.). Ad esempio, il primo quadrante corrisponde all'insieme

$$\mathrm{I} = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 \ : \ x,\, y \geq 0 \right\} \ .$$

Notiamo anche che, su ciascuno dei due assi, è fissata un'unità di misura: quando la necessità di realizzare una data figura lo renderà opportuno, useremo un'unità di misura sull'asse $y$ diversa rispetto a quella fissata sull'asse $x$.

La *geometria analitica* consiste nello studio delle proprietà geometriche delle varie figure attraverso l'uso delle coordinate. In questo capitolo impareremo i primi concetti fondamentali che ci consentiranno, in particolare, di descrivere rette, circonferenze e parabole attraverso opportune *equazioni*. Gli argomenti di questo capitolo rivestono un ruolo centrale nel nostro lavoro. In particolare, forniscono strumenti chiave per approfondire sia la geometria euclidea classica, sia lo studio delle funzioni che abbiamo iniziato nel Capitolo 1: in questo ordine di idee, nel §2.2 illustreremo il concetto di *grafico* di una funzione. Infine, va detto che lo studio critico e consapevole della geometria analitica costituisce, a nostro avviso, una delle migliori palestre per allenare la mente al ragionamento matematico.

## 2.1 Equazioni di circonferenze e rette

Al fine di acquisire maggiore confidenza con l'uso delle coordinate svolgiamo un paio di semplici esercizi preliminari.

▷ **Esercizio 2.1.** Siano $P_0 = [x_0, y_0]$ e $P_1 = [x_1, y_1]$ due punti di $\mathbb{R}^2$.

(i) Esprimere la distanza tra $P_0$ e $P_1$ in funzione delle loro coordinate.

(ii) Esplicitare le coordinate del punto medio $M$ del segmento $\overline{P_0\,P_1}$ in funzione delle coordinate di $P_0$ e di $P_1$.

**Soluzione.** Possiamo avvalerci della rappresentazione grafica in Figura 2.2,

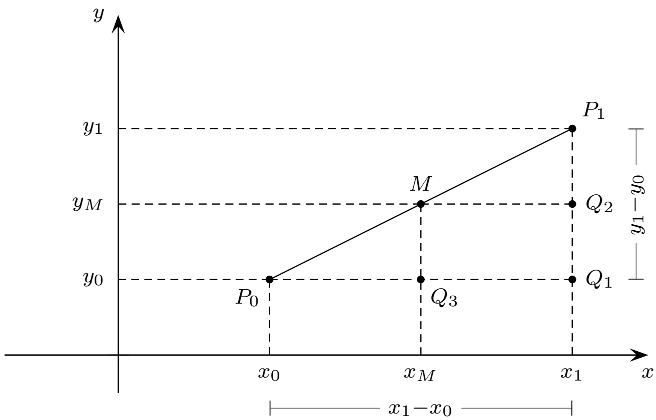



**Figura 2.2** – Lunghezza di un segmento e coordinate del punto medio.

da cui deduciamo:
(i) Applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo $\triangle P_0\,Q_1\,P_1$ si ottiene:

$$\mathrm{dist}(P_0, P_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\ . \tag{2.1.1}$$

(ii) Dalla congruenza dei triangoli $\triangle P_0\,Q_3\,M$ e $\triangle M\,Q_2\,P_1$ deduciamo che $x_M$ è equidistante da $x_0$ e $x_1$, per cui l'ascissa $x_M$ vale:

$$x_M = (x_0 + x_1)/2\ .$$

Ragionando in modo simile per l'ordinata $y_M$ si ricava

$$M = [x_M, y_M] = \left[\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}\right] . \tag{2.1.2}$$

◁

*Osservazione* 2.1. Nell'Esercizio 2.1 abbiamo dato una risposta a domande di chiara natura geometrica utilizzando le coordinate. Questo fornisce una prima idea del metodo di lavoro proprio della geometria analitica.

▷ **Esercizio 2.2.** Siano $P_0 = [2, 2]$ e $P_1 = [5, 6]$. Calcolare la distanza tra $P_0$ e $P_1$, e il punto medio $M$ del segmento $\overline{P_0\, P_1}$.

**Soluzione.** Applicando (2.1.1) e (2.1.2), si trova

$$\mathrm{dist}(P_0, P_1) = 5 \ , \qquad M = \left[\frac{7}{2}, 4\right] .$$

◁

Affrontiamo ora un primo problema significativo: descrivere una circonferenza mediante l'uso delle coordinate. Per fissare le idee, supponiamo di dover descrivere la circonferenza $\gamma$ avente centro $C = [x_0, y_0]$ e raggio $R > 0$ assegnati. Geometricamente, secondo la Definizione **??**, possiamo scrivere

$$\gamma = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \ : \ \mathrm{dist}(P, C) = R \right\} . \tag{2.1.3}$$

Ora, indichiamo con $P = [x, y]$ il generico punto di $\mathbb{R}^2$. Usando la formula (2.1.1) che fornisce la distanza fra due punti, è immediato constatare che la (2.1.3) equivale a

$$\gamma = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 \ : \ \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R \right\} . \tag{2.1.4}$$

A parole, ciò vuol dire che i punti di $\gamma$ sono esattamente quei punti di $\mathbb{R}^2$ che soddisfano la condizione

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R . \tag{2.1.5}$$

Elevando al quadrato, la (2.1.5) può essere riscritta in modo equivalente come segue:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 . \tag{2.1.6}$$

La (2.1.6) è l'equazione *cartesiana della circonferenza* $\gamma$ di centro $C = [x_0, y_0]$ e raggio $R\,(> 0)$.

*Osservazione* 2.2. Il lettore dovrebbe riflettere con attenzione sul significato di (2.1.6): intanto bisogna capire che $x_0$, $y_0$ e $R$ ($R > 0$) sono numeri reali fissati. Poi, si deve acquisire il fatto che i punti di $\gamma$ sono esattamente quelli le cui coordinate soddisfano l'equazione (2.1.6). Questo è un concetto fondamentale che si applica ad ogni situazione in cui un luogo geometrico di punti (ad esempio, una retta, o una parabola etc.) è descritto mediante un'equazione.

*Osservazione* 2.3. Svolgendo i calcoli nella (2.1.6) si perviene all'equazione equivalente:

$$x^2 + y^2 - 2x_0 x - 2y_0 y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0 \ .$$

Ponendo in quest'ultima

$$\begin{cases} a = -2x_0 \\ b = -2y_0 \\ c = x_0^2 + y_0^2 - R^2 \end{cases} \tag{2.1.7}$$

si trova

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \ . \tag{2.1.8}$$

Si osservi che la (2.1.6) può essere sempre scritta nella forma (2.1.8) ma il viceversa non è sempre vero. Infatti, per passare dalla (2.1.8) alla (2.1.6) bisogna ricavare il centro ed il raggio della circonferenza in funzione di $a$, $b$ e $c$. Dalla (2.1.7) si trova

$$\begin{cases} x_0 = -a/2 \\ y_0 = -b/2 \\ R = \sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}} \end{cases} \tag{2.1.9}$$

dalle quali si evince che il raggio $R$ è un numero reale diverso da zero se e solo se $a^2 + b^2 - 4c > 0$. In particolare, solo se quest'ultima condizione è soddisfatta la (2.1.8) descrive una circonferenza (se $a^2 + b^2 - 4ac = 0$, allora la (2.1.8) rappresenta un solo punto; se invece $a^2 + b^2 - 4ac < 0$, allora la (2.1.8) non è verificata da alcun punto del piano cartesiano).

$\triangleright$ **Esercizio 2.3.** (i) Scrivere l'equazione della circonferenza $\gamma$ di centro $C = [3, 1]$ e raggio 5.

(ii) Siano $P_1 = [1, 3]$, $P_2 = [2, 4]$, $P_3 = [0, 5]$: stabilire quale fra questi 3 punti appartiene a $\gamma$.

**Soluzione.** (i) Applicando la (2.1.6) troviamo che l'equazione di $\gamma$ è:

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25 \; . \tag{2.1.10}$$

(ii) Sostituendo le coordinate di $P_1$ nel membro a sinistra dell'equazione (2.1.10) abbiamo:

$$(1-3)^2 + (3-1)^2 = 8 \neq 25 \; ,$$

per cui le coordinate di $P_1$ non soddisfano la (2.1.10) e quindi $P_1 \notin \gamma$. Procedendo in modo simile per $P_2$ si ottiene

$$(2-3)^2 + (4-1)^2 = 10 \neq 25 \; ,$$

per cui anche $P_2 \notin \gamma$. Infine, lo stesso tipo di verifica per $P_3$ fornisce

$$(0-3)^2 + (5-1)^2 = 25 \; ,$$

per cui si conclude che $P_3 \in \gamma$.

$\triangleleft$

Adesso procediamo per arrivare a descrivere le rette in $\mathbb{R}^2$ mediante opportune equazioni. Con riferimento alla Figura 2.3, iniziamo a trattare il caso di una retta $r$ passante per l'origine $O$, non parallela ad un asse cartesiano e contenuta nei quadranti I e III.

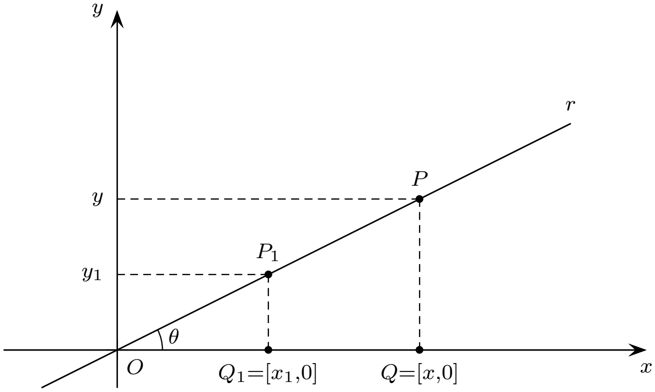



**Figura 2.3** – Retta passante per l'origine.

Una tale retta è univocamente individuata dalla assegnazione di un punto $P_1 = [x_1, y_1] \in r$, $P_1 \neq O$. Come in Figura 2.3, sia $P = [x, y]$ un generico punto di $r$ nel primo quadrante, e siano poi $Q_1$ e $Q$ rispettivamente le proiezioni ortogonali di $P_1$ e $P$ sull'asse $x$ (per semplicità, trattiamo il caso in cui $P_1$ e $P$ si trovano nel primo quadrante: le osservazioni necessarie per trattare i rimanenti casi sono lasciate al lettore). Dalla similitudine dei due triangoli $\triangle OP_1Q_1$ e $\triangle OPQ$ segue che:

$$y_1 : x_1 = y : x \ , \tag{2.1.11}$$

da cui

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{x} \ . \tag{2.1.12}$$

Posto ora per convenienza

$$\frac{y_1}{x_1} = m \ , \tag{2.1.13}$$

vediamo che la condizione (2.1.12) può essere riscritta più semplicemente come:

$$y = m\,x \tag{2.1.14}$$

(si noti che l'equazione precedente risulta verificata anche dalle coordinate $[0, 0]$ dell'origine $O$). Riassumendo, l'equazione (2.1.14) rappresenta, nel caso $m > 0$, una retta $r$ passante per $O$ e contenuta nei quadranti I e III. Il numero reale $m$ è chiamato *coefficiente angolare* della retta $r$: nel successivo Capitolo 5 impareremo che $m$ coincide con la tangente dell'angolo $\theta$ compreso tra $r$ e la semiretta positiva dell'asse $x$ ($m = \tan\theta$). Per ora, invitiamo ancora il lettore a riflettere bene sul fatto che l'equazione (2.1.14) va interpretata come segue: un generico punto $P$ appartiene ad $r$ se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione (2.1.14), o, in formule,

$$P = [x, y] \in r \qquad \Leftrightarrow \qquad y = m\,x \ .$$

$\triangleright$ **Esercizio 2.4.** (i) Scrivere l'equazione della retta $r$ che contiene l'origine e il punto $P_1 = [2, 4]$.

(ii) Siano $P_2 = [3, 2]$ e $P_3 = [1, 2]$. Stabilire se questi due punti appartengono a $r$.

**Soluzione.** (i) In questo caso

$$m = \frac{4}{2} = 2 \ ,$$

per cui l'equazione di $r$ è

$$r: \qquad y = 2x \ .$$

(ii) Il lettore non dovrebbe avere difficoltà a verificare che $P_2 \notin r$, mentre $P_3 \in r$. ◁

Ora un ragionamento perfettamente analogo a quello illustrato sopra consente di arrivare a descrivere una retta passante per l'origine, e contenuta nei quadranti II e IV, ancora con (2.1.14), *ma con* $m < 0$. Pertanto si può affermare, riassumendo questa discussione, che una generica retta $r$ passante per l'origine, diversa dall'asse $y$, si rappresenta con l'equazione

$$y = m\,x\,, \qquad \text{dove } m \in \mathbb{R} \tag{2.1.15}$$

(si noti che, nel caso in cui $m = 0$, $r$ coincide con l'asse $x$). Dal ragionamento precedente abbiamo dovuto escludere l'asse $y$, perché questo corrisponderebbe alla situazione (non accettabile) in cui $x_1 = 0$ in (2.1.12). Osservando che i punti dell'asse $y$ sono tutti e solo quelli che hanno la prima coordinata (ascissa) nulla, il lettore non dovrebbe avere dubbi sul fatto che l'equazione dell'asse $y$ è semplicemente:

$$x = 0 \ . \tag{2.1.16}$$

▷ **Esercizio 2.5.** Sia $r$ la retta di equazione $y = 3x$. Scrivere l'equazione della retta $r'$ che contiene il punto $P' = [1, 5]$ ed è parallela a $r$.

**Soluzione.** Aiutiamoci costruendo una visualizzazione grafica del problema, come in Figura 2.4. Nella figura si può osservare che i punti di $r'$ si ottengono da quelli di $r$ mediante un'opportuna traslazione verticale: in pratica, incrementando di un'opportuna quantità fissa il valore dell'ordinata ($y$) dei punti di $r$. Indicando con $b\,(\in \mathbb{R})$ questa quantità, deduciamo che l'equazione che governa l'appartenenza a $r'$ è:

$$y = 3x + b \ . \tag{2.1.17}$$

Ora, per calcolare il valore di $b$, è sufficiente imporre che le coordinate di $P'$ soddisfino la (2.1.17). Otteniamo

$$5 = 3 \cdot 1 + b \ ,$$

da cui si ricava subito $b = 2$. In conclusione, l'equazione di $r'$ è:

$$r': \qquad y = 3x + 2 \ .$$

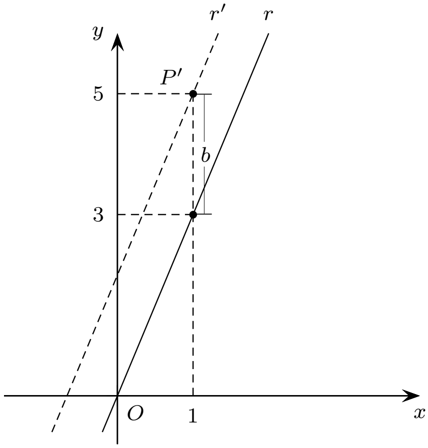



**Figura 2.4** – Rette parallele e traslazioni verticali.

◁

Generalizzando il contenuto dell'esercizio precedente possiamo affermare che

$$y = mx + b \qquad m, b \in \mathbb{R} \tag{2.1.18}$$

rappresenta l'equazione di una generica retta di $\mathbb{R}^2$, non parallela all'asse $y$, ed è anche chiamata *equazione esplicita* della retta.

*Osservazione* 2.4. L'Esercizio 2.5 ci permette di concludere che due rette sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare.

Per acquisire una maggiore familiarità con questi importanti concetti svolgiamo ora alcuni esercizi illustrativi.

▷ **Esercizio 2.6.** Sia $P = [2, 3]$.

(i) Scrivere l'equazione della retta $r_1$ passante per $P$ e parallela all'asse $x$;

(ii) Scrivere l'equazione della retta $r_2$ passante per $P$ e parallela all'asse $y$.

**Soluzione.** Le rette richieste sono rappresentate nella Figura 2.5: in particolare, vediamo che la condizione che esprime l'appartenenza di un generico punto

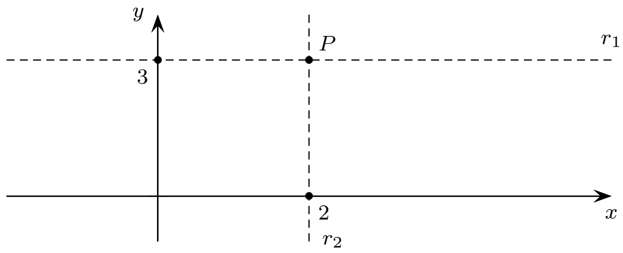



**Figura 2.5** – Rette parallele agli assi.

$P$ a $r_1$ è semplicemente che l'ordinata di $P$ sia uguale a 3. Pertanto l'equazione di $r_1$ è $y = 3$. Analogamente, si ottiene l'equazione di $r_2$: $x = 2$.

◁

▷ **Esercizio 2.7.** Siano $P_1 = [2, 1]$ e $P_2 = [3, 3]$. Determinare l'equazione della retta $r$ che contiene $P_1$ e $P_2$.

**Soluzione.** Per risolvere questo esercizio possiamo procedere in due modi distinti: per via puramente algebrica, oppure ragionando geometricamente.
**Risoluzione per via algebrica:** grazie a quanto ottenuto in (2.1.18), possiamo affermare che l'equazione di $r$ è della forma:

$$r \; : \; y = mx + b \; ,$$

dove i coefficienti incogniti $m$ e $b$ possono essere determinati imponendo che le coordinate dei due punti $P_1$ e $P_2$ soddisfino l'equazione della retta $r$. Più precisamente, l'appartenenza di $P_1$ a $r$ equivale alla condizione:

$$1 = m \cdot 2 + b \; , \tag{2.1.19}$$

mentre l'appartenenza di $P_2$ a $r$ corrisponde a:

$$3 = m \cdot 3 + b \; . \tag{2.1.20}$$

Sottolineiamo che i coefficienti incogniti $m$ e $b$ devono soddisfare *entrambe* le equazioni (2.1.19) e (2.1.20). In questi casi si utilizza la simbologia seguente:

$$\begin{cases} 1 = m \cdot 2 + b \\ 3 = m \cdot 3 + b \end{cases} \tag{2.1.21}$$

e si dice che (2.1.21) è un *sistema* di equazioni nelle due incognite $m$ e $b$. In generale, lo studio dei sistemi di equazioni è alquanto complesso; ma, nella nostra semplice situazione, è invece facile pervenire alla sua soluzione mediante semplici considerazioni algebriche. Infatti possiamo ricavare, dalla prima equazione in (2.1.21),

$$b = 1 - 2m \ . \tag{2.1.22}$$

Sostituendo questa informazione nella seconda equazione di (2.1.21) deduciamo che:

$$3 = 3m + (1 - 2m) \ ,$$

da cui ricaviamo immediatamente

$$m = 2 \ . \tag{2.1.23}$$

Usando (2.1.23) in (2.1.22) concludiamo che

$$b = 1 - 2 \cdot 2 \ ,$$

da cui

$$b = -3 \ . \tag{2.1.24}$$

Ne segue che l'equazione della retta $r$ richiesta è:

$$r : \qquad y = 2x - 3 \ . \tag{2.1.25}$$

A titolo di verifica ulteriore, il lettore può controllare sia il fatto che le coordinate di $P_1$ e $P_2$ soddisfano (2.1.25), sia la validità di entrambe le equazioni in (2.1.21) quando $b = -3$ e $m = 2$.

**Risoluzione per via geometrica:** visualizziamo la situazione attraverso la Figura 2.6 dove abbiamo tracciato la retta $r'$ parallela alla retta $r$ e passante per l'origine. Le rette $r'$ e $r$ sono parallele per costruzione, quindi, per l'Osservazione 2.4, hanno lo stesso coefficiente angolare $m$. Sfruttando la similitudine dei triangoli $\triangle OP^*Q^*$ e $\triangle P_1P_2Q$ in Figura 2.6, grazie alla costruzione (2.1.11)–(2.1.14) possiamo dedurre che

$$m = \frac{\overline{P^*Q^*}}{\overline{OQ^*}} = \frac{\overline{P_2Q}}{\overline{P_1Q}} = \frac{(3-1)}{(3-2)} = 2 \ .$$

Poi, dato che $r$ deve contenere $P_1 = [2, 1]$,si ricava:

$$r : \qquad y = 2x - 3 = 2(x - 2) + 1 \ , \tag{2.1.26}$$

risultato che coincide con (2.1.25).

◁

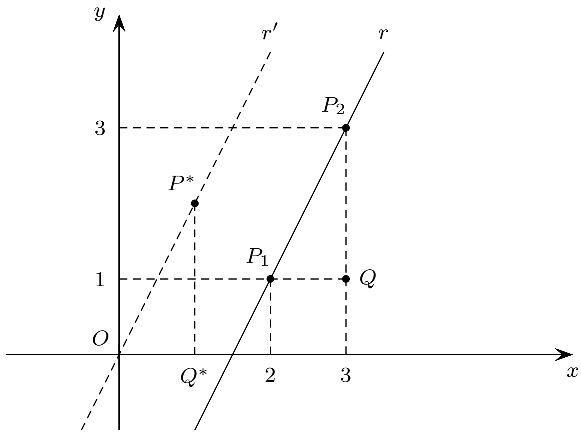



**Figura 2.6** – Equazione di una retta passante per due punti assegnati.

A margine dell'esercizio precedente proponiamo una breve riflessione sul metodo di lavoro: è importante, quando si studia un problema matematico, abituarsi ad usare tutte le conoscenze a propria disposizione, confrontando fra loro risultati eventualmente ottenuti mediante procedimenti diversi, anche cercando di controllarne la coerenza; ciò favorisce una migliore assimilazione dei metodi impiegati ed aiuta ad elaborare utili relazioni tra tutte le nozioni utilizzate.
Detto questo, il lettore è ora invitato a procedere autonomamente ad un importante sforzo di rielaborazione dei contenuti dell'Esercizio 2.7: il risultato finale deve essere la soluzione completa dell'esercizio successivo.

$\triangleright$ **Esercizio 2.8.** Siano $P_1 = [x_1, y_1]$ e $P_2 = [x_2, y_2]$ due generici punti di $\mathbb{R}^2$, $(P_1 \neq P_2)$.

(i) Determinare l'equazione della retta $r$ che contiene $P_1$ e $P_2$.

(ii) Determinare l'equazione della generica retta $r$ che contiene $P_1$.

**Soluzione.** (i) Caso $x_1 \neq x_2$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2.1.27}$$

e

$$r : \quad y = \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right] (x - x_1) + y_1 \ . \tag{2.1.28}$$

Caso $x_1 = x_2$ (retta parallela all'asse $y$):

$$r : \quad x = x_1 . \tag{2.1.29}$$

(ii) La generica retta passante per $P_1$ (non parallela all'asse $y$) è:

$$r : \quad y = m(x - x_1) + y_1 , \quad \text{dove } m \in \mathbb{R} . \tag{2.1.30}$$

La retta $r$ passante per $P_1$ e parallela all'asse $y$ è invece la (2.1.29).

◁

Anche l'esercizio seguente è molto importante.

▷ **Esercizio 2.9.** Siano

$$r : y = mx + b \qquad \text{e} \qquad r' : y = m'x + b'$$

due rette e supponiamo che esse siano *perpendicolari* fra loro, con $m \neq 0$. Determinare la relazione tra i loro coefficienti angolari $m$ e $m'$.

**Soluzione.** Dato che rette parallele hanno uguale coefficiente angolare non è restrittivo supporre[1] che il punto di intersezione tra $r$ e $r'$ sia l'origine $O$. Quindi possiamo semplicemente limitarci a studiare il caso:

$$r : y = mx \qquad \text{e} \qquad r' : y = m'x .$$

Facendo riferimento alla Figura 2.7, vediamo che

$$\theta = \theta' , \tag{2.1.31}$$

in quanto entrambi complementari dello stesso angolo $\alpha$. Ora, scegliendo due punti $P_1 = [x_1, y_1] \in r$, $P_1' = [x_1', y_1'] \in r'$ come in Figura 2.7, dalla (2.1.31) deduciamo che i due triangoli

$$\triangle OP_1Q_1 \qquad \text{e} \qquad \triangle OP_1'Q_1'$$

sono simili. Ne segue che

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{-x_1'}{y_1'} . \tag{2.1.32}$$

D'altra parte:

$$m = \frac{y_1}{x_1} ; \qquad m' = \frac{y_1'}{x_1'} . \tag{2.1.33}$$

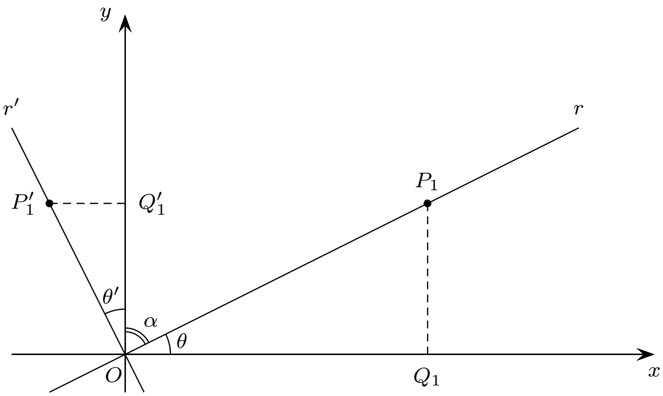



**Figura 2.7** – Rette perpendicolari: legame tra i rispettivi coefficienti angolari.

Quindi la (2.1.32) può essere riscritta nel modo seguente:

$$m = -\frac{1}{m'} \qquad \left(\text{oppure } m' = -\frac{1}{m}\right) , \tag{2.1.34}$$

che fornisce la relazione richiesta.

◁

▷ **Esercizio 2.10.** Siano $P = [-3, 2]$ e $r$ la retta di equazione

$$y = 2x + 5 \ .$$

Determinare l'equazione della retta $r'$ passante per $P$ e perpendicolare a $r$.

**Soluzione.** In virtù della (2.1.34) possiamo subito dire che il coefficiente angolare $m'$ di $r'$ è dato da:

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{2} \ .$$

Quindi l'equazione di $r'$ è della forma:

$$r' : \ y = -\frac{1}{2}x + b \ .$$

[1] Basta traslare le due rette in modo che il loro punto di intersezione coincida con l'origine.

Ora il valore di $b$ può essere agevolmente calcolato imponendo il passaggio di $r'$ per $P$. Si ottiene

$$2 = -\frac{1}{2} \cdot (-3) + b \ ,$$

da cui si ricava $b = 1/2$ e quindi

$$r' \ : \ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ .$$

◁

*Osservazione* 2.5. Un analisi attenta delle (2.1.28)–(2.1.29) mostra che l'equazione di una retta può essere riscritta come

$$ax + by + c = 0 \ , \tag{2.1.35}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a, b$ non entrambi nulli. La (2.1.35) prende il nome di *equazione implicita* della retta.

Per completare questo quadro introduttivo allo studio delle rette nel piano cartesiano, inseriamo ora un esercizio in cui siamo costretti ad anticipare la definizione di *valore assoluto* (si veda il §2.2) ed alcune proprietà della funzione *radice quadrata* (si veda il Capitolo 3): rimandare eventualmente la lettura di questo esercizio ad una fase successiva non pregiudica comunque la comprensione del resto del presente capitolo.

▷ **Esercizio 2.11 (*).** Sia $P_0 = [x_0, y_0]$ e sia $r$ la retta di equazione $ax + by + c = 0$. Mostrare che la distanza di $P_0$ dalla retta $r$ è data da

$$\operatorname{dist}(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ , \tag{2.1.36}$$

dove con $|ax_0 + by_0 + c|$ si è indicato il *valore assoluto* della quantità $ax_0 + by_0 + c$ secondo la definizione che daremo nella (2.2.11).

**Soluzione.** Sia $r'$ la retta per $P_0$ ortogonale alla retta $r$. Chiamata con $H$ l'intersezione di $r$ e $r'$, si ha che $\operatorname{dist}(P_0, r) = \operatorname{dist}(P_0, H)$ (si veda la Figura 2.8). Supponiamo che $a$ e $b$ siano entrambi diversi da zero. Il coefficiente angolare della retta $r$ è $m = -a/b$. Quindi, dalla (2.1.34), e tenendo conto della (2.1.30), la retta $r'$ ha equazione

$$y = \frac{b}{a}(x - x_0) + y_0 \ .$$

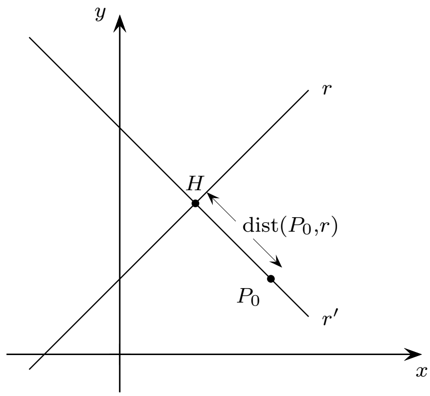



**Figura 2.8** – La distanza di $P_0$ da $r$.

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a}(x - x_0) + y_0 \\ ax + by + c = 0 \end{cases},$$

si trovano le coordinate del punto di intersezione

$$H = \left[ -\frac{ac - b^2x_0 + aby_0}{a^2 + b^2},\ -\frac{bc + abx_0 - a^2y_0}{a^2 + b^2} \right] .$$

Si ha infine

$$\begin{aligned} \text{dist}(P_0, r) &= \text{dist}(P_0, H) \\ &= \sqrt{\left( x_0 + \frac{ac - b^2x_0 + aby_0}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left( y_0 + \frac{bc + abx_0 - a^2y_0}{a^2 + b^2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} . \end{aligned}$$

Il lettore è invitato a fare le dovute osservazioni per concludere che la formula (2.1.36) resta valida anche nel caso in cui $a$ o $b$ siano uguali a zero. ◁

▷ **Esercizio 2.12.** Calcolare la distanza del punto $P_0 = [1, 2]$ dalla retta $r$ di equazione $y = x - 1$.

**Soluzione.** Per primo riscriviamo l'equazione della retta nella forma implicita (2.1.35):

$$x - y - 1 = 0 \; .$$

Adesso, utilizzando la (2.1.36), si trova

$$\mathrm{dist}(P_0, r) = \frac{|1 - 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \; .$$

$\triangleleft$

## 2.2 Grafici di funzioni nel piano cartesiano

In questo paragrafo per prima cosa stabiliamo un collegamento diretto tra la geometria analitica e lo studio di funzioni che abbiamo iniziato nel Capitolo 1. Poi, acquisiremo maggiore padronanza dei vari concetti introdotti attraverso lo studio di simmetrie e traslazioni.

**Definizione 2.1.** Siano $A$, $B \subseteq \mathbb{R}$. Data una funzione $f : A \to B$, il suo *grafico* è il sottoinsieme $\Gamma f$ di $\mathbb{R}^2$ definito da:

$$\Gamma f = \Big\{ [x, f(x)] \in \mathbb{R}^2 \; : \; x \in A \Big\} \; . \tag{2.2.1}$$

$\triangleright$ **Esercizio 2.13.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$f(x) = x - 1 \, , \qquad \forall \, x \in \mathbb{R} \; .$$

Disegnare il grafico di $f$.

**Soluzione.** Per definizione

$$\Gamma f = \Big\{ [x, x - 1] \in \mathbb{R}^2 \; : \; x \in \mathbb{R} \Big\} \; . \tag{2.2.2}$$

La (2.2.2) ci dice che, per i punti del grafico, il legame fra l'ordinata e l'ascissa è espresso dall'equazione:

$$y = x - 1 \, , \qquad x \in \mathbb{R} \; . \tag{2.2.3}$$

Ne segue che $\Gamma f$ è la retta in Figura 2.9.

$\triangleleft$

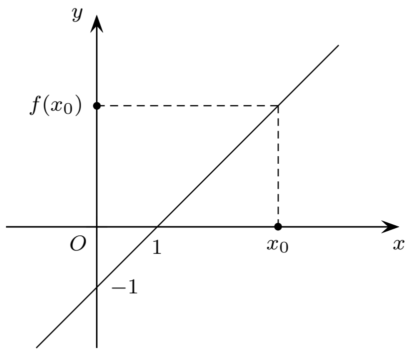



**Figura 2.9** – Grafico della funzione dell'Esercizio 2.13.

*Osservazione* 2.6. Il lettore deve riflettere bene sul legame tra una funzione ed il suo grafico. In particolare, osservando ancora la Figura 2.9, si può ragionare nel modo seguente: preso un punto $x_0$ nel dominio di $f$, si tracci la retta verticale che lo contiene. Questa retta incontrerà il grafico $\Gamma f$ necessariamente in un *unico* punto, la cui *ordinata* rappresenta precisamente il valore $f(x_0)$.

In realtà, il procedimento descritto nell'Esercizio 2.13 ha validità più generale: in particolare, consente di affermare che ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del tipo:

$$f(x) = mx + b\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\ , \tag{2.2.4}$$

con $m$ e $b$ numeri reali assegnati, ha come grafico la retta di equazione

$$y = mx + b\ .$$

Se $m \neq 0$, una funzione come in (2.2.4) viene chiamata *polinomio* di primo grado. Nel Capitolo 3 riprenderemo in modo più sistematico lo studio dei cosiddetti polinomi: per il momento ci limitiamo a introdurre anche i polinomi di secondo grado, in quanto i loro grafici (chiamati *parabole*, vedi (2.2.6) sotto) rientrano naturalmente all'interno del nostro quadro introduttivo allo studio della geometria analitica.

Un polinomio di $2^o$ grado è una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = ax^2 + bx + c\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\ , \tag{2.2.5}$$

dove $a$, $b$, $c$ sono tre numeri reali fissati, con $a \neq 0$.

Ragionando come nel precedente Esercizio 2.13, possiamo concludere che il grafico del polinomio di $2^o$ grado (2.2.5) è il luogo di punti (chiamato *parabola*) del piano $\mathbb{R}^2$ definito dall'equazione:

$$y = ax^2 + bx + c\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,\ (a \neq 0)\ . \tag{2.2.6}$$

Descriviamo ora il procedimento operativo che illustra come si rappresenta graficamente una parabola del tipo (2.2.6). Per non creare fratture nel flusso dell'esposizione, preferiamo infatti rinviare al Capitolo 3 le giustificazioni di alcune proprietà algebriche delle equazioni di secondo grado di cui faremo uso già in questa sede. In ogni caso, aggiungiamo che il lettore potrebbe trarre beneficio da un riesame di questa parte successivo allo studio del Capitolo 3.

Operativamente, per disegnare una parabola si presentano vari casi che dipendono sia dal segno di $a$ che dal segno del cosiddetto *discriminante* $\Delta = b^2 - 4ac$.

(i) *Caso* $\Delta > 0$, $a > 0$. In questa situazione l'equazione di $2^o$ grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.2.7}$$

ammette due soluzioni in $\mathbb{R}$, date da:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\,, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\,. \tag{2.2.8}$$

Le $x_1$, $x_2$ sono anche chiamate *radici* del polinomio di $2^o$ grado.

**Proprietà 2.1.** Notiamo, anticipando un argomento che tratteremo nel Capitolo 3, che se $a \neq 0$ e $\Delta > 0$, sussiste la seguente *fattorizzazione* del polinomio di $2^o$ grado:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \tag{2.2.9}$$

con $x_1$, $x_2$ date dalla (2.2.8) (per il momento, il lettore potrebbe verificare come esercizio la validità della (2.2.9)).

In virtù della fattorizzazione (2.2.9), è evidente che, nel Caso (i), la funzione (2.2.5) è:

$$\begin{cases} \text{positiva} & \text{se} \quad x < x_1 \qquad \text{oppure} \quad x > x_2 \\ \text{negativa} & \text{se} \quad x_1 < x < x_2 \\ \text{nulla} & \text{se} \quad x = x_1 \qquad \text{oppure} \quad x = x_2 \ . \end{cases}$$

Questa osservazione dovrebbe rendere plausibile per il lettore il fatto che, in questa situazione, la parabola abbia un andamento grafico del tipo riportato in Figura 2.10a: in questa figura, l'ascissa del cosiddetto *vertice* $V$ è data, per ragioni di simmetria, dal punto medio tra le radici, cioè

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} \ .$$

Quindi il vertice $V$ ha coordinate date da:

$$V = \left[ -\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c \right] = \left[ -\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right] \ . \tag{2.2.10}$$

Si noti anche che il segno delle radici potrebbe essere diverso rispetto a quello scelto nella Figura 2.10a: ad esempio, potrebbero essere entrambe negative, oppure una positiva e l'altra negativa.

(ii) *Caso* $\Delta = 0$, $a > 0$. In questo caso

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

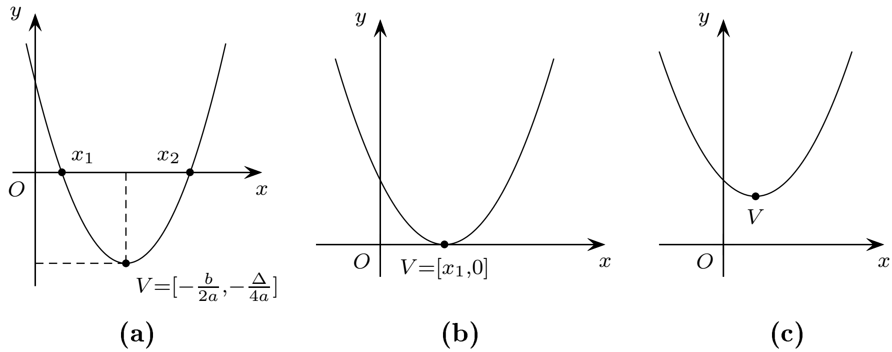



**Figura 2.10** – Grafico della parabola nel caso $a > 0$: (a) $\Delta > 0$; (b) $\Delta = 0$; (c) $\Delta < 0$.

e vale ancora la fattorizzazione (2.2.9) (con $x_1 = x_2$). Quindi la parabola è al di sopra dell'asse $x$, ad esso tangente nel vertice $V$ di coordinate $[x_1, 0]$. Il grafico è riportato in Figura 2.10b.

(iii) *Caso* $\Delta < 0$, $a > 0$. In questo caso la (2.2.7) *non* ha soluzioni nel campo dei numeri reali e dunque la parabola (si veda la Figura 2.10c) si trova interamente al di sopra dell'asse $x$. Le coordinate di $V$ sono ancora date da (2.2.10).

Nei tre corrispondenti casi con $a < 0$ la concavità della parabola è rivolta verso il basso. I dettagli delle tre rappresentazioni grafiche associate sono lasciati al lettore.

$\triangleright$ **Esercizio 2.14.** Tracciare il grafico di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = -x^2 - 2x + 3 \ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \ .$$

**Soluzione.** La soluzione è in Figura 2.11. In questo caso $a = -1 < 0$, quindi

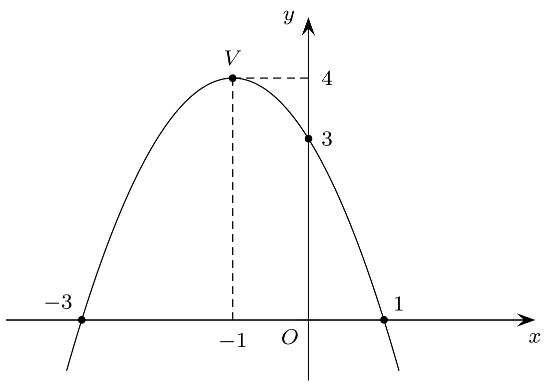



**Figura 2.11** – Grafico della funzione dell'Esercizio 2.14.

la concavità della parabola è rivolta verso il basso. Si noti che il grafico interseca l'asse $x$ nei due punti di ascissa rispettivamente $-3$ e 1. Inoltre, $f(0) = 3$ e il vertice $V$ ha coordinate $[-1, 4]$.

$\triangleleft$

*Osservazione* 2.7. Nel Capitolo 1 abbiamo introdotto i concetti di funzione iniettiva, surgettiva e bigettiva. Possiamo notare che la funzione

dell'Esercizio 2.13 è sia iniettiva, sia surgettiva, per cui è bigettiva. Più generalmente, lo stesso è vero per ogni polinomio di primo grado.
Invece, le funzioni di secondo grado (2.2.5) non sono né iniettive, né surgettive. Per rendersi conto di questa affermazione, il lettore è invitato a soffermarsi sul seguente procedimento grafico. Consideriamo il grafico di una funzione di tipo (2.2.5), come in Figura 2.12 (in essa, $a < 0$, ma nel caso $a > 0$ il ragionamento risulta del tutto analogo). Tracciamo due rette orizzontali

$$y = c_i \,, \qquad i = 1, 2 \;,$$

con $c_1 > V_y$ e $c_2 < V_y$ (con $V_y$ abbiamo indicato l'ordinata del vertice $V$). Si può notare che l'intersezione tra la retta $y = c_1$ e il grafico della funzione non contiene punti con coordinate reali, quindi, come sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, è l'insieme vuoto $\emptyset$. Il lettore dovrebbe riconoscere che ciò è equivalente all'asserzione che la funzione *non* è surgettiva. Invece, l'intersezione tra la retta $y = c_2$ e il grafico della funzione è costituita da due punti distinti, di ascissa $x_a$ e $x_b$ rispettivamente: allora abbiamo $f(x_a) = f(x_b) = c_2$, cosa che ci consente di concludere che la funzione *non* è iniettiva.
Per completezza, il lettore dovrebbe anche notare che la bigettività dei polinomi di primo grado corrisponde alla proprietà che tutte le rette orizzontali ne intersecano il grafico in un unico punto.

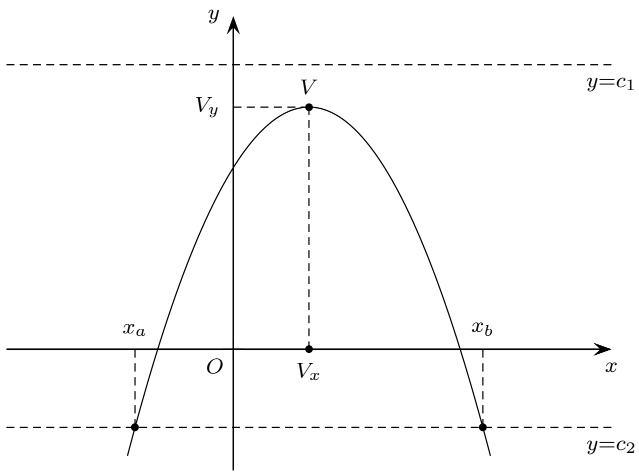



**Figura 2.12** – Studio di iniettività e surgettività per funzioni polinomiali di 2$^o$ grado.

Introduciamo ora una funzione che risulta di grandissima utilità in svariate situazioni. Iniziamo dicendo che la scrittura $|x|$ (si legge *valore assoluto di* $x$) significa quanto segue:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{R},\ x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \in \mathbb{R},\ x < 0\,. \end{cases} \tag{2.2.11}$$

Risulta quindi naturale definire la funzione valore assoluto $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$f(x) = |x|\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\ . \tag{2.2.12}$$

▷ **Esercizio 2.15.** Disegnare il grafico della funzione valore assoluto definita in (2.2.11)–(2.2.12).

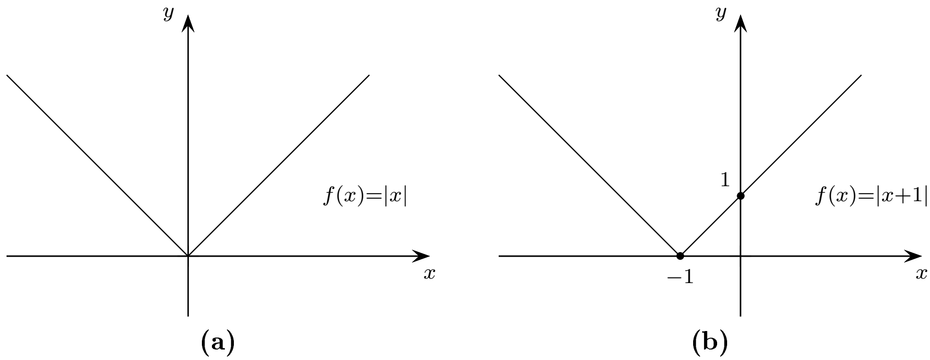



**Figura 2.13** – (a) Grafico della funzione $f(x) = |x|$. (b) Grafico della funzione $f(x) = |x+1|$.

**Soluzione.** In corrispondenza degli $x \geq 0$ il grafico coincide con la bisettrice del primo quadrante, cioè la semiretta

$$y = x\,, \qquad x \geq 0\ .$$

Invece, per gli $x < 0$, il grafico è dato da

$$y = -x\,, \qquad x < 0\ .$$

Mettendo insieme queste osservazioni si arriva facilmente al grafico di Figura 2.13a.

◁

▷ **Esercizio 2.16.** Tracciare il grafico della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = |x+1|\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\ .$$

**Soluzione.** Abbiamo

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{se } x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{se } x+1 < 0\,, \end{cases} \tag{2.2.13}$$

che, per maggiore chiarezza, riscriviamo come:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1\,. \end{cases} \tag{2.2.14}$$

Quindi il grafico di $f$ coincide con la retta $y = x+1$ se $x \geq -1$, mentre per $x < -1$ si deve usare $y = -x-1$. Il risultato complessivo è nella Figura 2.13b. ◁

In molti casi è utile notare la presenza di eventuali simmetrie delle funzioni.

**Definizione 2.2.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremo che $f$ è una *funzione pari* se:

$$f(x) = f(-x)\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\ . \tag{2.2.15}$$

♢ **Esempio 2.1.** La funzione valore assoluto che abbiamo definito in (2.2.11)–(2.2.12) è pari.

♢ **Esempio 2.2.** La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 1 + x^2\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

è pari. Il suo grafico è la parabola in Figura 2.14.

*Osservazione* 2.8. Se $f$ è una funzione pari, allora il suo grafico risulta *simmetrico rispetto all'asse* $y$ (il lettore è invitato a trovare autonomamente la giustificazione di questa asserzione). In altre parole, se si conosce il grafico di $f$ per $x > 0$ (o per $x < 0$) lo si può completare per riflessione speculare rispetto all'asse $y$ (cioè, ribaltando la figura attorno all'asse $y$).

A titolo di esempio, si osservino le Figure 2.13a e 2.14.

**Definizione 2.3.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ . Diremo che $f$ è una *funzione dispari* se:

$$f(x) = -f(-x)\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\ . \tag{2.2.16}$$

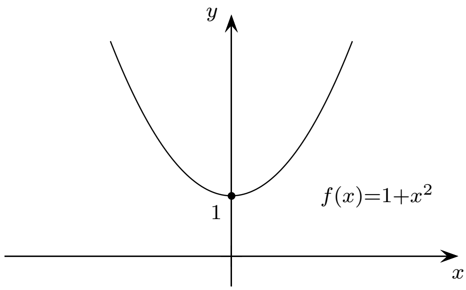
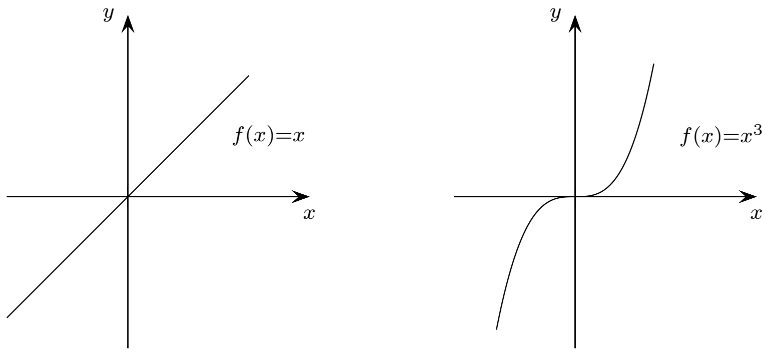



**Figura 2.14** – Grafico della funzione $f(x) = 1 + x^2$ .




**(a)** **(b)**

**Figura 2.15** – (a) Grafico della funzione $f(x) = x$. (b) Grafico della funzione $f(x) = x^3$.

♢ **Esempio 2.3.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\ .$$

Il suo grafico è riprodotto nella Figura 2.15a. Questa funzione è ovviamente dispari, in quanto $-(-x) = x\,,\quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ . Più generalmente, le funzioni potenza definite, per $n \in \mathbb{N}$ fissato, da

$$f(x) = x^n\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\ ,$$

risultano essere funzioni dispari quando l'esponente $n$ è dispari. Nella Figura 2.15b è rappresentato il caso $n = 3$. Lo studio delle funzioni potenza verrà approfondito nel corso del Capitolo 3.

*Osservazione* 2.9. Se $f$ è una funzione dispari, allora il suo grafico risulta *simmetrico rispetto all'origine* $O$. In altre parole, se si conosce il grafico di $f$ per $x > 0$ (o per $x < 0$) lo si può completare per doppia riflessione speculare rispetto all'asse $y$ e all'asse $x$ (cioè, ribaltando due volte l'immagine rispettivamente attorno agli assi $y$ e $x$).

A titolo di esempio, si possono osservare le Figure 2.15a e 2.15b.

Ora, al fine di migliorare la nostra familiarità con i grafici delle funzioni, ragioniamo su un problema molto naturale, cioè quello di effettuare la *traslazione* di un grafico, in senso verticale oppure orizzontale. Per capire meglio, osserviamo la Figura 2.16, che costituisce un'istanza particolare della seguente osservazione.

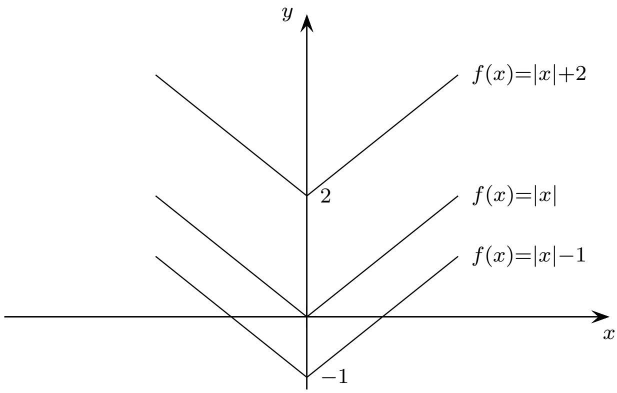



**Figura 2.16** – Traslazioni verticali della funzione $f(x) = |x|$.

*Osservazione* 2.10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione data. Sia poi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = f(x) + c \ , \tag{2.2.17}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante fissata. Allora, se $c > 0$, il grafico di $g$ si ottiene da quello di $f$ mediante una *traslazione* verso l'alto di ampiezza pari a $c$; se $c < 0$, la traslazione è invece verso il basso.

Osserviamo ora le Figure 2.13a e 2.13b, confrontando la definizione di $f$ nei due casi. Il lettore dovrebbe essere in grado di dedurre la seguente:

*Osservazione* 2.11. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione data. Sia poi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = f(x + c) \ , \tag{2.2.18}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante fissata. Allora il grafico di $g$ si ottiene da quello di $f$ mediante una *traslazione orizzontale* di ampiezza pari a $|c|$, verso sinistra se $c > 0$, verso destra se $c < 0$.

$\triangleright$ **Esercizio 2.17.** Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x) = (x - 2)^2 + 3 \ . \tag{2.2.19}$$

Disegnare il grafico della funzione $g$.

**Soluzione.** Per uno svolgimento rapido e qualitativamente accettabile possiamo partire dal fatto che il grafico di

$$f(x) = x^2 \, , \qquad x \in \mathbb{R} \ ,$$

è quello di Figura 2.17a. Poi si osserva che il grafico di $g$ si ricava operando una traslazione verso destra pari a 2, ed una verso l'alto pari a 3. Dato che g(0)=7, si ottiene il risultato di Figura 2.17b. Alternativamente, avremmo potuto sviluppare la definizione di $g$ ricavando

$$g(x) = x^2 - 4x + 7 \, , \qquad \forall \, x \in \mathbb{R} \ .$$

A questo punto si poteva applicare il metodo di studio delle parabole illustrato in precedenza, cosa che avrebbe condotto ancora alla Figura 2.17b.

$\triangleleft$

## 2.3 Esercizi di riepilogo

$\triangleright$ **Esercizio 2.18.** Siano $P_1 = [1, 2]$, $P_2 = [2, -1]$. Scrivere l'equazione della retta $r$ che contiene $P_1$ e $P_2$, e disegnarla.

**Soluzione.** Usando la (2.1.30) possiamo dire che tutte le rette passanti per $P_1$ (eccetto quella parallela all'asse $y$) hanno equazione del tipo

$$y = m(x - 1) + 2 \ , \tag{2.3.1}$$

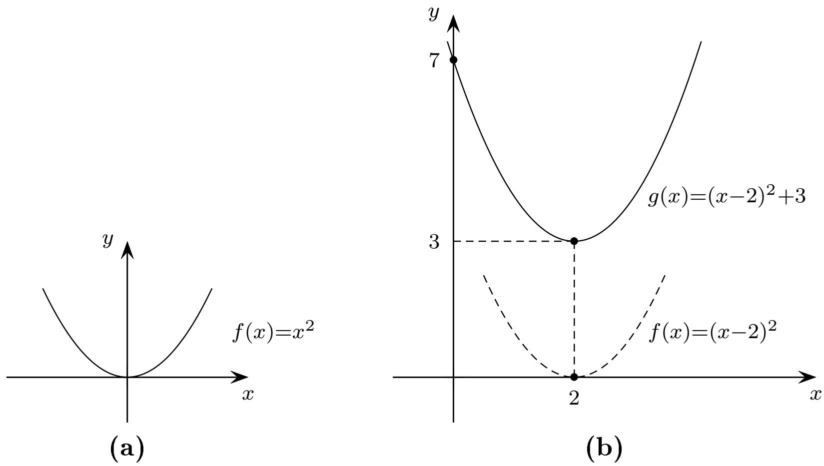



**Figura 2.17** – (a) Grafico di $f(x) = x^2$. (b) Grafico di $g(x) = (x-2)^2 + 3$.

con $m \in \mathbb{R}$. Per determinare il valore di $m$ dobbiamo imporre che le coordinate di $P_2$ soddisfino la (2.3.1). Si ottiene

$$-1 = m(2-1) + 2 \ , \tag{2.3.2}$$

da cui si ricava facilmente $m = -3$. In conclusione, l'equazione della retta $r$ richiesta è:

$$r : \quad y = -3x + 5 \ . \tag{2.3.3}$$

A titolo di verifica il lettore può controllare che le coordinate di entrambi i punti $P_1$ e $P_2$ soddisfano l'equazione (2.3.3) appena ottenuta.
Notiamo anche che $r$ interseca l'asse $x$ nel punto di coordinate $[(5/3), 0]$. L'intersezione con l'asse $y$ è invece $[0, 5]$. Con tutti questi elementi non sussiste difficoltà a realizzare il disegno di Figura 2.18. $\lhd$

$\rhd$ **Esercizio 2.19.** Siano $r : \ y = 2x + 1 \, , \ P = [-2, 2] \, .$

(i) Rappresentare graficamente $r$ e $P$ nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$;

(ii) calcolare la proiezione ortogonale $Q$ di $P$ su $r$;

(iii) calcolare $\mathrm{dist}(P, r)$;

(iv) scrivere l'equazione della circonferenza $\gamma$ di centro $P$ e tangente a $r$;

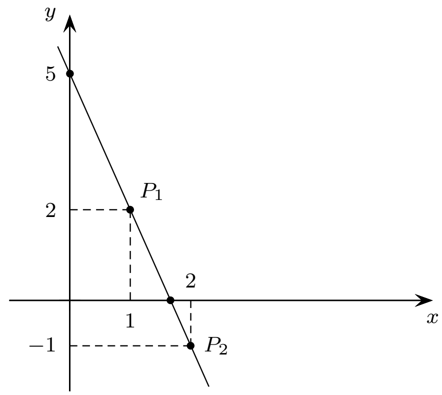



**Figura 2.18** – La retta $y = -3x + 5$ dell'Esercizio 2.18.

(v) determinare il punto $P'$ simmetrico di $P$ rispetto a $r$.

**Soluzione.** (i) Per disegnare $r$ è sufficiente determinare due punti che appartengono a $r$. Ad esempio, l'intersezione di $r$ con l'asse $x$ è $[-(1/2), 0]$, mentre quella con l'asse $y$ è $[0, 1]$. Si perviene quindi alla retta in Figura 2.19.

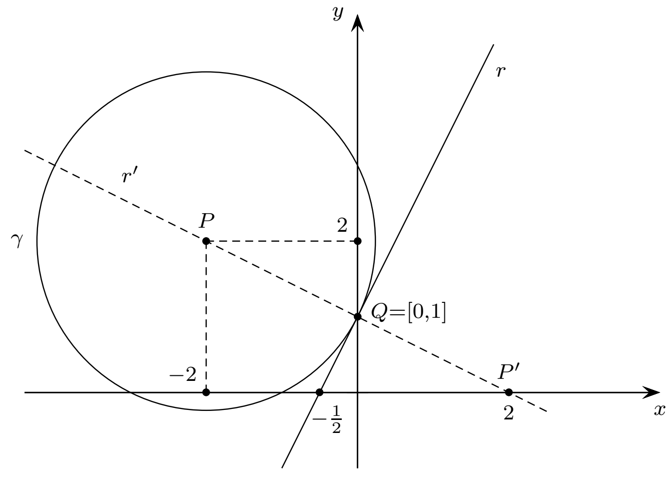



**Figura 2.19** – Illustrazione dell'Esercizio 2.19.

(ii) $Q = r \cap r'$, dove $r'$ è la retta passante per $P$ e ortogonale a $r$. Poiché $r$ ha coefficiente angolare $m = 2$, deduciamo da (2.1.34) che $r'$ ha coefficiente angolare $m' = (-1/2)$. Unendo questa informazione al fatto che $r'$ passa per $P$, ricaviamo facilmente:

$$r' : \quad y = -\frac{1}{2}(x+2) + 2 \ ,$$

che, eseguendo i calcoli, equivale a:

$$r' : \quad y = -\frac{1}{2}x + 1 \ . \tag{2.3.4}$$

Ora possiamo concludere che le coordinate di $Q$ vengono determinate imponendo che esse soddisfino sia l'equazione di $r$, sia quella di $r'$. Utilizzando ancora la simbologia introdotta in (2.1.21), ciò equivale a dire che le coordinate di $Q$ si ricavano risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \ . \end{cases} \tag{2.3.5}$$

Ora il lettore è invitato a determinare autonomamente, mediante considerazioni algebriche elementari, la soluzione del sistema (2.3.5): il risultato è $Q = [0, 1]$.

(iii) $\mathrm{dist}(P, r) = \mathrm{dist}(P, Q) = \sqrt{(-2-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$ .

(iv) Grazie alla (2.1.6), con centro $C = P$ e raggio $R = \mathrm{dist}(P, r) = \sqrt{5}$, perveniamo all'equazione della circonferenza $\gamma$ richiesta:

$$\gamma : \quad (x+2)^2 + (y-2)^2 = 5 \ . \tag{2.3.6}$$

(v) Il simmetrico $P' = [x', y']$ di $P$ rispetto ad $r$ si può ottenere imponendo che $Q$ sia il punto medio del segmento $\overline{PP'}$. In formule

$$\left[\frac{x' + (-2)}{2}, \frac{y' + 2}{2}\right] = [0, 1] \quad \text{ovvero} \quad [x', y'] = [2, 0] \ .$$

Si noti che il fatto che $Q$ e $P'$ coincidano con le intersezioni di $r'$ con gli assi è puramente casuale.

◁

▷ **Esercizio 2.20.** Determinare per quali valori di $b \in \mathbb{R}$, la retta $r$ di equazione $y = b$ risulta secante, tangente o esterna alla circonferenza $\gamma$ di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

**Soluzione.** Determiniamo dapprima il centro ed il raggio della circonferenza. Dalle (2.1.9) si ricava

$$C = [1, 0]\,, \qquad R = 1\ .$$

Adesso, la retta $r$ risulta tangente alla circonferenza quando $\mathrm{dist}(C, r) = R = 1$, ovvero, quando

$$|b| = 1\ .$$

Segue che la retta $r$ è secante alla circonferenza quando $-1 < b < 1$, tangente quando $b = \pm 1$ ed esterna quando $b < -1$ o $b > 1$. La visualizzazione grafica della soluzione è mostrata in Figura 2.20. ◁

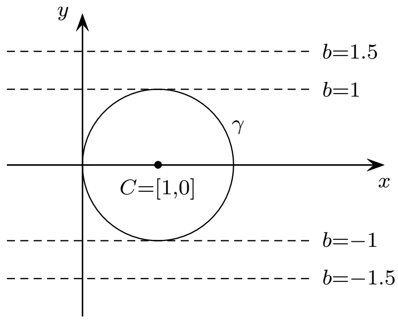



**Figura 2.20** – Illustrazione dell'Esercizio 2.20.

▷ **Esercizio 2.21.** Disegnare il grafico di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = |x - 1| - |x|\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\ . \tag{2.3.7}$$

**Soluzione.** Osserviamo preliminarmente che

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{se } x < 1\ . \end{cases} \tag{2.3.8}$$

Ora, mediante una breve riflessione, deduciamo che:

$$f(x) = \begin{cases} (-x+1) - (-x) & \text{se } x < 0 \\ (-x+1) - x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ (x-1) - x & \text{se } x \geq 1\ . \end{cases} \tag{2.3.9}$$

Svolgendo i calcoli in (2.3.9) otteniamo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ -2x+1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -1 & \text{se } x \geq 1\ . \end{cases} \tag{2.3.10}$$

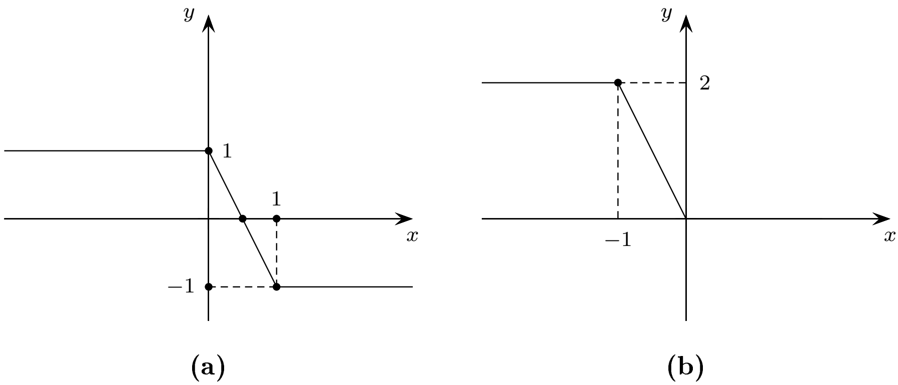



**Figura 2.21** – (a) Grafico della funzione $f(x) = |x-1| - |x|$. (b) Grafico di $g(x) = f(x+1)+1$, con $f(x)$ definita dalla (2.3.7).

Quindi il grafico della funzione è quello di Figura 2.21a.

◁

▷ **Esercizio 2.22.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione dell'Esercizio 2.21. Disegnare il grafico di $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = f(x+1) + 1 , \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} .$$

**Soluzione.** Si può partire dal grafico di Figura 2.21a, fare una traslazione verso l'alto di ampiezza 1 e poi una traslazione a sinistra, ancora di ampiezza 1. Si ottiene il grafico di Figura 2.21b.
Alternativamente, si può esplicitare

$$g(x) = |(x+1)-1| - |x+1| + 1 = |x| - |x+1| + 1$$

e poi studiare direttamente $g$.

◁

▷ **Esercizio 2.23 (*).** Sia $P = [2, 4]$. Si consideri la parabola di equazione

$$y = x^2 + x - 2 \ . \tag{2.3.11}$$

(i) Disegnare la parabola, verificando che essa contiene $P$;

(ii) determinare l'equazione della retta $r$ che è *tangente* alla parabola in $P$.

**Soluzione.** (i) L'equazione

$$x^2 + x - 2 = 0$$

ammette le due soluzioni reali $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$. Quindi la parabola interseca l'asse $x$ in due punti, di coordinate rispettivamente $[-2, 0]$ e $[1, 0]$. L'intersezione della parabola con l'asse $y$ si ricava ponendo $x = 0$ in (2.3.11): è il punto di coordinate $[0, -2]$. Tenendo conto del fatto che la concavità della parabola è rivolta verso l'alto si giunge alla rappresentazione di Figura 2.22 (notiamo che, per comodità grafica, in questa figura le unità di misura sui due assi non coincidono). Osserviamo che, ponendo $x = 2$ e $y = 4$ in (2.3.11), l'equazione risulta soddisfatta: quindi effettivamente questa parabola passa per $P$.

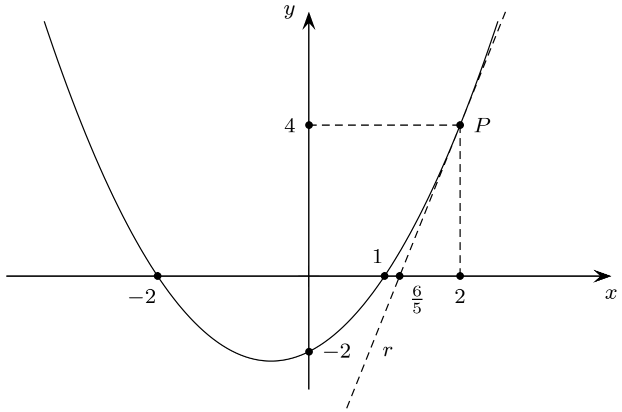



**Figura 2.22** – Retta tangente ad una parabola in un punto assegnato (Esercizio 2.23).

(ii) Dato che la retta tangente $r$ richiesta passa per $P$, sarà della forma:

$$y = m(x - 2) + 4 \ . \tag{2.3.12}$$

Geometricamente, possiamo riconoscere (almeno usando l'intuizione associata alla rappresentazione di Figura 2.22) che il requisito che $r$ sia tangente alla parabola corrisponde alla richiesta che $P$ sia l'*unico* punto di intersezione tra $r$ e la parabola stessa. Algebricamente, ciò equivale a richiedere che $P$ (cioè, $x = 2$, $y = 4$) sia l'unica soluzione del sistema:

$$\begin{cases} y = m(x - 2) + 4 \\ y = x^2 + x - 2 \ . \end{cases} \tag{2.3.13}$$

Studiamo questo sistema: uguagliando le due espressioni che esso impone per $y$, ricaviamo:

$$x^2 + x - 2 = m(x-2) + 4 \ ,$$

che, sviluppando i calcoli, equivale a:

$$x^2 + (1-m)x + (2m-6) = 0 \ . \qquad (2.3.14)$$

Questa è un'equazione di tipo (2.2.7), con $a = 1$, $b = (1-m)$ e $c = (2m-6)$. Quindi la condizione che (2.3.14) ammetta un'unica soluzione equivale al fatto che il suo discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

si annulli. Esplicitando questa richiesta otteniamo

$$(1-m)^2 - 4(2m-6) = 0 \ ,$$

che eseguendo i calcoli diventa:

$$m^2 - 10m + 25 = 0 \quad \text{ovvero} \quad (m-5)^2 = 0 \ . \qquad (2.3.15)$$

Quindi $m = 5$ e l'equazione della retta tangente $r$ richiesta è

$$r \ : \quad y = 5(x-2) + 4 \quad \text{ovvero} \quad y = 5x - 6 \ . \qquad (2.3.16)$$

◁

▷ **Esercizio 2.24.** Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

$$A = \left\{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq x + 1 \right\} \ . \qquad (2.3.17)$$

Rappresentare graficamente $A$.

**Soluzione.** Sappiamo bene che l'equazione

$$y = x + 1$$

rappresenta una retta $r$ in $\mathbb{R}^2$. Ad $A$ appartengono non solo i punti di questa retta, ma anche tutti quei punti che stanno verticalmente sopra un punto di $r$. In parole più semplici, $A$ altro non è che il semi-piano avente $r$ come bordo inferiore (si veda la Figura 2.23).

◁

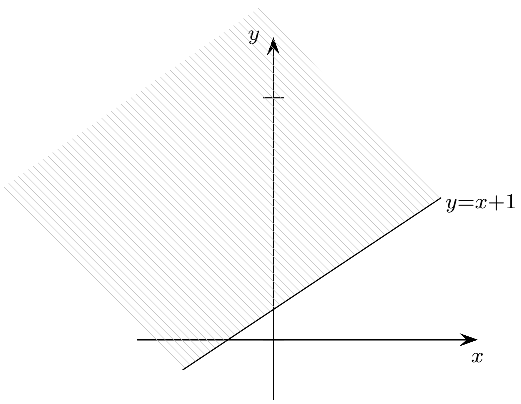



**Figura 2.23** – Illustrazione dell'Esercizio 2.24.

▷ **Esercizio 2.25.** Si consideri il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

$$A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \le x \le 3 \;\text{ e }\; -2x \le y \le x + 1\right\} \,. \tag{2.3.18}$$

Rappresentare graficamente $A$.

**Soluzione.** I punti di $A$ hanno ascissa compresa tra 1 e 3 e sono compresi tra la retta $r_1$, di equazione $y = -2x$, e la retta $r_2$, di equazione $y = x + 1$. La rappresentazione grafica di $A$ è in Figura 2.24.

◁

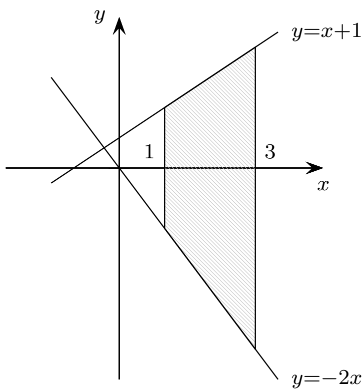



**Figura 2.24** – Illustrazione dell'Esercizio 2.25.

In un modo simile a quello dell'esercizio precedente, possiamo descrivere una regione del piano compresa tra i grafici di due funzioni. Più precisamente, siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite su un comune intervallo $a \leq x \leq b$ e tali che:

$$f(x) \leq g(x)\,, \qquad \forall\, x \text{ t. c. } a \leq x \leq b\ .$$

Allora la regione del piano compresa tra i grafici di $f(x)$ e $g(x)$ è l'insieme seguente:

$$A = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2\ :\ a \leq x \leq b \ \text{ e } \ f(x) \leq y \leq g(x)\right\}\ . \tag{2.3.19}$$

A titolo di esempio, si veda la Figura 2.25.

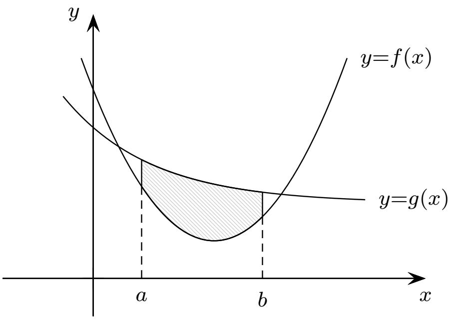



**Figura 2.25** – Rappresentazione geometrica della regione $A$ definita dalla (2.3.19).

▷ **Esercizio 2.26.** Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ è soddisfatta la seguente disequazione:

$$x^2 - x - 6 < 0\ . \tag{2.3.20}$$

**Soluzione.** L'equazione $x^2 - x - 6 = 0$ ha come soluzioni i due valori $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Quindi la parabola $y = x^2 - x - 6$, che ha concavità verso l'alto, interseca l'asse $x$ nei due punti di ascissa rispettivamente $-2$ e 3, come possiamo vedere nella Figura 2.26. Ne segue che la quantità $x^2 - x - 6$ assume valori negativi precisamente quando $-2 < x < 3$. In conclusione l'insieme delle soluzioni di (2.3.20) è:

$$A = \{x \in \mathbb{R}\ :\ -2 < x < 3\}\ .$$

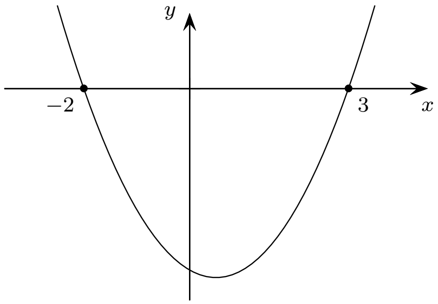



**Figura 2.26** – La parabola $y = x^2 - x - 6$ .

Alternativamente, avremmo anche potuto analizzare (2.3.20) per via puramente algebrica. Infatti, applicando la fattorizzazione (2.2.9) abbiamo

$$x^2 - x - 6 = (x+2) \cdot (x-3) \ .$$

Ora, un prodotto di due fattori è negativo quando essi hanno segno opposto: in questo caso, l'unica possibilità è chiaramente $(x+2) > 0$ e $(x-3) < 0$, cosa che si verifica se e solo se $-2 < x < 3$. ◁

▷ **Esercizio 2.27.** Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ è soddisfatta la seguente disequazione:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 1} > 0 \ . \tag{2.3.21}$$

**Soluzione.** Riscriviamo la (2.3.21) come:

$$\frac{N}{D} > 0 \ , \tag{2.3.22}$$

dove ovviamente abbiamo posto:

$$N = x^2 - x - 6 \ ; \qquad D = x - 1 \ .$$

Ora, la (2.3.22) risulta verificata quando $N$ e $D$ hanno lo stesso segno e, inoltre, si deve avere $D \neq 0$. Lo studio di $N$ è già stato effettuato nell'Esercizio 2.26 e possiamo riassumerlo come segue:

$$\begin{cases} N > 0 & \Leftrightarrow \ (\, x < -2 \quad \text{oppure} \quad x > 3 \,) \\ N < 0 & \Leftrightarrow \ -2 < x < 3 \ . \end{cases} \tag{2.3.23}$$

Invece per $D$:

$$\begin{cases} D > 0 & \Leftrightarrow \quad x > 1 \\ D < 0 & \Leftrightarrow \quad x < 1 \ . \end{cases} \tag{2.3.24}$$

Adesso trasferiamo le informazioni (2.3.23) e (2.3.24) nella Figura 2.27: le ascisse dove $N$ è linea unita sono quelle per cui $N > 0$, quelle per cui $N$ è linea tratteggiata corrispondono invece a $N < 0$; lo stesso vale per $D$.

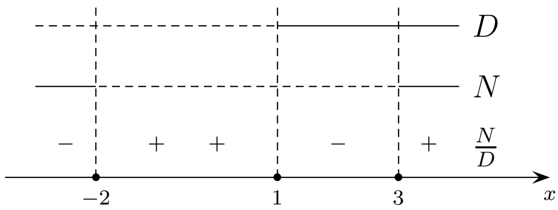



**Figura 2.27** – Rappresentazione del segno di $N$, $D$ e $N/D$.

Dall'esame della rappresentazione di Figura 2.27 vediamo che $N$ e $D$ sono entrambi positivi per $x > 3$, mentre sono entrambi negativi per $-2 < x < 1$. In conclusione, l'insieme delle soluzioni di (2.3.21) è:

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ -2 < x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 3\} \ .$$

$\triangleleft$

$\triangleright$ **Esercizio 2.28.** Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ è soddisfatta la seguente disequazione:

$$|x+2| \leq 3 \ . \tag{2.3.25}$$

**Soluzione.** Sappiamo che

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{se} \quad x \geq -2 \\ -x-2 & \text{se} \quad x < -2 \ . \end{cases} \tag{2.3.26}$$

Quindi la (2.3.25) equivale all'unione delle soluzioni dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x+2 \leq 3 \\ x \geq -2 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} -x-2 \leq 3 \\ x < -2 \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -2 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x \geq -5 \\ x < -2 \; . \end{cases}$$

Il primo sistema risulta soddisfato in $A = \{x \in \mathbb{R}\, ;\, -2 \leq x \leq 1\}$, mentre il secondo in $B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, -5 \leq x < -2\}$. L'insieme delle soluzioni della disequazione iniziale è quindi:

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, -5 \leq x \leq 1\} \; .$$

$\triangleleft$

*Osservazione* 2.12. Ragionando come nell'Esercizio 2.28, il lettore è invitato a verificare la seguente equivalenza:

$$|x - \ell| \leq \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell - \varepsilon \leq x \leq \ell + \epsilon \; , \tag{2.3.27}$$

valida $\forall\, \ell,\, \varepsilon \in \mathbb{R}$ (si noti che la (2.3.27) ammette soluzioni solo se $\varepsilon \geq 0$).

## 2.4 Coniche in forma canonica

In generale, per conica in $\mathbb{R}^2$ si intende il luogo dei punti di $\mathbb{R}^2$ che soddisfano un'equazione polinomiale di secondo grado del tipo

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \; , \tag{2.4.1}$$

dove $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ e i coefficienti $a,\ b,$ e $c$ non sono tutti nulli. In realtà, senza qualche ulteriore ipotesi sui coefficienti, la (2.4.1) comprende anche i cosiddetti casi *degeneri*. Ad esempio, il luogo dei punti che soddisfano

$$xy = 0 \tag{2.4.2}$$

non è altro che l'unione dei due assi. Più generalmente, le coniche degeneri sono costituite da una coppia di rette, che possono essere incidenti, coincidenti oppure parallele e distinte.
Invece i casi geometricamente significativi, cioè le coniche *non* degeneri, sono essenzialmente tre: *ellisse, iperbole* e *parabola.* Più specificamente, uno studio avanzato delle equazioni di tipo (2.4.1), coinvolgente argomenti non solo puramente geometrici, ma anche inerenti alla cosiddetta *algebra*

*lineare*, consente essenzialmente di ricondurre (mediante opportune rotazioni e traslazioni del sistema di assi cartesiani di partenza) lo studio delle coniche alle situazioni che descriveremo in questo paragrafo e che, per questa ragione, vengono appunto dette *forme canoniche* di ellissi, iperboli e parabole.

## Ellisse in forma canonica

L'equazione di tipo (2.4.1) che la definisce viene tradizionalmente scritta nel modo seguente:

$$\gamma : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \qquad a, b > 0\,. \tag{2.4.3}$$

L'ellisse $\gamma$ è rappresentata, nel caso $a > b$, in Figura 2.28. Il punto $F_1$

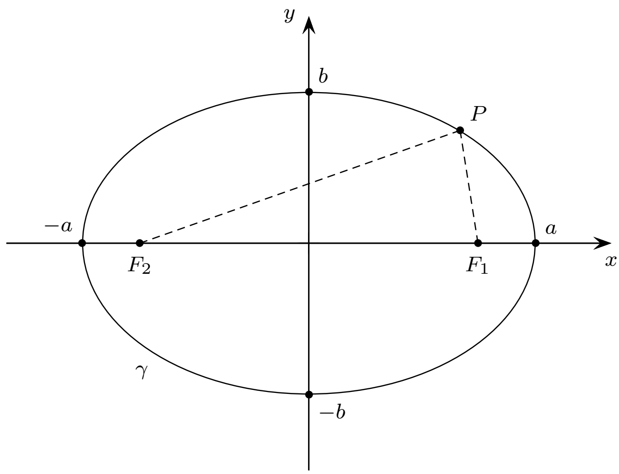



**Figura 2.28** – L'ellisse in forma canonica.

ha coordinate $F_1 = [\sqrt{a^2 - b^2}, 0]$, e $F_2 = -F_1$. I punti $F_1$ e $F_2$ vengono chiamati *fuochi* dell'ellisse $\gamma$. Il loro interesse risiede nel fatto che è possibile verificare che l'ellisse $\gamma$, definita dalla (2.4.3), coincide con il seguente luogo di punti:

$$\gamma = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \ : \ \mathrm{dist}(P, F_1) + \mathrm{dist}(P, F_2) = 2a \right\}\,. \tag{2.4.4}$$

La verifica che la (2.4.3) e la (2.4.4) rappresentano la stessa figura geometrica consiste nel controllare che, indicando con $P = [x, y]$ il generico punto di $\mathbb{R}^2$, allora la condizione

$$\mathrm{dist}(P, F_1) + \mathrm{dist}(P, F_2) = 2a \tag{2.4.5}$$

equivale all'equazione (2.4.3). Per non spezzare il flusso dell'esposizione rimandiamo all'Esercizio 2.29 la dimostrazione dell'equivalenza tra (2.4.3) e (2.4.5).

## Iperbole in forma canonica

Questa conica è definita dalla seguente equazione:

$$\gamma : \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \qquad a,\, b > 0\ . \tag{2.4.6}$$

L'iperbole $\gamma$ è rappresentata nella Figura 2.29. I due fuochi dell'iperbo-

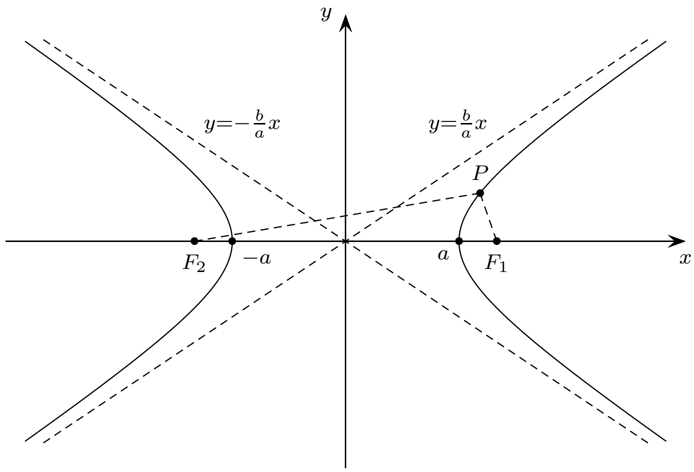



**Figura 2.29** – L'iperbole in forma canonica.

le hanno coordinate $F_1 = [\sqrt{a^2+b^2}, 0]$, $F_2 = -F_1$. Si può notare che l'iperbole $\gamma$ è formata da due componenti disgiunte (dette *rami*), una nel semipiano $x \geq a$, l'altra, speculare rispetto all'asse $y$, nella regione $x \leq -a$.

Si può anche intuire, attraverso l'osservazione della Figura 2.29, che i rami di $\gamma$ *si avvicinano* alle due rette $y = \pm\,(b/a)\,x$ quando $x$ diventa infinitamente grande: precisare in modo matematicamente soddisfacente questo concetto di avvicinamento richiederebbe l'uso della nozione di *limite*, cosa che va al di là dei nostri obiettivi.
In modo analogo a quanto visto per l'ellisse, possiamo dare una caratterizzazione geometrica dell'iperbole $\gamma$ in termini di distanze dai suoi fuochi:

$$\gamma = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \ : \ |\mathrm{dist}(P, F_1) - \mathrm{dist}(P, F_2)| = 2a \right\} \ . \qquad (2.4.7)$$

L'equivalenza tra (2.4.6) e (2.4.7) è una verifica molto simile a quella dell'Esercizio 2.29 e perciò è lasciata al lettore.

## Parabola in forma canonica

Nel §2.2 abbiamo imparato a tracciare il grafico di una parabola. Ora invece presentiamo una caratterizzazione geometrica della parabola in analogia con (2.4.4) e (2.4.7).
L'equazione della parabola in forma canonica può essere scritta come segue:

$$\gamma : \quad 2p\,y = x^2\,, \qquad p > 0\ . \qquad (2.4.8)$$

Facciamo riferimento alla Figura 2.30. Abbiamo un fuoco $F = [0, (p/2)]$

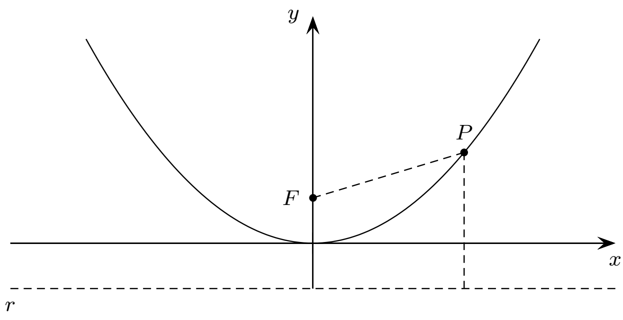



**Figura 2.30** – La parabola in forma canonica.

e una retta $r$ di equazione $y = -(p/2)$, che chiameremo *direttrice* della parabola. Ora affermiamo che per la parabola $\gamma$ si ha:

$$\gamma = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{dist}(P, F) = \mathrm{dist}(P, r) \right\} \ . \qquad (2.4.9)$$

Vediamo in dettaglio come si mostra l'equivalenza tra le due caratterizzazioni (2.4.8), (2.4.9), in quanto questo semplice esercizio può guidare nella comprensione dell'Esercizio 2.29. Per il generico $P \in \mathbb{R}^2$, scriviamo $P = [x, y]$. Dalle (2.1.1) e (2.1.36) si trova

$$\mathrm{dist}(P, r) = \left|y + \frac{p}{2}\right| \ , \qquad \mathrm{dist}(P, F) = \sqrt{x^2 + (y - \frac{p}{2})^2} \ .$$

Quindi l'equazione in (2.4.9) ($\mathrm{dist}(P, F) = \mathrm{dist}(P, r)$) diventa

$$\left|y + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{x^2 + (y - \frac{p}{2})^2} \ . \tag{2.4.10}$$

Elevando entrambi i membri al quadrato si ha

$$y^2 + yp + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + y^2 - yp + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \ ,$$

da cui è facile ricavare la (2.4.8).
Oltre alle capacità di ragionamento logico, il lettore dovrebbe, in parallelo, sviluppare l'abilità di eseguire e portare a termine calcoli anche lunghi. A tal fine, si suggerisce di svolgere sempre i passaggi con ordine, senza perdere di vista né il calcolo che si compie al momento, né l'obiettivo finale che si vuole ottenere. In questo ordine di idee, si consiglia di provare a svolgere l'esercizio seguente (solo **dopo** aver tentato di risolvere il problema, confrontare quanto fatto con la soluzione proposta).

$\triangleright$ **Esercizio 2.29.** Verificare l'equivalenza di (2.4.3) e (2.4.5).

**Soluzione.** Posto $P = [x, y]$ e usando l'espressione esplicita di $F_1$ e $F_2$ abbiamo:

$$\mathrm{dist}(P, F_1) = \sqrt{(x - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2} \tag{2.4.11}$$

$$\mathrm{dist}(P, F_2) = \sqrt{(x + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2} \ . \tag{2.4.12}$$

Usando le (2.4.11)–(2.4.12), la (2.4.5) diventa

$$\sqrt{(x - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2} + \sqrt{(x + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2} = 2a \ . \tag{2.4.13}$$

Ora, elevando al quadrato e isolando a destra il radicale rimasto, si ha:

$$(x - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2 + (x + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2 - 4a^2 \tag{2.4.14}$$

$$= 2\sqrt{(x - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2}\ \sqrt{(x + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2}\ .$$

Conviene adesso svolgere i calcoli in (2.4.14) per ottenere che essa equivale a

$$2x^2 + 2y^2 - 2a^2 - 2b^2 = 2\sqrt{(x - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2}\ \sqrt{(x + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2}\ .$$

Ora, dividendo entrambi i membri per 2 ed elevando poi al quadrato si ha:

$$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 = [(x - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2]\,[(x + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2]\ . \quad (2.4.15)$$

Sviluppando ulteriormente i calcoli si ottiene

$$x^4 + y^4 + a^4 + b^4 + 2x^2y^2 - 2a^2x^2 - 2b^2x^2 - 2a^2y^2 - 2b^2y^2 + 2a^2b^2 \quad (2.4.16)$$

$$= [x^2 + a^2 - b^2 + y^2 - 2x\sqrt{a^2 - b^2}]\,[x^2 + a^2 - b^2 + y^2 + 2x\sqrt{a^2 - b^2}]\ .$$

Adesso si può notare che il membro a destra della (2.4.16) ha la forma

$$(A - B)(A + B)\ ,$$

con

$$A = x^2 + a^2 - b^2 + y^2 \quad \text{e} \quad B = 2x\sqrt{a^2 - b^2}\ .$$

Quindi, sostituendolo con $A^2 - B^2$ e effettuando le risultanti semplificazioni, la (2.4.16) diventa

$$4x^2b^2 + 4y^2a^2 = 4a^2b^2\ . \quad (2.4.17)$$

Dividendo per $4a^2b^2$ si ottiene infine la (2.4.3).

◁

## 2.5 Esercizi proposti

▷ **Esercizio 2.30.** Scrivere l'equazione della retta $r$ che passa per il punto $P = [1, -2]$ ed è perpendicolare alla retta passante per l'origine e $Q = [1, 2]$.

▷ **Esercizio 2.31.** Sia $C = [2, -1]$. Scrivere l'equazione della circonferenza $\gamma$ che ha centro in $C$ ed è tangente alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

$\triangleright$ **Esercizio 2.32.** Siano $\gamma$ la circonferenza di equazione $x^2+(y-2)^2=1$ e $P=[0,-1]$. Determinare l'equazione delle due rette $r_1$ e $r_2$ che passano per $P$ e sono tangenti alla circonferenza $\gamma$.

$\triangleright$ **Esercizio 2.33.** Si considerino le due rette parallele $r_1$ e $r_2$ di equazione rispettivamente $y=x+1$ e $y=x-1$. Determinare l'equazione della generica circonferenza tangente ad entrambe le rette.

$\triangleright$ **Esercizio 2.34.** Determinare per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la retta $r$ di equazione $y=x+b$ risulta tangente alla circonferenza $\gamma$ di equazione $x^2+y^2=1$.

$\triangleright$ **Esercizio 2.35.** Determinare per quali valori di $m \in \mathbb{R}$ la retta $r$ di equazione $y=mx+2$ risulta tangente alla circonferenza $\gamma$ di equazione $x^2+y^2=1$.

$\triangleright$ **Esercizio 2.36.** Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ risulta verificata le seguente disequazione:

$$|x+5| \leq 2x-2\ .$$

$\triangleright$ **Esercizio 2.37.** Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ risulta verificata le seguente disequazione:

$$|x|+x+5 \leq |2x-1|\ .$$

$\triangleright$ **Esercizio 2.38.** Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ risulta verificata le seguente disequazione:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1} \geq 2\ .$$

## 2.6 Commenti

Come già accennato nell'introduzione, Cartesio introdusse le basi della geometria analitica nel 1637, in un saggio intitolato *Geometria* che fu incluso nel suo celeberrimo *Discorso sul metodo.* Questo lavoro fu fondamentale per varie ragioni. Innanzitutto, fornì uno strumento essenziale che consentì poi a Newton e Leibnitz di procedere allo sviluppo delle

basi del cosiddetto *calcolo differenziale* che, senza dubbio, costituisce le fondamenta di tutto il sapere scientifico moderno.
Poi, in un'ottica leggermente diversa, va sottolineato che l'uso delle coordinate cartesiane fu all'origine della nascita delle cosiddette geometrie *non* euclidee (geometria proiettiva, ellittica e descrittiva, ad esempio).

Per concludere questo capitolo riteniamo importante anticipare che, per uno studio più avanzato e profondo della geometria analitica, è indispensabile avvalersi degli strumenti offerti dalla teoria dei *vettori* e, più generalmente, dall'algebra lineare.

# 3

# Polinomi ed elementi di calcolo algebrico

## 3.0 Scopi del capitolo

In questo capitolo esporremo alcuni concetti fondamentali relativi ai polinomi a coefficienti reali. Si tratta di una famiglia di funzioni particolarmente importanti, per lo studio delle quali è necessario combinare tra loro concetti di natura algebrica con altri derivanti dalla geometria analitica e dallo studio qualitativo dei grafici di funzione. Dato che, tradizionalmente, un approccio diretto all'algebra astratta crea difficoltà per lo studente, abbiamo deciso di iniziare il capitolo richiamando alcune proprietà fondamentali relative all'aritmetica dei numeri naturali. Infatti, queste proprietà da una parte costituiscono un riferimento concettuale esplicito che può guidare il lettore alla comprensione degli argomenti relativi alla divisione e alla fattorizzazione dei polinomi, dall'altra ci consentono di presentare una simbologia di uso corrente nell'ambito del calcolo algebrico.

## 3.1 Concetti preliminari

Abbiamo già incontrato l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ nel corso del Capitolo 1:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\} \ . \tag{3.1.1}$$

L'abitudine consolidata in ognuno di noi consente agli autori di ritenere che nessun lettore abbia difficoltà nel riferirsi ad un proprio schema mentale operativo che gli permetta di ragionare usando i numeri naturali: lo studio delle proprietà di $\mathbb{N}$ a livello elementare si chiama *aritmetica*, mentre a livello superiore è noto col nome di *teoria dei numeri*.
Con queste premesse, possiamo iniziare a presentare le prime proprietà di interesse per i nostri obiettivi.

**Definizione 3.1.** Siano $m$, $n \in \mathbb{N}$. Diciamo che $m$ è un *divisore* di $n$ se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $n = m \cdot k$. In questo caso si può anche dire che $n$ è un multiplo di $m$, o che $n$ è divisibile per $m$.

*Osservazione* 3.1.

(i) Nessun numero naturale positivo è divisibile per 0.

(i) Ogni numero naturale positivo ha almeno due divisori banali: 1 e se stesso.

**Definizione 3.2.** Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Diremo che $n$ è *primo* se non ha altri divisori oltre i due divisori banali (cioè 1 e se stesso).

$\diamondsuit$ **Esempio 3.1.** Ad esempio, i numeri, 2, 3, 5, 7, 11, 53 sono numeri primi. Esistono infiniti numeri primi, fatto che era già noto ad Euclide[1].

I due teoremi seguenti raccolgono le proprietà fondamentali di cui dovremo esaminare la generalizzazione nel contesto dei polinomi.

[1] La dimostrazione di Euclide è la seguente. Supponiamo che i numeri primi siano finiti e denotiamoli con $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$. Se adesso consideriamo il numero $\bar{p} = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k + 1$ è facile verificare che nessuno dei $p_1, p_2, \dots, p_k$ divide $\bar{p}$. Ma allora $\bar{p}$ è un numero primo diverso da $p_1, p_2, \dots, p_k$ contraddicendo l'ipotesi che $p_1, p_2, \dots, p_k$ fossero gli unici numeri primi.

**Teorema 3.1** (Teorema fondamentale dell'aritmetica)**.** *Ogni numero naturale $n \geq 2$ può essere fattorizzato come prodotto di numeri primi, cioè scritto nella forma:*

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r} \tag{3.1.2}$$

*dove $p_1, \ldots, p_r$ sono $r$ numeri primi diversi fra loro, mentre gli esponenti $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sono numeri maggiori o uguali a 1. Inoltre, questa decomposizione è unica a meno dell'ordine dei fattori.*

**Teorema 3.2** (Teorema della divisione e del resto)**.** *Si considerino $n$, $m \in \mathbb{N}$, con $n \geq m \geq 1$. Allora sono univocamente determinati due numeri naturali $q$ e $r$, che sono detti rispettivamente* quoziente *e* resto *della divisione $n : m$, con le seguenti proprietà:*

$$n = q \cdot m + r\,, \qquad 0 \leq r < m\ . \tag{3.1.3}$$

Abbiamo già incontrato, nel Capitolo 1 (si veda la (1.4.6)) il simbolo di sommatoria $\Sigma$. Ora acquistiamo maggiore familiarità con i calcoli coinvolgenti le sommatorie.

$\triangleright$ **Esercizio 3.1.** Calcolare

$$\sum_{i=3}^{8} i^2\ .$$

**Soluzione.**

$$\sum_{i=3}^{8} i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = \cdots = 199\ .$$

$\triangleleft$

Sappiamo che somma e moltiplicazione di numeri reali godono delle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} (a+b)+c = a+(b+c) & \text{(associativa)} \\ c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b & \text{(distributiva)}\ , \end{cases} \tag{3.1.4}$$

valide $\forall\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$. Come conseguenza immediata si hanno le seguenti utili formule relative alle sommatorie ($c$, $a_k$, $b_k$ sono numeri reali arbitrari, mentre $k$, $m$, $n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && \sum_{k=1}^{n}(c \cdot a_k) = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \\
&\text{(ii)} && \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) \\
&\text{(iii)} && \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k = \sum_{k=1}^{n+m} a_k \\
&\text{(iv)} && \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1+m}^{n+m} a_{k-m} \\
&\text{(v)} && \sum_{k=1}^{n} c = c \cdot n \\
&\text{(vi)} && \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} \ .
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Concettualmente le formule precedenti sono banali, ma sono state inserite in quanto la loro lettura dovrebbe consentire al lettore di acquisire una maggiore confidenza con l'importante formalismo matematico che coinvolge gli indici. In questo ordine di idee, nel prossimo esercizio presentiamo un metodo alternativo per ottenere un risultato che avevamo dimostrato, nel Capitolo 1, utilizzando il principio di induzione.

▷ **Esercizio 3.2** (Somma dei primi $n$ numeri)**.** Dimostrare che, $\forall\, n \geq 1$, si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2} \ . \tag{3.1.6}$$

**Soluzione.** Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n} k &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k \\
\text{(usiamo (3.1.5)(vi))} &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n-k+1) \\
\text{(usiamo (3.1.5)(ii))} &= \sum_{k=1}^{n}(k+n-k+1) = \sum_{k=1}^{n}(n+1) \\
\text{(usiamo (3.1.5)(v))} &= n(n+1)\ .
\end{aligned}$$

Questa catena di uguaglianze dimostra che:

$$2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)\ .$$

Dividendo per 2 si ha immediatamente la tesi.

◁

*Osservazione* 3.2. Il lettore attento dovrebbe aver riconosciuto che l'idea matematica alla base dello svolgimento del precedente esercizio coincide con quella del bambino Gauss, illustrata nel Capitolo 1.

▷ **Esercizio 3.3** (Progressione geometrica)**.** Siano $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Allora vale la formula:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\ . \tag{3.1.7}$$

**Soluzione.** Poiché $1-q \neq 0$, la (3.1.7) è equivalente a:

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1-q^{n+1}\ . \tag{3.1.8}$$

Ora, grazie a (3.1.5)(i) e (ii), abbiamo:

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - q\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1}\ . \tag{3.1.9}$$

Usando la (3.1.5)(iv) possiamo riscrivere la (3.1.9) come:

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k \ . \tag{3.1.10}$$

Infine, usando la (3.1.5)(iii):

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} q^k - \left(\sum_{k=1}^{n} q^k + q^{n+1}\right) = 1 - q^{n+1} \ , \tag{3.1.11}$$

come richiesto.

$\triangleleft$

**Definizione 3.3.** Sia $n \in \mathbb{N}$. Si definisce il numero $n!$ (si legge $n$ *fattoriale*) come segue:

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot 3 \cdot 2 & \text{se } n \geq 2 \\ 1 & \text{se } n = 1 \text{ o } n = 0 \ . \end{cases} \tag{3.1.12}$$

$\diamondsuit$ **Esempio 3.2.**

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 \ ; \qquad 6! = 6 \cdot 5! = 720 \ .$$

Più generalmente, non sussiste difficoltà nel capire le due seguenti uguaglianze (dove $k < n$):

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \ ; \qquad \frac{n!}{k!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (k+1) \ . \tag{3.1.13}$$

**Definizione 3.4.** Siano $n$, $k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$. Si definisce il numero $\binom{n}{k}$ (si legge $n$ *su* $k$, ed è chiamato *coefficiente binomiale*) come segue:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ \ldots \ \cdot (n-k+1)}{k!} & \text{se } k \geq 1 \\ 1 & \text{se } k = 0 \ . \end{cases} \tag{3.1.14}$$

Si osservi che il numeratore, nella frazione che definisce il coefficiente binomiale, è il prodotto di $k$ numeri naturali: in particolare,

$$\binom{n}{1} = n \ .$$

♢ **Esempio 3.3.**

$$\binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 35 \ .$$

*Osservazione* 3.3. Una formula alternativa per definire il coefficiente binomiale è:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \ . \tag{3.1.15}$$

Il lettore non dovrebbe avere problemi a riconoscere che (3.1.14) e (3.1.15) sono equivalenti. Inoltre, possiamo anche notare che dalla (3.1.15) segue facilmente la seguente simmetria del coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \ . \tag{3.1.16}$$

▷ **Esercizio 3.4.** Dimostrare la seguente uguaglianza:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \ . \tag{3.1.17}$$

**Soluzione.** Applicando la definizione (3.1.15) troviamo:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \ .$$

Riportando queste ultime due frazioni a comune denominatore otteniamo:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{(k+1)\,n!}{(k+1)\,k!\,(n-k)!} + \frac{n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k)\,(n-k-1)!} \ ,$$

ovvero, proseguendo il calcolo:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n! \cdot [\cancel{k} + 1 + n - \cancel{k}]}{(k+1)!\,(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\ ((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1} \ . \end{aligned}$$ ◁

Il coefficiente binomiale trova ampio impiego all'interno del *calcolo combinatorio* e della *teoria del calcolo delle probabilità*. Per il momento, per noi il coefficiente binomiale gioca un ruolo essenziale nel seguente importante risultato (cui deve il nome).

**Teorema 3.3** (Formula del binomio di Newton). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Allora vale la seguente formula di sviluppo della potenza n-esima di un binomio:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k} \,. \tag{3.1.18}$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo la (3.1.18) per induzione sulla potenza $n$. La (3.1.18) è vera per $n = 1$: infatti, ricordando che $x^0 = 1\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k\, b^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = 1\cdot 1\cdot b + 1\cdot a\cdot 1 = a+b = (a+b)^1 \,.$$

Ora supponiamo la (3.1.18) vera per $n$ e dimostriamola per $n+1$. Per ipotesi induttiva si ha:

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)\,(a+b)^n \\ &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1} \,.\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Adesso

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k}\, b^k = \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} a^{n-k}\, b^{k+1} \,, \tag{3.1.20}$$

mentre

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^{k+1} + \binom{n}{n} b^{n+1} \,. \tag{3.1.21}$$

Ora sostituiamo la (3.1.20) e la (3.1.21) nella (3.1.19). Tenendo conto della (3.1.17) e delle (3.1.5) troviamo:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left( \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right) a^{n-k}\, b^{k+1} + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} a^{n-k}\, b^{k+1} + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\, b^{k} + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\, b^{k} \ ,
\end{aligned}$$

cosa che completa la dimostrazione induttiva. Si noti anche che, per la terza di quest'ultima serie di uguaglianze, abbiamo usato

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} \ (=1) \quad \text{e} \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} \ (=1) \ .$$

□

▷ **Esercizio 3.5** (Disuguaglianza di Bernoulli)**.** Sia $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale la seguente disuguaglianza:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \ . \tag{3.1.22}$$

**Soluzione.** Usando la formula del binomio di Newton possiamo scrivere:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \binom{n}{2} x^2 + \ldots \geq 1 + nx \ ,$$

in quanto, valendo l'ipotesi $x \geq 0$, tutti i termini trascurati sono non negativi.

◁

In realtà, come dimostreremo mediante induzione su $n$ in uno degli esercizi di riepilogo che seguono, la disuguaglianza (3.1.22) è valida anche sotto l'ipotesi meno restrittiva: $x \geq -1$.

Per completezza, concludiamo questo paragrafo introduttivo presentando alcune formule note con il nome di *prodotti notevoli*. Nello spirito della formula del binomio di Newton, queste uguaglianze consentono, in molti casi, di semplificare determinate espressioni algebriche.

$$\begin{array}{llcl} \text{(i)} & a^2-b^2 & = & (a+b)\,(a-b) \\ \text{(ii)} & a^3-b^3 & = & (a-b)\,(a^2+ab+b^2) \\ \text{(iii)} & a^3+b^3 & = & (a+b)\,(a^2-ab+b^2) \\ \text{(iv)} & a^n-b^n & = & (a-b)\,(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})\ . \end{array} \tag{3.1.23}$$

Inoltre, per $n$ dispari:

$$a^n+b^n=(a+b)\,(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2\ \cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})\ . \tag{3.1.24}$$

Il lettore è invitato ad eseguire esplicitamente i calcoli necessari a verificare i prodotti notevoli (3.1.23)–(3.1.24).

## 3.2 Polinomi

Un *polinomio* di grado $n$, a coefficienti in $\mathbb{R}$, è una funzione $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da una legge del tipo:

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \qquad (a_n\neq 0)\ , \tag{3.2.1}$$

dove i coefficienti $a_0,\ldots,a_n$ sono dei numeri reali assegnati. Una notazione equivalente, più sintetica, è:

$$P(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j\,x^j\ , \qquad a_j\in\mathbb{R}\,,\ a_n\neq 0\ . \tag{3.2.2}$$

In particolare, i polinomi costanti $P(x)\equiv a_0$ hanno grado zero. Se poi $a_0=0$, allora $P(x)$ si chiama *polinomio nullo* ($P(x)\equiv 0$) (in questi casi, la simbologia "$\equiv$" sostituisce "$=$" per sottolineare che l'uguaglianza vale $\forall\ x$). I polinomi con un solo coefficiente non nullo vengono detti *monomi*, mentre se i coefficienti non nulli sono due o tre si parla rispettivamente di *binomi* o *trinomi*.

**Definizione 3.5.** Diremo che $x_0\in\mathbb{R}$ è una radice di $P(x)$ se è una soluzione dell'equazione $P(x)=0$, o, in altre parole, se

$$P(x_0)=0\ . \tag{3.2.3}$$

Se $x_0$ è una radice di $P(x)$, allora esiste un'unica fattorizzazione di $P(x)$ del tipo:

$$P(x) = (x - x_0)^k\, Q(x) \ , \tag{3.2.4}$$

dove $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, mentre $Q(x)$ ha grado $(n-k)$ e $Q(x_0) \neq 0$. Il numero naturale $k$ si chiama *molteplicità algebrica* di $x_0$ e si indica con la simbologia:

$$\mu_a(x_0) = k \ . \tag{3.2.5}$$

Per capire meglio questi concetti e svolgere esercizi in merito è necessario richiamare alcuni risultati fondamentali relativi alla divisione di polinomi. Anche se questo è un argomento ampiamente trattato nei testi di matematica delle scuole superiori, riteniamo utile richiamare i principali aspetti operativi della questione. Iniziamo con l'enunciato del teorema che rappresenta, in questo contesto, l'analogo del Teorema 3.2 relativo alla divisione con resto nell'ambito dell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

**Teorema 3.4** (Teorema della divisione e del resto per polinomi)**.** *Siano $P(x)$, $P'(x)$ due polinomi a coefficienti reali, di grado rispettivamente $n$, $n' \in \mathbb{N}$, con $n \geq n'$. Allora sono univocamente determinati due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$, detti rispettivamente* quoziente *e* resto *della divisione $P(x) : P'(x)$, con le due seguenti proprietà:*

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad P(x) = P'(x) \cdot Q(x) + R(x) \\ \text{(ii)} \quad R(x) \equiv 0 \quad \text{oppure} \quad r < n' \ , \end{cases} \tag{3.2.6}$$

*dove $r$ indica il grado di $R(x)$.*

Nel prossimo importante esercizio studiamo il concetto di molteplicità algebrica di una radice e impariamo, attraverso un semplice esempio, come effettuare la divisione di polinomi di cui al Teorema 3.4.

$\triangleright$ **Esercizio 3.6.** Sia $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1$. Verificare che $x_0 = 1$ è una radice di $P(x)$ e determinare $\mu_a(1)$.

**Soluzione.** Si ha

$$P(1) = 1^4 - 3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 1 - 1 = 0 \ ,$$

per cui effettivamente $x_0 = 1$ è una radice di $P(x)$. Per ottenere la fattorizzazione (3.2.4) dobbiamo dividere $P(x)$ per il polinomio di primo grado $(x - 1)$.

La seguente sequenza illustra appunto il cosiddetto *algoritmo euclideo* per la divisione dei polinomi:

$$
\begin{array}{ccccc|l}
+x^4 & -3x^3 & +2x^2 & +x & -1 & x-1 \\ \cline{6-6}
+x^4 & -x^3 & & & & x^3-2x^2+1\ (=Q(x)\,) \\ \cline{1-5}
/\!/ & -2x^3 & +2x^2 & +x & -1 & \\
 & -2x^3 & +2x^2 & & & \\ \cline{2-5}
 & /\!/ & /\!/ & +x & -1 & \\
 & & & +x & -1 & \\ \cline{4-5}
 & & (\text{Resto } R(x)=\,) & /\!/ & /\!/ &
\end{array}
\tag{3.2.7}
$$

Il procedimento per costruire l'algoritmo di divisione (3.2.7) segue la logica della divisione tra numeri naturali ed è il seguente: si costruisce $Q(x)$ decrescendo dal monomio di grado maggiore (3 nella nostra situazione), individuato come quel monomio ($x^3$ in questo caso) che, moltiplicato per il divisore $(x-1)$, genera un polinomio il cui monomio di grado maggiore ($x^4$ in questo esempio) coincide con quello del dividendo $P(x)$. Si scrive poi il risultato di questa moltiplicazione sotto $P(x)$ e si effettua la sottrazione, trovando in questo caso:

$$-2x^3+2x^2+x-1\ .$$

Si continua allo stesso modo, determinando il secondo monomio di $Q(x)$ ($-2x^2$ nel nostro esempio): il procedimento termina quando si ottiene resto nullo (come in questo caso) o di grado strettamente inferiore a quello del divisore.

In conclusione, mediante l'algoritmo di divisione (3.2.7) abbiamo ottenuto:

$$P(x)=(x-1)\,Q(x)+R(x)\ ,$$

con $Q(x)=x^3-2x^2+1$ e $R(x)\equiv 0$. Per comodità riscriviamo esplicitamente questo risultato:

$$P(x)=(x-1)\,(x^3-2x^2+1)\ . \tag{3.2.8}$$

Poiché $Q(1) = 0$, la fattorizzazione non è ancora terminata e bisogna dividere $Q(x)$ per $x - 1$. Abbiamo:

$$\begin{array}{cccc|l}
+x^3 & -2x^2 & & +1 & x-1 \\ \cline{5-5}
+x^3 & -x^2 & & & x^2-x-1. \\ \cline{1-4}
/\!/ & -x^2 & & +1 & \\
& -x^2 & +x & & \\ \cline{2-4}
& /\!/ & -x & +1 & \\
& & -x & +1 & \\ \cline{3-4}
& & /\!/ & /\!/ &
\end{array} \tag{3.2.9}$$

Da cui $Q(x) = (x - 1)\,(x^2 - x - 1)$, che sostituita in (3.2.8) fornisce:

$$P(x) = (x-1)^2\,(x^2 - x - 1)\ , \tag{3.2.10}$$

che è la fattorizzazione di tipo (3.2.4) richiesta, in quanto $x_0 = 1$ *non* è radice di $(x^2 - x - 1)$. Allora la molteplicità algebrica vale $\mu_a(1) = 2$.

$\lhd$

**Definizione 3.6.** Sia

$$P(x) = ax^2 + bx + c\,, \qquad a \neq 0\ ,$$

un polinomio di secondo grado. Diciamo che $P(x)$ è *irriducibile* se non ha radici reali.

$\diamondsuit$ **Esempio 3.4.** Il polinomio

$$P(x) = x^2 + 1$$

è irriducibile.

Possiamo adesso enunciare il seguente importante risultato che generalizza al contesto dei polinomi il Teorema 3.1 di fattorizzazione dei numeri naturali in prodotto di numeri primi.

**Teorema 3.5** (Fattorizzazione di polinomi)**.** *Ogni polinomio a coefficienti reali, di grado $n \geq 1$, può essere fattorizzato come prodotto di potenze di polinomi di primo grado e polinomi di secondo grado irriducibili. Inoltre, questa decomposizione è unica a meno dell'ordine dei fattori.*

Va sottolineato che una giustificazione rigorosa degli enunciati e delle proprietà illustrate in questa sezione sui polinomi costituisce materia avanzata, normalmente oggetto di corsi universitari specifici. In particolare, uno studio algebrico completo dei polinomi può avvenire solo in congiunzione con l'introduzione del corpo dei cosiddetti *numeri complessi.*
Detto questo, appare naturale la necessità di discutere quando, ed eventualmente come, sia possibile determinare esplicitamente le radici di un dato polinomio. Sfortunatamente, è noto che non esistono formule risolutive per determinare, in generale, le radici di polinomi di grado superiore a quattro. Anche le formule risolutive relative a polinomi di grado tre e quattro, pur se disponibili, risultano troppo complesse per questo livello di trattazione. Invece, riprendendo il discorso, iniziato nel Capitolo 3, relativo alla rappresentazione grafica di parabole, è possibile ed utile illustrare in dettaglio la situazione per i polinomi di secondo grado: in particolare, possiamo derivare la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado.
Procediamo con ordine. Per prima cosa, ricordando l'ipotesi $a \neq 0$, scriviamo:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}\,x\right)+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right) \qquad (3.2.11) \\ &= a(x-x_0)^2-\frac{\Delta}{4a}\ , \end{aligned}$$

dove abbiamo posto:

$$x_0=-\frac{b}{2a} \qquad \text{e} \qquad \Delta=b^2-4ac\ . \tag{3.2.12}$$

Facciamo il punto della situazione: grazie alla (3.2.11) possiamo dire che l'equazione

$$ax^2+bx+c=0 \tag{3.2.13}$$

equivale a:

$$a(x-x_0)^2=\frac{\Delta}{4a}\ . \tag{3.2.14}$$

Quindi, se $\Delta<0$, ora possiamo subito concludere che non ci sono radici reali, o, in altre parole, il polinomio è irriducibile.

Invece, se $\Delta \geq 0$, una semplice ispezione di (3.2.14) fornisce:

$$x - x_0 = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\ ,$$

ovvero

$$x = x_0 \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\ . \tag{3.2.15}$$

Infine, usando l'espressione esplicita di $x_0$ data in (3.2.12), concludiamo che le due radici sono proprio quelle già anticipate nella (2.2.8) del Capitolo 2, cioè:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\ , \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{3.2.16}$$

(si noti che $x_1 = x_2$ quando $\Delta = 0$). Infine, un calcolo diretto consente di verificare che, quando $\Delta \geq 0$, vale la fattorizzazione già presentata nel Capitolo 2, ovvero:

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\ , \tag{3.2.17}$$

dove $x_1$ e $x_2$ sono le radici, come in (3.2.16). Il lettore preoccupato dall'astrattezza e difficoltà di questi concetti algebrici troverà diversi esercizi utili nel §3.3.

## 3.3 Esercizi di riepilogo

**Definizione 3.7.** Una *funzione razionale (fratta)* è una funzione definita da una legge del tipo:

$$T(x) = \frac{P(x)}{P'(x)}\ , \tag{3.3.1}$$

dove $P(x)$ e $P'(x)$ sono due polinomi (ovviamente, la funzione razionale $T(x)$ risulta definita solo per i valori di $x \in \mathbb{R}$ per cui il denominatore è $\neq 0$).

Nella teoria del calcolo degli integrali è utile saper scrivere una generica funzione razionale come somma di un polinomio e di una funzione razionale in cui il grado del numeratore è strettamente inferiore a quello del denominatore. Per ottenere questo scopo è sufficiente applicare l'algoritmo di divisione tra polinomi, come illustriamo nei due esercizi seguenti.

$\triangleright$ **Esercizio 3.7.** Sia $T(x)$ la funzione razionale definita da:

$$T(x) = \frac{P(x)}{P'(x)} \ , \tag{3.3.2}$$

dove $P(x) = x^4 - 3x^3 - 2x + 1$ e $P'(x) = x^2 + x - 2$. Scrivere $T(x)$ come somma di un polinomio e di una funzione razionale in cui il grado del numeratore è strettamente inferiore a quello del denominatore.

**Soluzione.** Per prima cosa dobbiamo effettuare la divisione tra il polinomio $P(x)$ (dividendo) e il polinomio $P'(x)$ (divisore):

$$\begin{array}{ccccc|l}
+x^4 & -3x^3 & & -2x & +1 & x^2+x-2 \\ \cline{6-6}
+x^4 & +x^3 & -2x^2 & & & x^2-4x+6 \\ \hline
/\!/ & -4x^3 & +2x^2 & -2x & +1 & \\
 & -4x^3 & -4x^2 & +8x & & \\ \cline{2-5}
 & /\!/ & 6x^2 & -10x & +1 & \\
 & & 6x^2 & +6x & -12 & \\ \cline{3-5}
 & (\text{Resto } R(x) = ) & /\!/ & -16x & +13 &
\end{array} \tag{3.3.3}$$

Dal calcolo precedente, coerentemente con il Teorema 3.4, deduciamo che

$$P(x) = (x^2 + x - 2) \cdot (x^2 - 4x + 6) + (-16x + 13) \ . \tag{3.3.4}$$

Ora applichiamo (3.3.4) a (3.3.2). Usando le esplicite espressioni dei vari polinomi troviamo:

$$\begin{aligned}
T(x) &= \frac{(x^2 + x - 2) \cdot (x^2 - 4x + 6) + (-16x + 13)}{(x^2 + x - 2)} \\
&= \frac{(x^2 + x - 2) \cdot (x^2 - 4x + 6)}{(x^2 + x - 2)} + \frac{(-16x + 13)}{(x^2 + x - 2)} \\
&= (x^2 - 4x + 6) + \frac{(-16x + 13)}{(x^2 + x - 2)} \ ,
\end{aligned}$$

che rappresenta la decomposizione richiesta.

$\triangleleft$

$\triangleright$ **Esercizio 3.8.** Ripetere l'esercizio precedente, ma usando:

$$P(x) = x^5 - x^4 + x^2 - 4 \ ; \qquad P'(x) = x^3 - x \ .$$

**Soluzione.** Dividendo $P(x)$ per $P'(x)$, si trova

$$
\begin{array}{cccccc|l}
+x^5 & -x^4 & & +x^2 & & -4 & x^3 - x \\
\cline{7-7}
+x^5 & & -x^3 & & & & x^2 - x + 1 \\
\cline{1-6}
/\!/ & -x^4 & +x^3 & +x^2 & & -4 & \\
 & -x^4 & & +x^2 & & & \\
\cline{2-6}
 & /\!/ & +x^3 & & & -4 & \\
 & & +x^3 & & -x & & \\
\cline{3-6}
\multicolumn{2}{r}{(\text{Resto } R(x) = )} & /\!/ & & +x & -4 &
\end{array}
$$

Ora la conclusione cui si perviene è:

$$
T(x) = (x^2 - x + 1) + \frac{(x-4)}{(x^3 - x)} \ .
$$

$\triangleleft$

Il Teorema 3.5 afferma che ogni polinomio ammette una certa fattorizzazione: è però importante chiarire che non disponiamo di un metodo generale che consenta di costruirla. La difficoltà non risiede solo nel fatto che non sempre sappiamo calcolare le eventuali radici, ma anche nell'individuazione dei fattori irriducibili di secondo grado. Nell'esercizio seguente vediamo una situazione in cui la fattorizzazione si ottiene con un'intuizione algebrica che soprattutto suggerisce quanto improbabile sia riuscire a trattare i polinomi di grado alto con simili ragionamenti.

$\triangleright$ **Esercizio 3.9.** Individuare la fattorizzazione del Teorema 3.5 nel caso del polinomio di quarto grado $P(x) = x^4 + 1$.

**Soluzione.** Poiché $x^4 \geq 0\,,\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,$, è chiaro che $P(x)$ non ha radici e quindi la sua fattorizzazione non può contenere fattori di primo grado. In altre parole, ci dobbiamo aspettare che $P(x)$ sia il prodotto di 2 polinomi di secondo grado irriducibili. Scriviamo:

$$
\begin{aligned}
x^4 + 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 \\
&= (x^2 + 1)^2 - 2x^2 \\
&= (x^2 + 1 - \sqrt{2}x) \cdot (x^2 + 1 + \sqrt{2}x) \ ,
\end{aligned}
$$

dove per l'ultima uguaglianza abbiamo usato il prodotto notevole (3.1.23)(i).

$\lhd$

Ovviamente, se si conosce qualche radice del polinomio, allora si ha la possibilità di avanzare nella costruzione della sua fattorizzazione. Vediamo un esempio.

$\rhd$ **Esercizio 3.10.** Individuare la fattorizzazione del Teorema 3.5 nel caso del polinomio di terzo grado $P(x) = x^3 + 2x - 3$.

**Soluzione.** Si può osservare che $x = 1$ è una radice di questo polinomio. Quindi $(x-1)$ deve comparire nella fattorizzazione di $P(x)$. Dividendo $P(x)$ per $(x-1)$, il lettore dovrebbe facilmente arrivare a concludere che:

$$P(x) = (x-1) \cdot (x^2 + x + 3) \; .$$

$\lhd$

*Osservazione* 3.4. Siano $P(x)$ un polinomio e $x_0$ una sua radice. Il fatto che la divisione di $P(x)$ per $(x - x_0)$ dia resto zero è una conseguenza immediata del Teorema 3.4 (verificarlo come esercizio). Generalmente, questa proprietà è nota come *Teorema di Ruffini*.

In virtù di quanto appena detto, è chiaro che potrebbe essere utile disporre di un criterio che consenta di restringere la rosa delle possibili radici razionali di un dato polinomio. In questo ordine di idee, citiamo per completezza un risultato utile (che enunciamo senza dimostrazione, precisando inoltre che non sarà oggetto di verifica d'esame):

**Proprietà 3.1.** Sia

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \qquad (a_n \neq 0)\,, \tag{3.3.5}$$

un polinomio di grado $n$ dove i coefficienti $a_0, \ldots, a_n$ sono dei *numeri interi.* Se $P(x)$ ammette una radice razionale

$$x_0 = \frac{m}{k} \tag{3.3.6}$$

con $m$ e $k$ interi primi fra loro, allora $k$ è un divisore di $a_n$, mentre $m$ è un divisore di $a_0$.

$\triangleright$ **Esercizio 3.11.** Sia

$$P(x) = 3x^3 + 7x^2 + 8x + 2 \ .$$

Determinare le eventuali radici razionali di $P(x)$.

**Soluzione.** Per la Proprietà 3.1, una frazione, ridotta ovviamente ai minimi termini, $x_0 = (m/k)$ può essere una radice di $P(x)$ solo se $m$ divide 2 e $k$ divide 3. Ne segue che abbiamo le seguenti otto possibili scelte per $x_0$:

$$\pm 1 \ ; \quad \pm 2 \ ; \quad \pm\frac{1}{3} \ ; \quad \pm\frac{2}{3} \ .$$

D'altra parte, dato che i coefficienti non nulli del polinomio sono tutti positivi, è chiaro che un'eventuale radice debba essere negativa. Questo restringe a quattro la rosa delle possibili radici razionali. Un calcolo di sostituzione diretta ora consente di concludere che l'unica radice razionale del polinomio è $x_0 = -(1/3)$.

$\triangleleft$

*Osservazione* 3.5. Sia $P(x) = x^n - k$, con $k$ numero naturale. Applicando la Proprietà 3.1 a $P(x)$ deduciamo subito che la radice $n$-esima di $k$ è un numero intero oppure irrazionale.

$\triangleright$ **Esercizio 3.12.** Dimostrare, usando il principio di induzione, che la disuguaglianza di Bernoulli (3.1.22) vale $\forall\, x \geq -1$.

**Soluzione.** Procediamo per induzione su $n$. Per $n = 0$ la disuguaglianza è:

$$(1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x \qquad \text{ovvero} \qquad 1 \geq 1 \ ,$$

dunque evidentemente vera. Vediamo ora il passo induttivo:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)\cdot(1+x)^n \\ &\geq (1+x)\cdot(1+nx) \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x \ , \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

come richiesto. Si noti che per la prima $\geq$ in (3.3.7) abbiamo usato l'ipotesi induttiva e $(1+x) \geq 0$, mentre per l'ultimo passaggio semplicemente il fatto che $n\,x^2 \geq 0$.

$\triangleleft$

## 3.4 Esercizi proposti

$\triangleright$ **Esercizio 3.13.** Decomporre il polinomio $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$ nel prodotto di fattori irriducibili.

$\triangleright$ **Esercizio 3.14.** Utilizzare l'Esercizio 3.13 per risolvere la seguente disequazione:

$$x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 < 0 \ .$$

$\triangleright$ **Esercizio 3.15.** Decomporre il polinomio $P(x) = x^6 - 1$ nel prodotto di fattori irriducibili.

$\triangleright$ **Esercizio 3.16.** Determinare quoziente $Q(x)$ e resto $R(x)$ della seguente divisione:

$$\frac{x^5 - x^4 + 3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 2} \ .$$

# Soluzioni degli esercizi proposti

## Capitolo 1

Esercizio 1.15

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{13}{10} .$$

Esercizio 1.16
Dopo un'ora, la parte rimanente di torta è:

$$1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7} .$$

Dopo la seconda ora, la parte rimanente di torta è:

$$\frac{5}{7} - \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{7} = \frac{25}{49} .$$

Ne segue che la parte di torta mangiata da Gigi in queste due ore è:

$$1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49} .$$

Esercizio 1.17

$$2,13\overline{31} = \frac{3503}{1650} .$$

Esercizio 1.18
$f$ è iniettiva, non surgettiva e quindi non bigettiva.

Esercizio 1.19

$$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2 \ .$$

Esercizio 1.20

$$n(n+1) \ .$$

Esercizio 1.21
Per $n = 0$ si ha $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = \frac{0(0+1)(0+1)}{6}$. Supponendo vera la formula per $n$ si trova

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \ .\end{aligned}$$

Esercizio 1.22
(Traccia)

(i) $2n + 2m = 2(n+m)$ per ogni $n$, $m \in \mathbb{N}$;

(ii) $(2n+1) + (2m+1) = 2(n+m+1)$;

(iii) $(2n+1) \cdot (2m+1) = 2(2n \cdot m + n + m) + 1$.

Esercizio 1.23

$$\mathbb{Z} \ .$$

Esercizio 1.24
La risposta corretta è (a).

**Capitolo 2**

Esercizio 2.30

$$r \ : \qquad y = -\frac{1}{2}\,x - \frac{3}{2} \ .$$

Esercizio 2.31

$$\gamma \ : \qquad x^2 + y^2 - 4x + 2y + \frac{9}{2} = 0 \ .$$

Esercizio 2.32

$$r_1 \ : \quad y = 2\,\sqrt{2}\,x - 1 \ ; \qquad r_2 \ : \quad y = -2\,\sqrt{2}\,x - 1 \ .$$

Esercizio 2.33

$$(x-c)^2 + (y-c)^2 = \frac{1}{2} \ ,$$

dove $c$ è un qualunque numero reale.

Esercizio 2.34
La retta $r$ è tangente alla circonferenza $\gamma$, il cui centro è l'origine, se

$$\mathrm{dist}(C, r) = \frac{|b|}{\sqrt{2}} = 1 \ .$$

Quindi $b = \pm\sqrt{2}$.

Esercizio 2.35
La retta $r$ è tangente alla circonferenza $\gamma$, il cui centro è l'origine, se

$$\mathrm{dist}(C, r) = \frac{|2|}{\sqrt{1+m^2}} = 1 \ .$$

Quindi se $m^2 = 3$, ovvero, $m = \pm\sqrt{3}$.

Esercizio 2.36

$$x \geq 7 \ .$$

Esercizio 2.37

$$x \leq -2 \ .$$

Esercizio 2.38

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ -1 < x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{oppure} \quad 0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \ .$$

**Capitolo 3**

Esercizio 3.13

$$P(x) = (x^2 + 1)\,(x + 2)\,(x - 1) \ .$$

Esercizio 3.14

$$-2 < x < 1 \ .$$

Esercizio 3.15

$$P(x) = (x + 1)\,(x - 1)\,(x^2 + x + 1)\,(x^2 + x - 1) \ .$$

Esercizio 3.16

$$x^5 - x^4 + 3x^2 + 2x - 1 = (x^3 + 2) \cdot Q(x) \ + \ R(x) \ ,$$

con $Q(x) = x^2 - x$ e $R(x) = x^2 + 4x - 1$.

# Indice analitico