Numeri Complessi

(1) Calcolare le seguenti potenze di i:

$$i^2 \qquad i^3 \qquad i^4 \qquad \frac{1}{i} \qquad i^{34} \qquad i^{-7} \qquad \frac{1}{i^{15}}$$

(2) Semplificare le seguenti espressioni:

$$(\sqrt{2}-i)-i(1-\sqrt{2}i) \qquad\qquad (3+i)(3-1)\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{10}i\right)$$

$$\tfrac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)} \qquad\qquad \overline{\overline{z}+3i}$$

$$\overline{(1-i)^3} \qquad\qquad (1+i)(1-i)(1+\sqrt{3}i)$$

(3) Verificare che $z = 1 \pm i$ soddisfa l'equazione $z^2 - 2z + 2 = 0$.

(4) Verificare che $z = -1 \pm 2i$ soddisfa l'equazione $z^3 + z^2 + 3z - 5 = 0$.

(5) Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi:

$$1+i-\frac{i}{1-2i} \qquad (1+i)(1-i)(1+3i) \qquad \left(\frac{1+i}{1-i}-1\right)^2$$

(6) Calcolare le potenze z^2 e z^6 dei seguenti numeri complessi:

$$z = \frac{2}{\sqrt{3}-i}+\frac{1}{i} \qquad\qquad z = \frac{1+i}{2-2i}$$

(7) Risolvere le seguenti equazioni:

$$z^2 + 3iz + 4 = 0 \qquad\qquad z^4 + 2z^2 + 4 = 0$$

(8) Verificare che $z = 2i$ è una radice del polinomio $P(z) = z^4 + z^3 + 5z^2 + 4z + 4$. Calcolare poi tutte le radici di $P(z)$.

(9) Sapendo che $1+i$ è radice del polinomio$P(z) = z^4 - 5z^3 + 10z^2 - 10z + 4$, trovare le altre radici.

(10) Verificare che il polinomio

$$P(z) = z^3 + (1+2i)z^2 + [(-\sqrt{3}+2)i - 2]z - i\sqrt{3} - 2$$

si annulla per $z = -1$ e trovare le altre radici.

(11) Trovare un polinomio $P(z)$ a coefficienti reali di grado 5, avente $z = 3$ come radice semplice, $z = 2-3i$ come radice di molteplicità 2, e tale che $P(0) = 1$.