Leghiamo l'energia al campo magnetico, localizzandola nello spazio in cui esiste un campo magnetico

Consideriamo un tratto di lunghezza $d$ di un solenoide indefinito

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2}\left(\mu_0 n^2 \Sigma d\right) i^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}\Sigma d = \frac{B^2}{2\mu_0}\tau$$

La densità di energia risulta

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

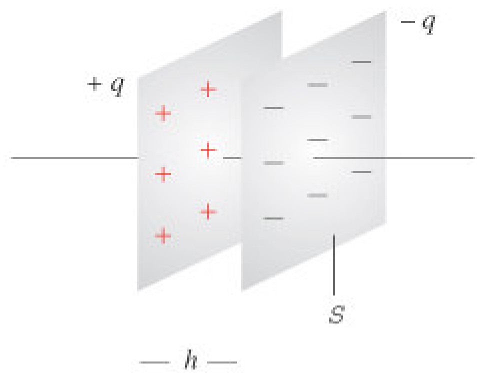
Densità di energia magnetica

In un volume τ intorno ad un punto P in cui il campo magnetico vale B

$$dU_m = u_m d\tau = \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

$$U_m = \int_\tau \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

# Capacità di un condensatore piano




$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_n \qquad V_1 - V_2 = Eh = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}h = \frac{q}{\varepsilon_0 \Sigma}h$$

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h}$$

# $U_e$ di un condensatore piano

$$U_e = \frac{CV^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\Sigma}{h}E^2h^2$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathrm{E}^2\Sigma h = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathrm{E}^2\tau$$

# Densità di $U_e$

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

In una regione dello spazio in cui è definito un campo elettrostatico l'energia contenuta in un volume infinitesimo, al cui interno il campo valga E, è

$$dU_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau$$

# Energia totale del campo elettrostatico

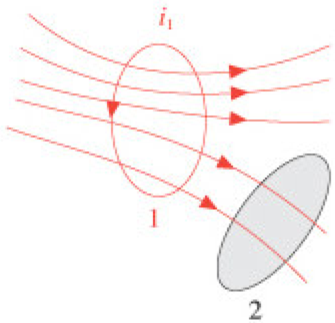
$$U_e = \int dU_e = \int_\tau \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau$$

Questa energia corrisponde al lavoro speso per costruire la distribuzione di cariche che dà origine al campo

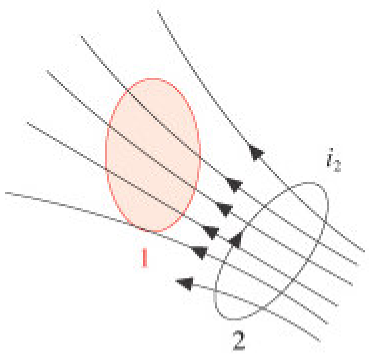
$$U_e = \int_\tau \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau$$

$$U_m = \int_\tau \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

# Induzione mutua




$F_{1,2} = M\, i_1$




$$\Phi_{1,2}\left(\vec{B}_1\right) = \int \vec{B}_1 \bullet \vec{u}_n d\Sigma_2$$

$$\Phi_{2,1}\left(\vec{B}_2\right) = \int \vec{B}_2 \bullet \vec{u}_n d\Sigma_1$$

$$\Phi_{1,2}\left(\vec{B}_1\right) = M_{1,2} i_1$$

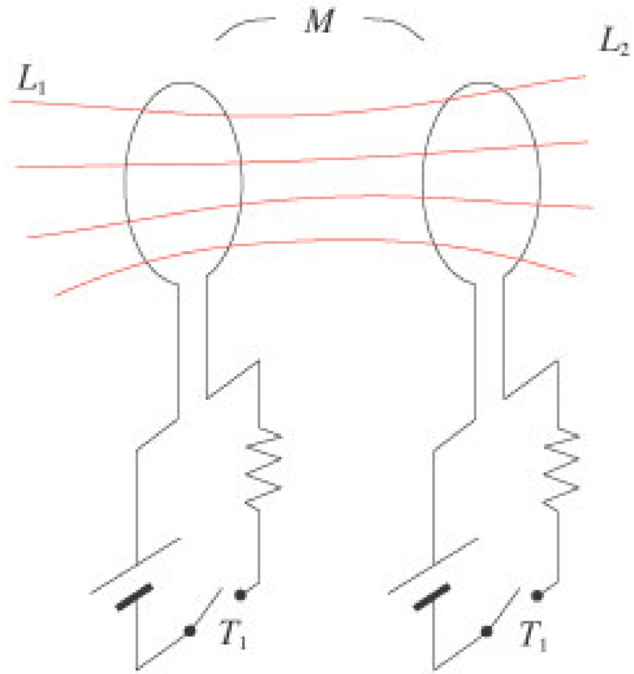
$$\Phi_{2,1}\left(\vec{B}_2\right) = M_{2,1} i_2$$

In base alla legge di Faraday si ha una f.e.m. indotta in un circuito dalla variazione di corrente dell'altro

$$f_1' = -\frac{d\Phi_{2,1}}{dt} = -M_{2,1}\frac{di_2}{dt}$$

$$f_2' = -\frac{d\Phi_{1,2}}{dt} = -M_{1,2}\frac{di_1}{dt}$$

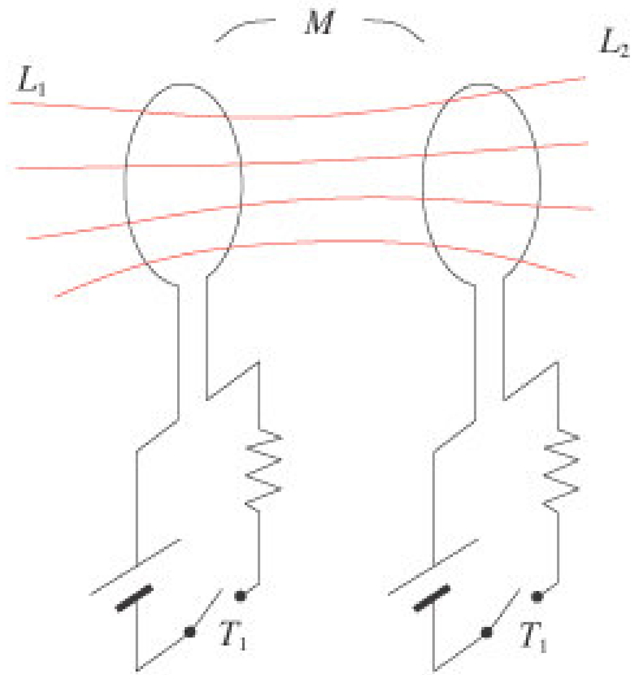
# Considerazioni energetiche




Portiamo $i_1$ a regime, $i_2 = 0$

$$U_1 = \frac{1}{2} L i_1^{\ 2}$$

# Considerazioni energetiche

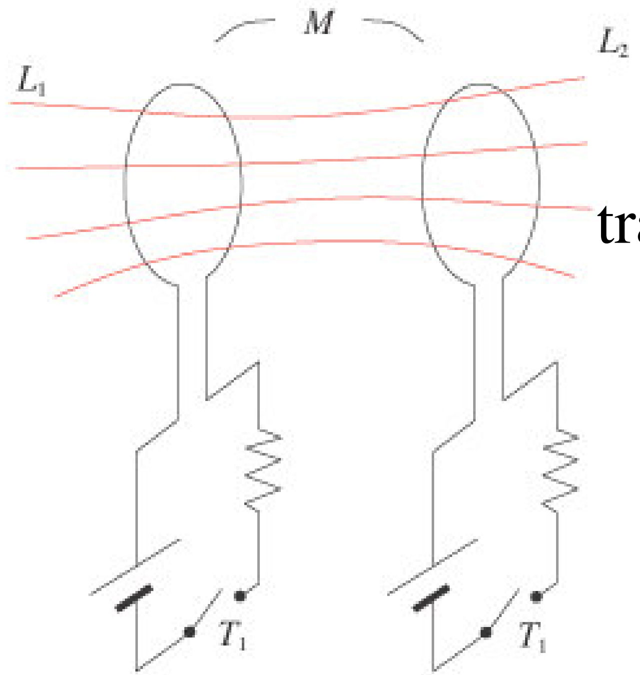



Portiamo $i_2$ a regime, $i_1$ =cost

$$U_2 = \frac{1}{2} L i_2^{\,2}$$

$$U_{2,1} = -\int f_1' i_1 dt = \int M_{2,1} \frac{di_2}{dt} i_1 dt = M_{2,1} i_1 i_2$$

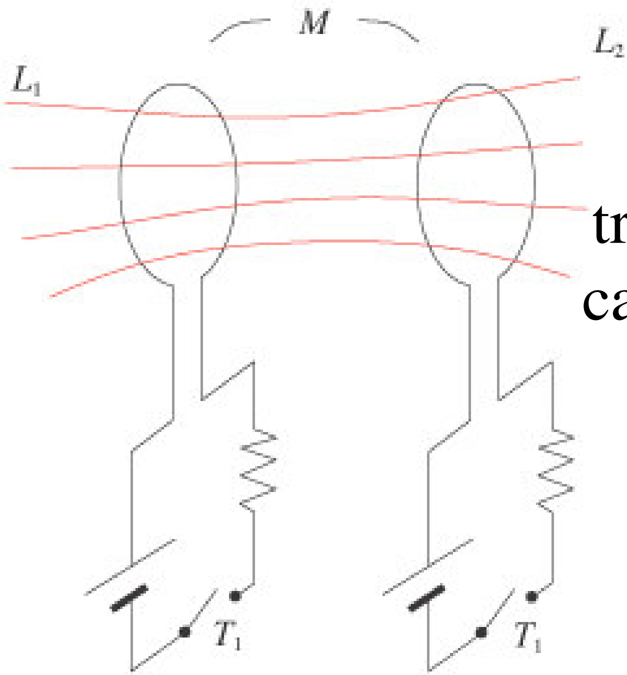
# Considerazioni energetiche




In totale il lavoro speso dai generatori trasformato in energia legata alla presenza del campo magnetico è:

$$\frac{1}{2}L i_1{}^2 + \frac{1}{2}L i_2{}^2 + M_{2,1} i_1 i_2$$

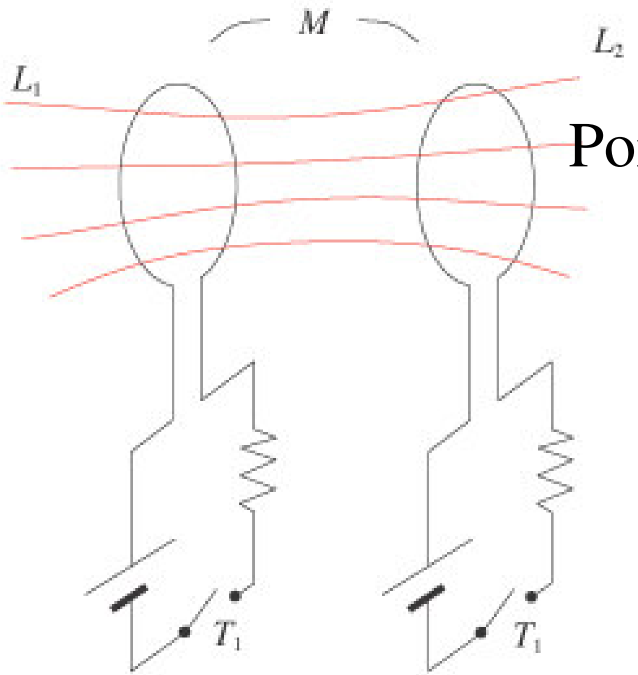
# Considerazioni energetiche




In totale il lavoro speso dai generatori trasformato in energia legata alla presenza del campo magnetico con procedimento inverso è:

$$\frac{1}{2}Li_1^{\ 2}+\frac{1}{2}Li_2^{\ 2}+M_{1,2}i_1i_2$$

# Considerazioni energetiche




Poiché i due stati finali sono uguali ciò implica:

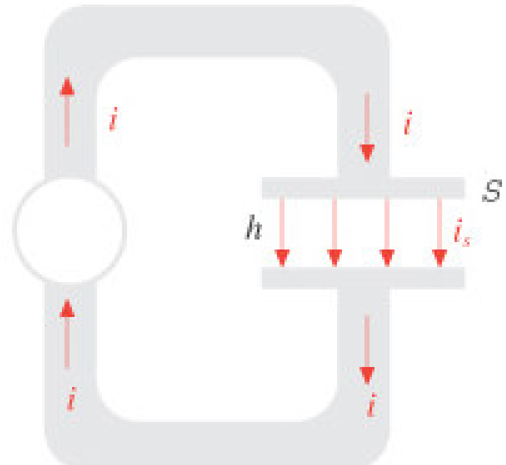
$$M_{1,2} = M_{2,1}$$

Due circuiti per i quali M≠0 si dicono accoppiati, M si definisce *induttanza mutua* e si misura in H

Energia magnetica di due circuiti accoppiati

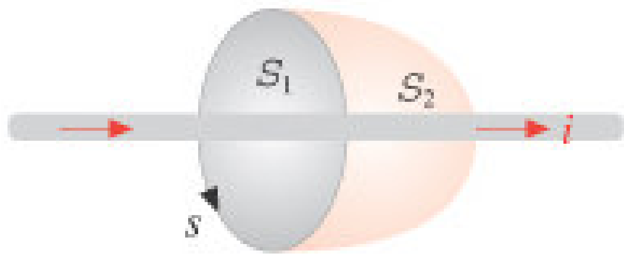
$$U_m = \frac{1}{2} L i_1^{\;2} + \frac{1}{2} L i_2^{\;2} + M i_1 i_2$$

# Corrente di spostamento



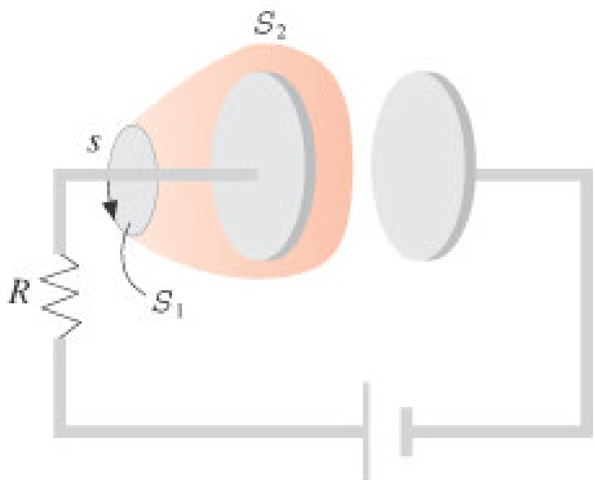

$$i_s = \frac{dq}{dt} = \frac{d(CV)}{dt} =$$

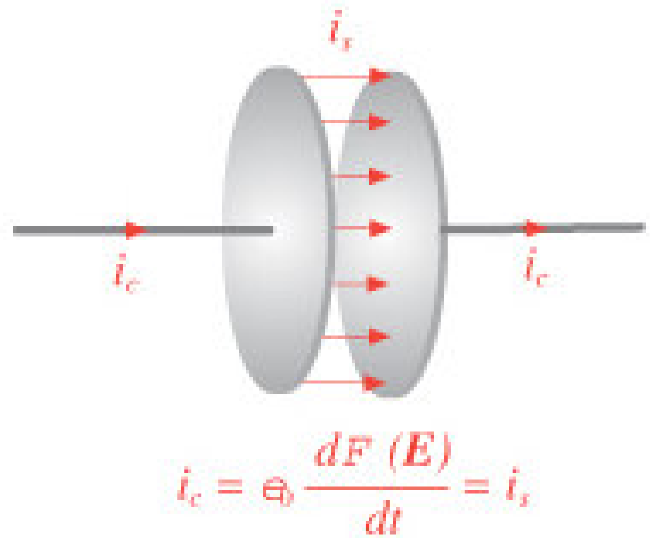
$$= \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\Sigma V}{h}\right) = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}(\Sigma E) = \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$




$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{s} = \mu_0 i =$$

$$= \mu_0 \int_{\Sigma} \vec{j} \bullet \vec{u}_n d\Sigma$$



# Equazione di continuità

Conservazione della carica sotto forma differenziale

$$q(t) = \int_\tau \rho d\tau$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_\tau \rho d\tau = \int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

La variazione della carica nell'unità di tempo per la conservazione della carica deve uguagliare la carica che nello stesso dt ha attraversato la superficie S che racchiude quel volume

$$\int_{\Sigma} \vec{j} \bullet \vec{u}_n d\Sigma = -\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

Per il teorema della divergenza

$$\int_{\Sigma} \vec{j} \bullet \vec{u}_n d\Sigma = \int_{\tau} \vec{\nabla} \bullet \vec{j} d\tau$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{j} = 0$$

Condizione di stazionarietà

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$$\vec{\nabla} \bullet \left( \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \qquad \vec{j}_s = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \bullet \left( \vec{j} + \vec{j}_s \right) = 0$$

Il vettore $\mathbf{j} + \mathbf{j_s}$ è solenoidale

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j} \qquad \text{diventa} \quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}+\vec{j}_s\right)$$

In forma integrale

$$\oint\vec{B}\bullet d\vec{s}=\int_\Sigma\vec{\nabla}\times\vec{B}\bullet\vec{u}_n d\Sigma=$$

$$\mu_0\int_\Sigma\vec{j}\bullet\vec{u}_n d\Sigma+\mu_0\int_\Sigma\vec{j}_s\bullet\vec{u}_n d\Sigma=$$

$$\mu_0\left(i+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma\vec{E}\bullet\vec{u}_n d\Sigma\right)=\mu_0\left(i+\varepsilon_0\frac{\partial\Phi\left(\vec{E}\right)}{\partial t}\right)$$

# Legge di Faraday

Un campo magnetico variabile crea un campo elettrico.

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{s} = -\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt}$$

L'integrale è esteso ad una qualunque linea chiusa e $\Phi(\mathbf{B})$ è il flusso d'induzione concatenato con quella linea.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

# Legge di Faraday

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{s} = -\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Hanno validità generale; esse sona valide anche quando il campo elettrico è creato sia da campi magnetici variabili che da cariche elettriche; infatti in tal caso il campo elettrico è dato da

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_i$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_s = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

# Legge di Ampere-Maxwell

Una corrente elettrica, sia essa di conduzione o di spostamento, crea un campo magnetico; o anche un campo elettrico variabile crea un campo magnetico

$$\oint_l \vec{B} \bullet d\vec{s} = \mu_0 \left( i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi\left(\vec{E}\right)}{dt} \right) =$$

$$\mu_0 \int_\Sigma \left( \vec{j} + \vec{j}_s \right) \bullet \vec{u}_n d\Sigma$$

Ove js è la densità di corrente di spostamento, *l* una qualunque linea chiusa ed Σ una qualunque superficie avente per contorno quella linea

# Legge di Ampere-Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_s)$$

$$\vec{j}_s = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

# Legge di Gauss

Fornisce la relazione tra il campo elettrostatico e le cariche che lo creano.

$$\oint \vec{E} \bullet \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad\qquad \vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

Queste relazioni, sebbene stabilite in elettrostatica hanno validità generale: sono valide anche quando il campo è creato sia da cariche elettriche che da campi magnetici variabili infatti in tal caso il campo elettrico è dato da:

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_i$$

# Legge di Gauss

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_i$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E}_s = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \qquad\qquad \vec{\nabla} \bullet \vec{E}_i = 0$$

# Solenoidalità del vettore **B**

$$\oint \vec{B} \bullet \vec{u}_n d\Sigma = 0$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0$$

# Equazioni di Maxwell in forma integrale

$$\oint \vec{E} \bullet \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \bullet \vec{u}_n d\Sigma = 0$$

$$\oint \vec{E} \bullet ds = -\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \bullet ds = \mu_0 \left( i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi\left(\vec{E}\right)}{dt} \right)$$

# Equazioni di Maxwell in forma locale

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \vec{j}_s \right)$$