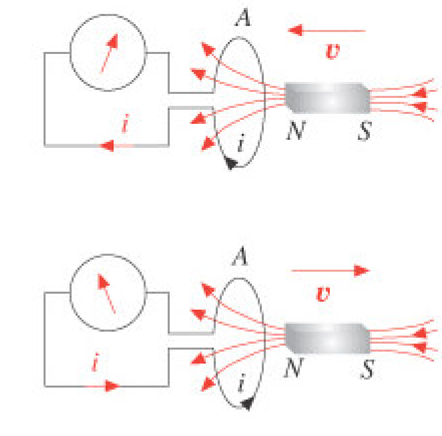
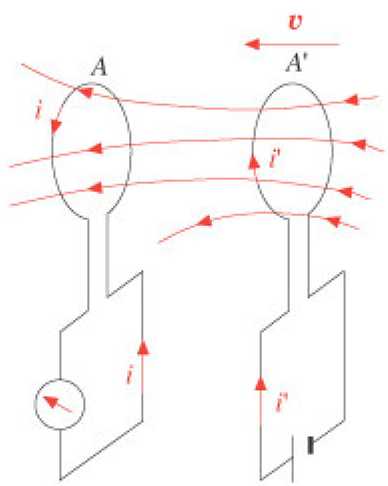
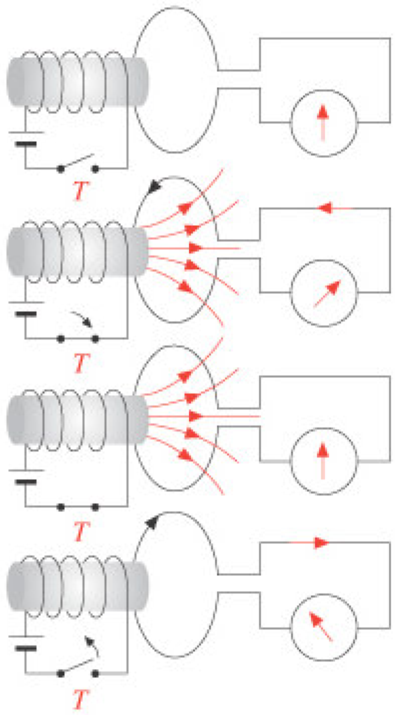
Legge di Faraday







Legge di Faraday

$$f_i = -\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt}$$

Se R è la resistenza del circuito

$$i = \frac{f_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt}$$

Ricordando che la forza elettromotrice è per definizione

$$f_i = \oint \vec{E}_i \bullet d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

La variazione del flusso magnetico concatenato con una linea chiusa s da origine ad un campo elettrico indotto **non conservativo**

La legge di Faraday si può anche scrivere

$$f_i = -\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{\Sigma} \vec{B} \bullet \vec{u}_n d\Sigma =$$

$$-\frac{d}{dt}\int_{\Sigma} B\cos\theta d\Sigma =$$

1) Si può variare **B**

2) Si può variare l’angolo

3) Si può deformare il circuito

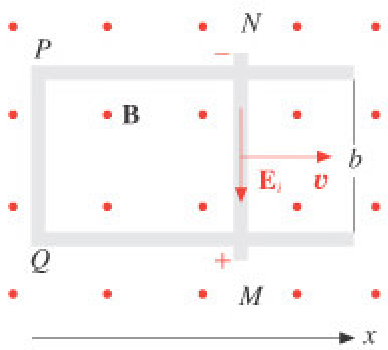
Legge di Lenz

La f.e.m. indotta in un circuito ha sempre verso tale da produrre una corrente che tende ad opporsi alla causa che lo ha generato

L'unità di flusso magnetico è il Weber (Wb)

In un circuito ha luogo la variazione di 1 Wb quando questa variazione, in un secondo, provoca una *fem* di 1 V.

$$f_i = \oint \vec{E}_i \bullet d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma} \vec{B} \bullet \vec{u}_n d\Sigma =$$



$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$f_i = \oint \vec{v} \times \vec{B} \bullet d\vec{s} = \int_{M}^{N} \vec{v} \times \vec{B} \bullet d\vec{s} = -vBb$$

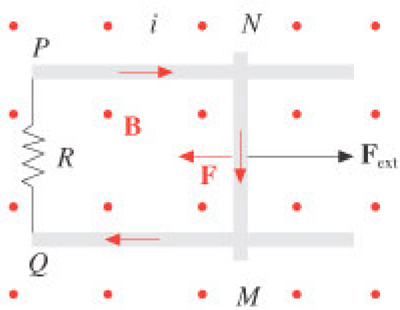
$$\Phi\left(\vec{B}\right) = \int \vec{B} \bullet \vec{u}_n \, d\Sigma = Bbx$$

$$f_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -Bb\frac{\partial x}{\partial t} = -vBb$$

$$f_i = \oint \vec{v} \times \vec{B} \bullet d\vec{s} = \int_M^N \vec{v} \times \vec{B} \bullet d\vec{s} = -vBb$$

Attrito elettromagnetico

$$f_i = -vBb \qquad i = -\frac{vBb}{r+R}$$

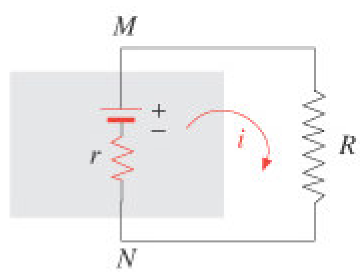


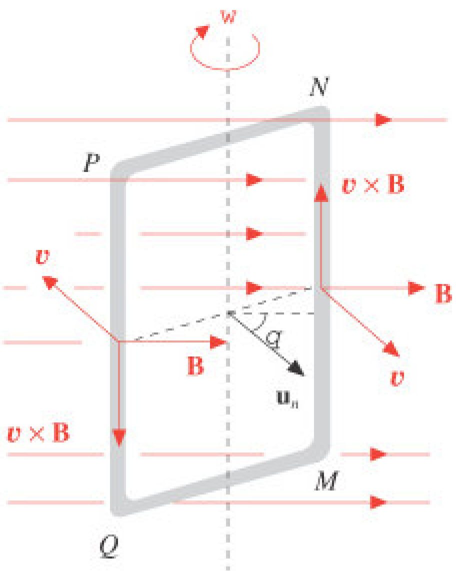
$$\vec{F} = i\vec{b} \times \vec{B} = -\frac{B^2 b^2}{r+R}\vec{v}$$

Resistenza di attrito elettromagnetico

$$P = \vec{F}_{ext} \bullet \vec{v} = \frac{B^2 b^2 v^2}{r+R} = (r+R)i^2 = f_i i$$

La potenza meccanica impiegata, viene ritrovata integralmente sotto forma di potenza elettrica spesa sulle resistenze del circuito

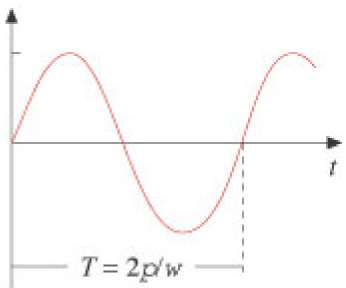




Generatore di corrente alternata

$$\Phi(\vec{B}) = \int \vec{B} \bullet \vec{u}_n d\Sigma = B\Sigma\cos\theta = B\Sigma\cos\omega t$$

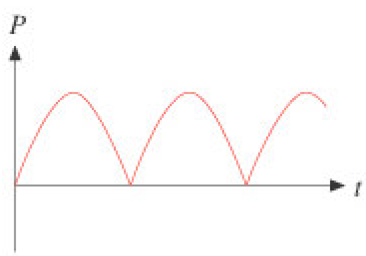
$$f_i = -\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt} = \omega B \Sigma sen\, \omega t$$



$$f_{\max} = \omega B \Sigma$$

Se la spira è collegata ad una R

$$i = \frac{f_i}{R} = \frac{\omega B \Sigma}{R} sen\, \omega t$$



$$P = Ri^2 = \frac{\left(\omega B \Sigma\right)^2}{R} sen^2 \omega t$$

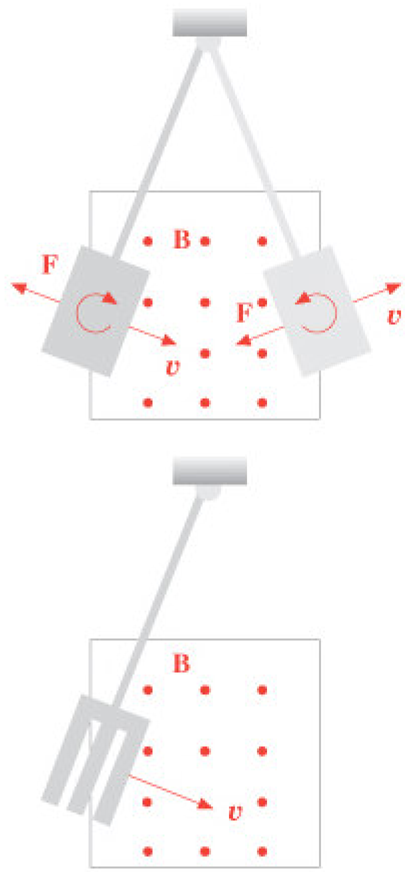
Valor medio della potenza

$$P_m = \frac{(\omega B \Sigma)^2}{2R} = \frac{f_{\max}{}^2}{2R}$$

Il generatore di c.a. è equivalente ad un generatore di c.c. la cui f.e.m. detta efficace è

$$f_{eff} = \frac{f_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Correnti di Foucault



Legge di Felici

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)\,dt = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$$

Il valore della carica non dipende dalle legge temporale con cui varia il flusso

Autoflusso

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

$$\Phi(\vec{B}) = \int \left(\frac{\mu_0}{4\pi} i \oint \frac{d\vec{s} \times \vec{u}_r}{r^2} \right) \bullet u_n d\Sigma$$

$$\Phi(\vec{B}) = Li$$

L si chiama coefficiente di autoinduzione o induttanza

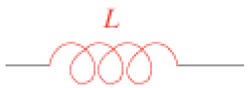
L'induttanza di un circuito misura il flusso del campo magnetico concatenato con quel circuito quando attraversato da una corrente di intensità unitaria

Un circuito ha un'induttanza di un henry se, una corrente di un ampere che fluisca in quel circuito, concatena con esso un flusso di induzione di un weber

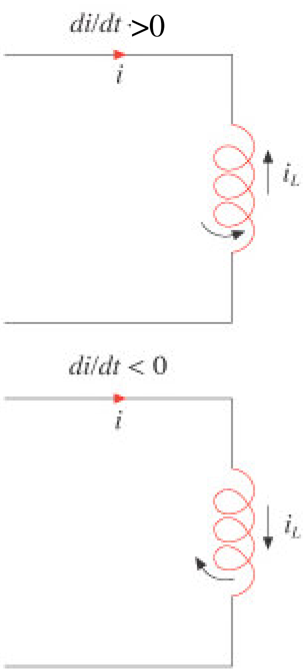
Quando in un circuito la corrente non è costante nel tempo, il flusso concatenato varia e nel circuito compare una f.e.m. indotta

$$f_L = -\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

Un circuito con induttanza non nulla si dice induttivo



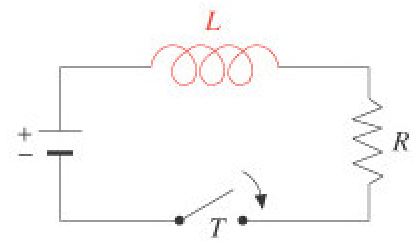
induttore



$$f_L = -\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

Circuito RL

$$f + f_L = Ri$$



$$f = L\frac{di}{dt} + Ri$$

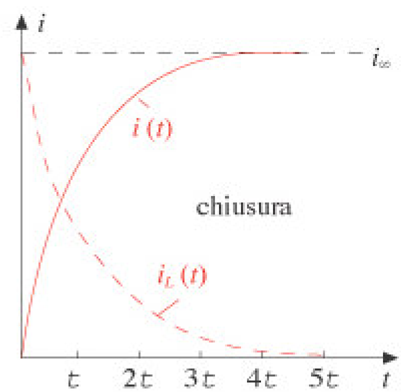
$$\frac{di}{f - Ri} = \frac{dt}{L} \rightarrow \ln(f - Ri) = -\frac{R}{L}t + \cos t$$

$$f - Ri = Ae^{-Rt/L}$$

Chiusura del circuito

t=0 i=0 A=f

$$i(t) = \frac{f}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$



$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$f_L = -L\frac{di}{dt} = -fe^{-t/\tau}$$

Chiusura del circuito

$$i_\infty - i(t) = \frac{f}{R} e^{-t/\tau} = -\frac{f_L}{R} = i_L$$

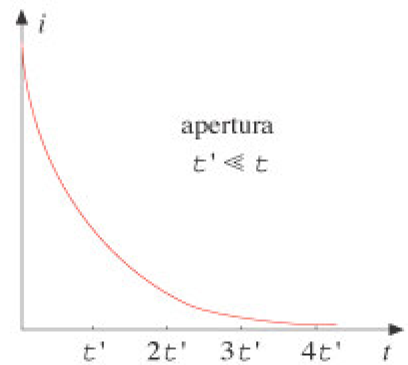
quindi

$$i(t) = i_\infty - i_L$$

Extracorrente di chiusura

Apertura del circuito

$$i(t) = \frac{f}{R}\left(e^{-t/\tau'}\right)$$

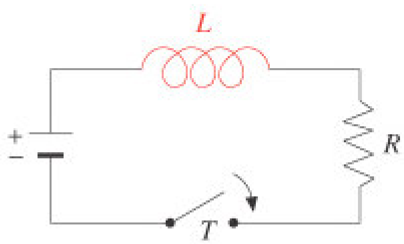


$$\tau' = \frac{L}{R'}$$

$$f_L = -L\frac{di}{dt} = -\frac{R'}{R} f e^{-t/\tau'}$$

$$\frac{f_L}{R'} = i_L = i(t)$$

Energia magnetica



$$fi = Li\frac{di}{dt} + Ri^2$$

$$fidt = Lidi + Ri^2 dt$$

Bilancio energetico

Lavoro compiuto dal generatore

Lavoro speso contro la f.e.m. di autoinduzione

Effetto joule

Lavoro speso contro f_L nel tempo in cui la corrente passa dal valore zero al valore i

$$W = \int_0^i Lidi = \frac{1}{2}Li^2$$

Possiamo definire la *energia intrinseca della corrente*

$$U_L = \frac{1}{2}Li^2$$

Nel passaggio da zero a i_∞

$$U_L = \frac{1}{2} L i_\infty^{\;2}$$

Durante l'apertura del circuito la corrente torna a zero e nel resistore viene speso il lavoro

$$i(t) = \frac{f}{R}\left(e^{-t/\tau'}\right)$$

$$\tau' = \frac{L}{R'}$$

$$\int_0^\infty R' i^2 dt = R' \frac{f^2}{R^2} \int_0^\infty e^{-2R't/L} dt = \frac{1}{2} L i_\infty^2$$

Leghiamo l’energia al campo magnetico, localizzandola nello spazio in cui esiste un campo magnetico

Consideriamo un tratto di lunghezza *d* di un solenoide indefinito

$$U_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2}\left(\mu_0 n^2 \Sigma d\right) i^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}\Sigma d = \frac{B^2}{2\mu_0}\tau$$

La densità di energia risulta

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

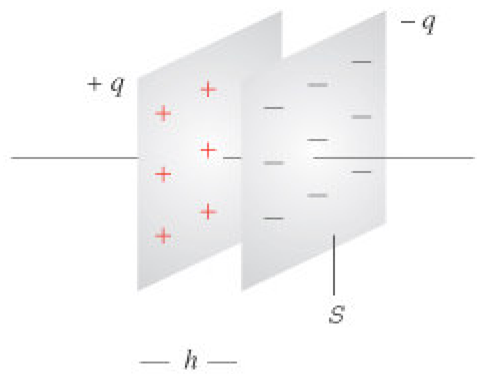
Densità di energia magnetica

In un volume τ intorno ad un punto P in cui il campo magnetico vale B

$$dU_m = u_m d\tau = \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

$$U_m = \int_\tau \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

Capacità di un condensatore piano



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_n \qquad V_1 - V_2 = Eh = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}h = \frac{q}{\varepsilon_0 \Sigma}h$$

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h}$$

U_e di un condensatore piano

$$U_e = \frac{CV^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h} E^2 h^2$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathrm{E}^2 \Sigma h = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathrm{E}^2 \tau$$

Densità di U_e

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

In una regione dello spazio in cui è definito un campo elettrostatico l'energia contenuta in un volume infinitesimo, al cui interno il campo valga E, è

$$dU_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau$$

Energia totale del campo elettrostatico

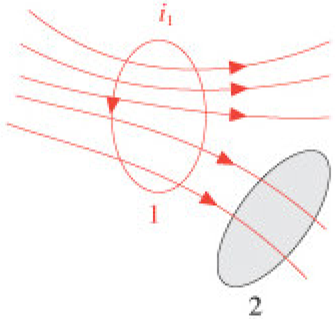
$$U_e = \int dU_e = \int_\tau \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau$$

Questa energia corrisponde al lavoro speso per costruire la distribuzione di cariche che dà origine al campo

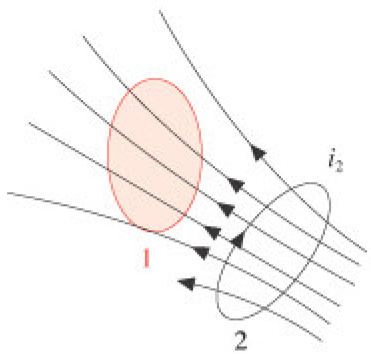
$$U_e = \int_\tau \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau$$

$$U_m = \int_\tau \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

Induzione mutua



$F_{1,2} = M\, i_1$



$$\Phi_{1,2}\left(\vec{B}_1\right) = \int \vec{B}_1 \bullet \vec{u}_n d\Sigma_2$$

$$\Phi_{2,1}\left(\vec{B}_2\right) = \int \vec{B}_2 \bullet \vec{u}_n d\Sigma_1$$

$$\Phi_{1,2}\left(\vec{B}_1\right) = M_{1,2} i_1$$

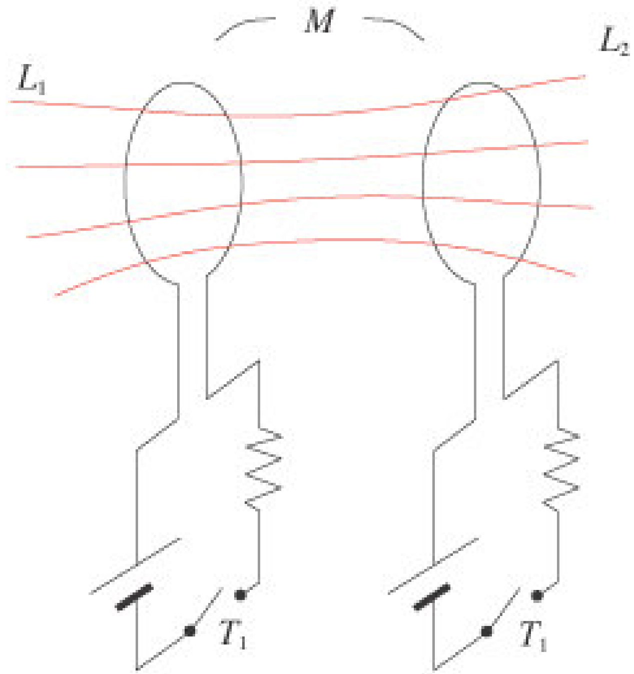
$$\Phi_{2,1}\left(\vec{B}_2\right) = M_{2,1} i_2$$

In base alla legge di Faraday si ha una f.e.m. indotta in un circuito dalla variazione di corrente dell’altro

$$f_1' = -\frac{d\Phi_{2,1}}{dt} = -M_{2,1}\frac{di_2}{dt}$$

$$f_2' = -\frac{d\Phi_{1,2}}{dt} = -M_{1,2}\frac{di_1}{dt}$$

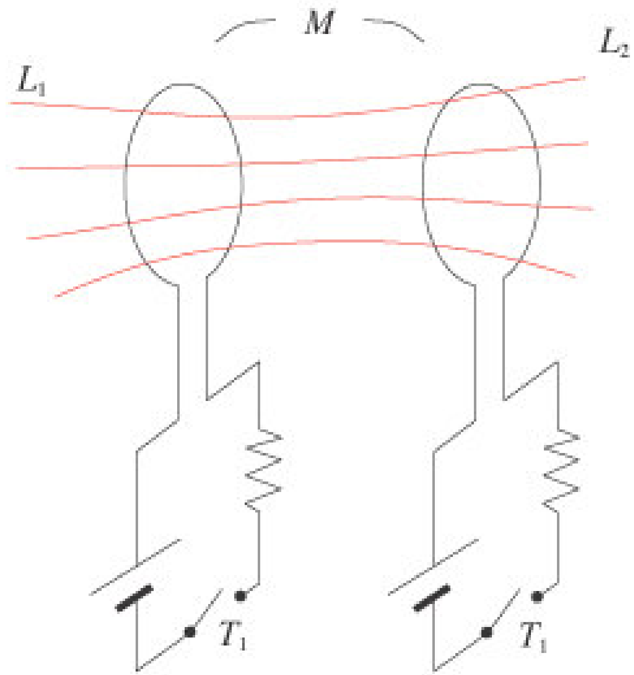
Considerazioni energetiche



Portiamo i_1 a regime, $i_2 = 0$

$$U_1 = \frac{1}{2} L i_1^{\ 2}$$

Considerazioni energetiche

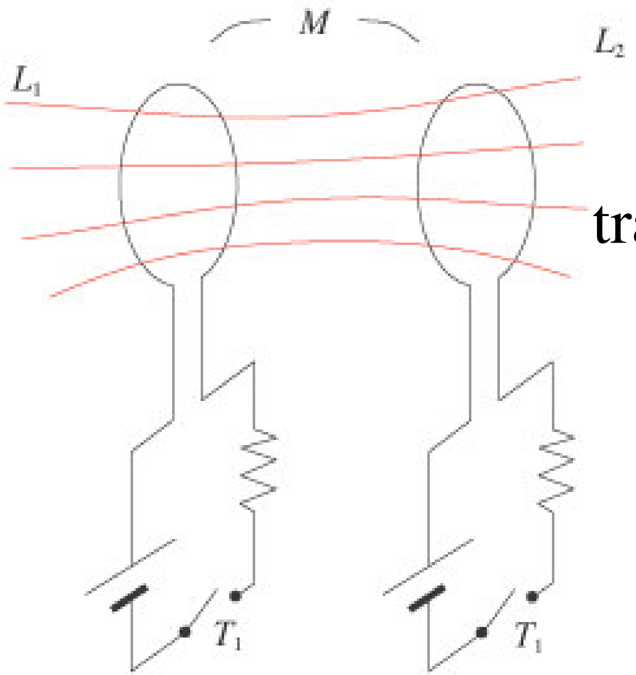


Portiamo i_2 a regime, i_1 =cost

$$U_2 = \frac{1}{2} L i_2^{\ 2}$$

$$U_{2,1} = -\int f_1' i_1 dt = \int M_{2,1} \frac{di_2}{dt} i_1 dt = M_{2,1} i_1 i_2$$

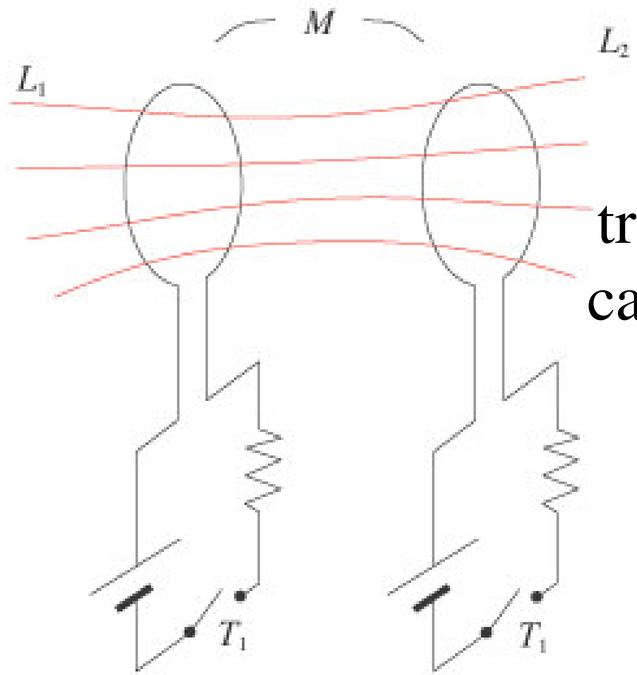
Considerazioni energetiche



In totale il lavoro speso dai generatori trasformato in energia legata alla presenza del campo magnetico è:

$$\frac{1}{2}L i_1^{\,2} + \frac{1}{2}L i_2^{\,2} + M_{2,1} i_1 i_2$$

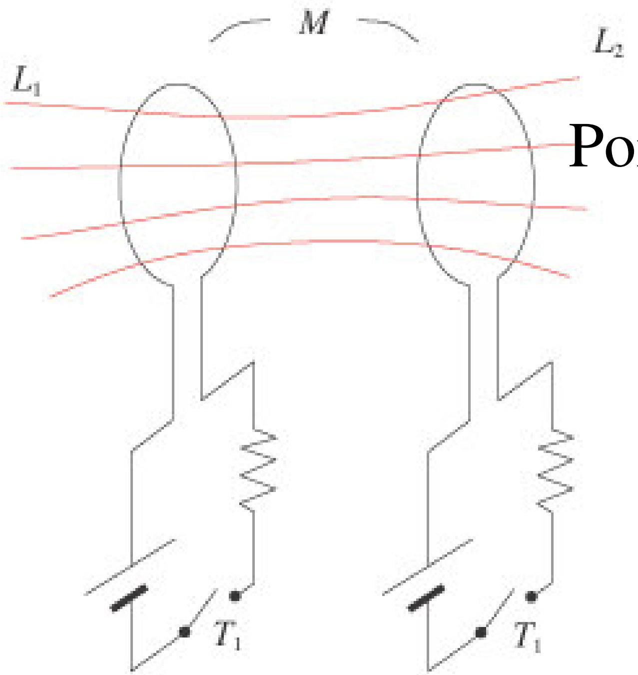
Considerazioni energetiche



In totale il lavoro speso dai generatori trasformato in energia legata alla presenza del campo magnetico con procedimento inverso è:

$$\frac{1}{2}Li_1^{\;2}+\frac{1}{2}Li_2^{\;2}+M_{1,2}i_1i_2$$

Considerazioni energetiche



Poiché i due stati finali sono uguali ciò implica:

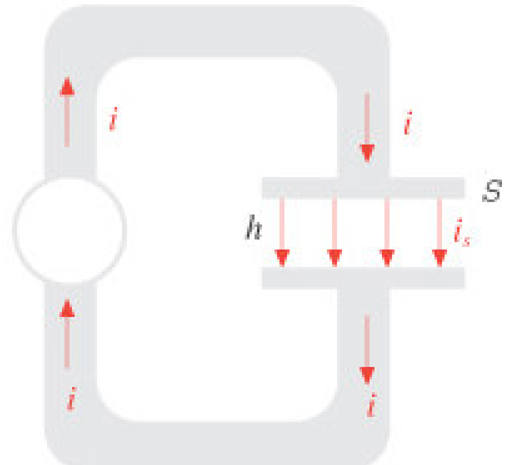
$$M_{1,2} = M_{2,1}$$

Due circuiti per i quali M≠0 si dicono accoppiati, M si definisce *induttanza mutua* e si misura in H

Energia magnetica di due circuiti accoppiati

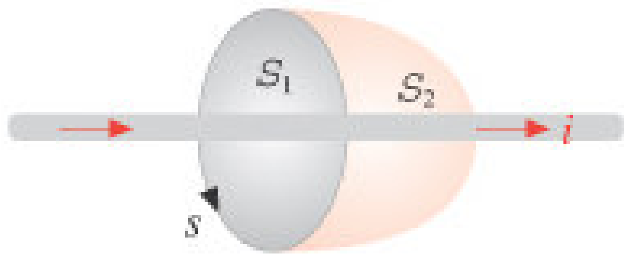
$$U_m = \frac{1}{2} L i_1^{\,2} + \frac{1}{2} L i_2^{\,2} + M i_1 i_2$$

Corrente di spostamento



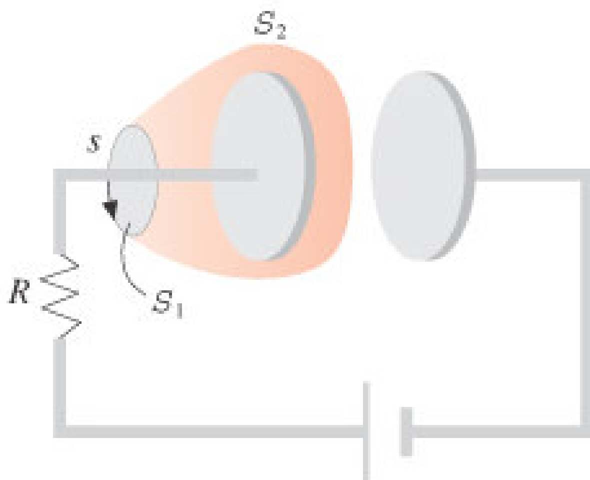
$$i_s = \frac{dq}{dt} = \frac{d(CV)}{dt} =$$

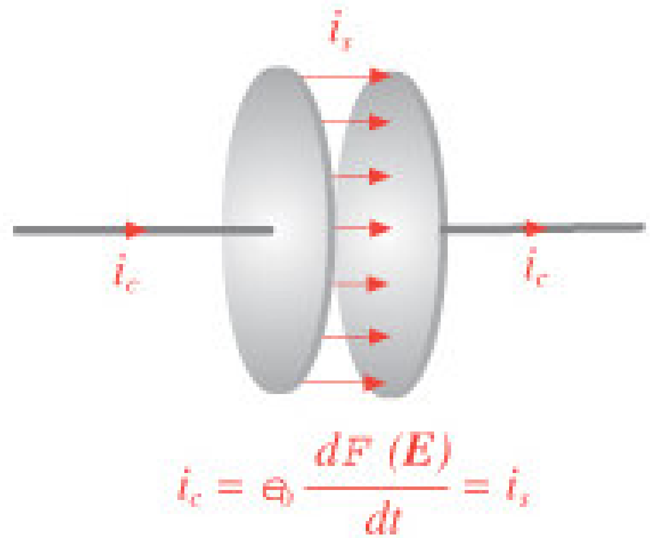
$$= \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\Sigma V}{h}\right) = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}(\Sigma E) = \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$



$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{s} = \mu_0 i =$$

$$= \mu_0 \int_\Sigma \vec{j} \bullet \vec{u}_n d\Sigma$$





Equazione di continuità

Conservazione della carica sotto forma differenziale

$$q(t) = \int_\tau \rho d\tau$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_\tau \rho d\tau = \int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

La variazione della carica nell'unità di tempo per la conservazione della carica deve uguagliare la carica che nello stesso dt ha attraversato la superficie S che racchiude quel volume

$$\int_{\Sigma} \vec{j} \bullet \vec{u}_n d\Sigma = -\int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

Per il teorema della divergenza

$$\int_{\Sigma} \vec{j} \bullet \vec{u}_n d\Sigma = \int_{\tau} \vec{\nabla} \bullet \vec{j} d\tau$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{j} = 0$$

Condizione di stazionarietà

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

$$\vec{\nabla} \bullet \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \qquad \vec{j}_s = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \bullet \left(\vec{j} + \vec{j}_s \right) = 0$$

Il vettore $\mathbf{j} + \mathbf{j_s}$ è solenoidale

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j} \qquad \text{diventa} \quad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}+\vec{j}_s\right)$$

In forma integrale

$$\oint\vec{B}\bullet d\vec{s}=\int_\Sigma\vec{\nabla}\times\vec{B}\bullet\vec{u}_n d\Sigma=$$

$$\mu_0\int_\Sigma\vec{j}\bullet\vec{u}_n d\Sigma+\mu_0\int_\Sigma\vec{j}_s\bullet\vec{u}_n d\Sigma=$$

$$\mu_0\left(i+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma\vec{E}\bullet\vec{u}_n d\Sigma\right)=\mu_0\left(i+\varepsilon_0\frac{\partial\Phi\left(\vec{E}\right)}{\partial t}\right)$$

Legge di Faraday

Un campo magnetico variabile crea un campo elettrico.

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{s} = -\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt}$$

L’integrale è esteso ad una qualunque linea chiusa e $\Phi(\mathbf{B})$ è il flusso d’induzione concatenato con quella linea.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Legge di Faraday

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{s} = -\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Hanno validità generale; esse sona valide anche quando il campo elettrico è creato sia da campi magnetici variabili che da cariche elettriche; infatti in tal caso il campo elettrico è dato da

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_i$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_s = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Legge di Ampere-Maxwell

Una corrente elettrica, sia essa di conduzione o di spostamento, crea un campo magnetico; o anche un campo elettrico variabile crea un campo magnetico

$$\oint_l \vec{B} \bullet d\vec{s} = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi\left(\vec{E}\right)}{dt} \right) =$$

$$\mu_0 \int_\Sigma \left(\vec{j} + \vec{j}_s \right) \bullet \vec{u}_n d\Sigma$$

Ove js è la densità di corrente di spostamento, *l* una qualunque linea chiusa ed Σ una qualunque superficie avente per contorno quella linea

Legge di Ampere-Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \vec{j}_s \right)$$

$$\vec{j}_s = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Legge di Gauss

Fornisce la relazione tra il campo elettrostatico e le cariche che lo creano.

$$\oint \vec{E} \bullet \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

Queste relazioni, sebbene stabilite in elettrostatica hanno validità generale: sono valide anche quando il campo è creato sia da cariche elettriche che da campi magnetici variabili infatti in tal caso il campo elettrico è dato da:

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_i$$

Legge di Gauss

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_i$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E}_s = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \qquad\qquad \vec{\nabla} \bullet \vec{E}_i = 0$$

Solenoidalità del vettore **B**

$$\oint \vec{B} \bullet \vec{u}_n d\Sigma = 0$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{B} = 0$$

Equazioni di Maxwell

$$\oint \vec{E} \bullet \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \bullet \vec{u}_n d\Sigma = 0$$

$$\oint \vec{E} \bullet ds = -\frac{d\Phi\left(\vec{B}\right)}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \bullet ds = \mu_0\left(i + \varepsilon_0 \frac{d\Phi\left(\vec{E}\right)}{dt} \right)$$