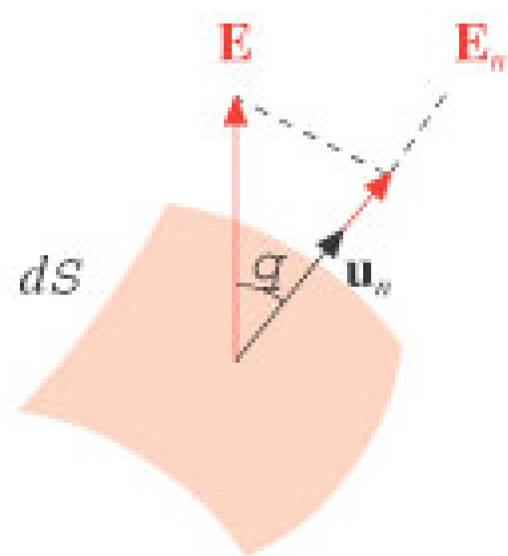
Flusso del campo elettrostatico

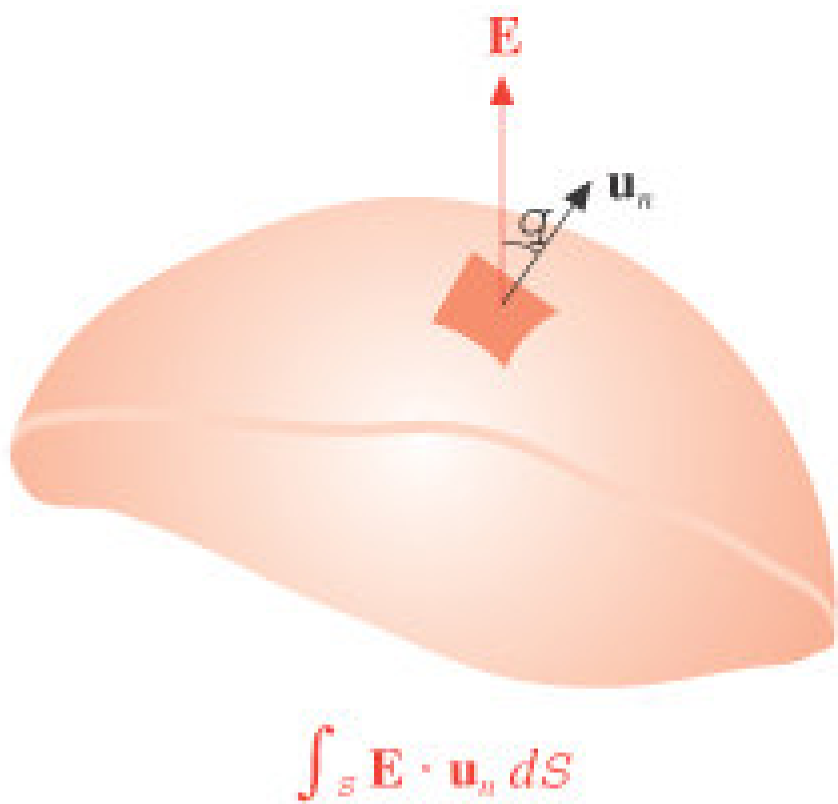
Si definisce flusso del campo elettrostatico attraverso la superficie dΣ la quantità scalare

$$d\Phi\left(\vec{E}\right) = \vec{E} \bullet \vec{u}_n d\Sigma = E\cos\theta d\Sigma = E_n d\Sigma$$



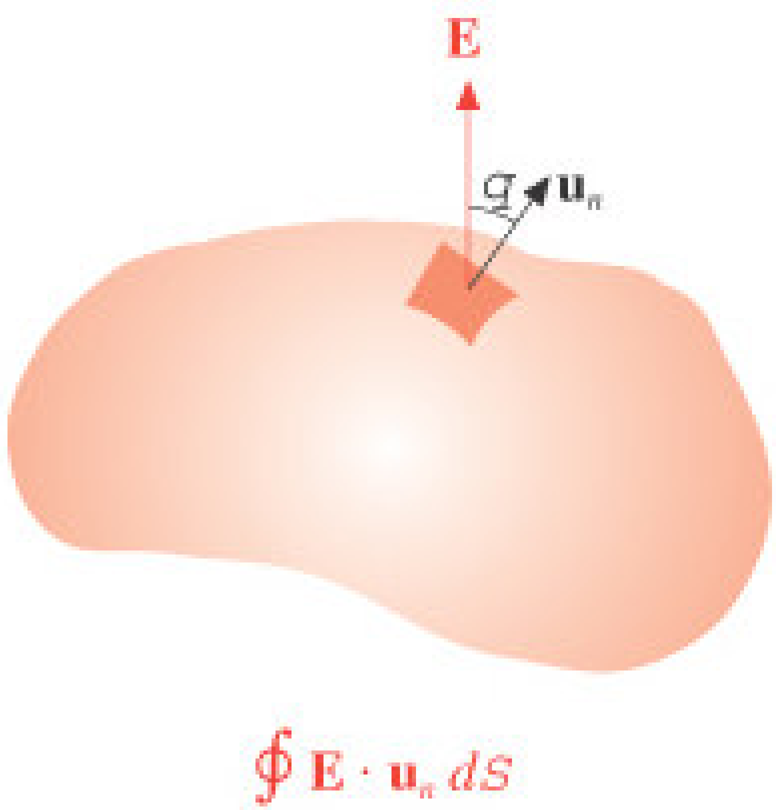
Si definisce flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie finita Σ

$$\Phi(\vec{E}) = \int_{\Sigma} \vec{E} \bullet \vec{u}_n d\Sigma$$



Se la superficie è chiusa il flusso si scrive

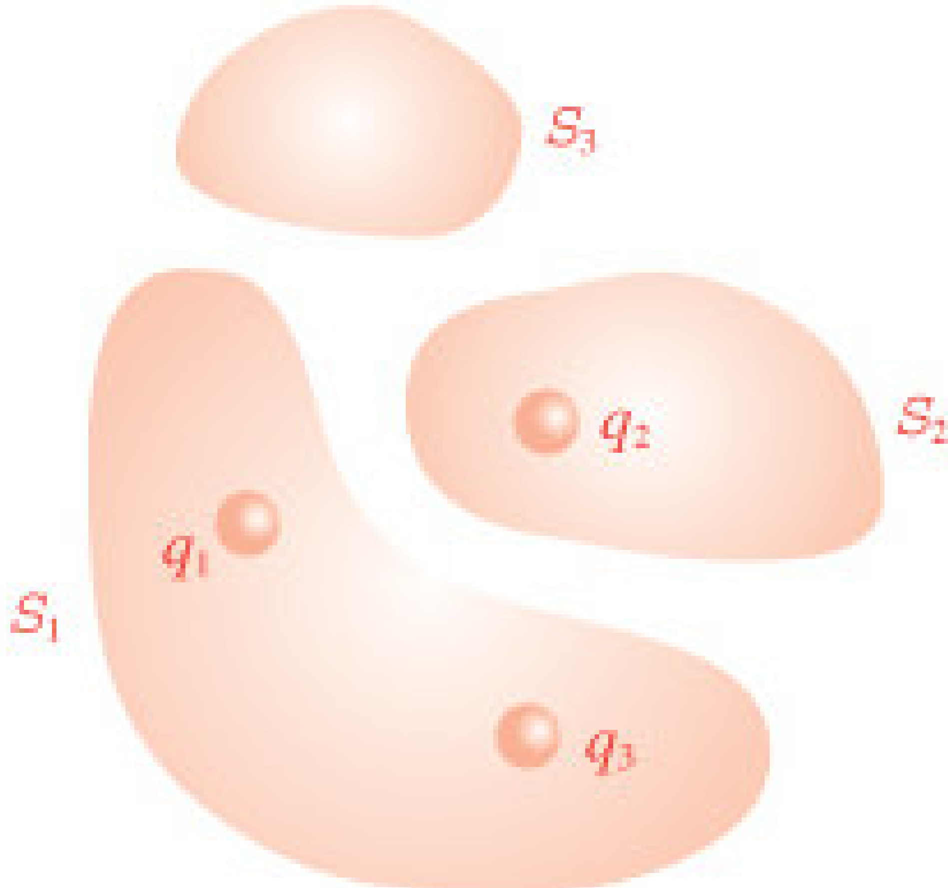
$$\Phi\left(\vec{E}\right) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \bullet \vec{u}_n d\Sigma$$



LEGGE DI GAUSS

Il flusso del campo elettrostatico E prodotto da un sistema di cariche attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma algebrica delle cariche contenute all'interno della superficie, diviso per ε_0.

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \bullet \vec{u}_n d\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\sum_i q_i \right)_{\text{int}}$$



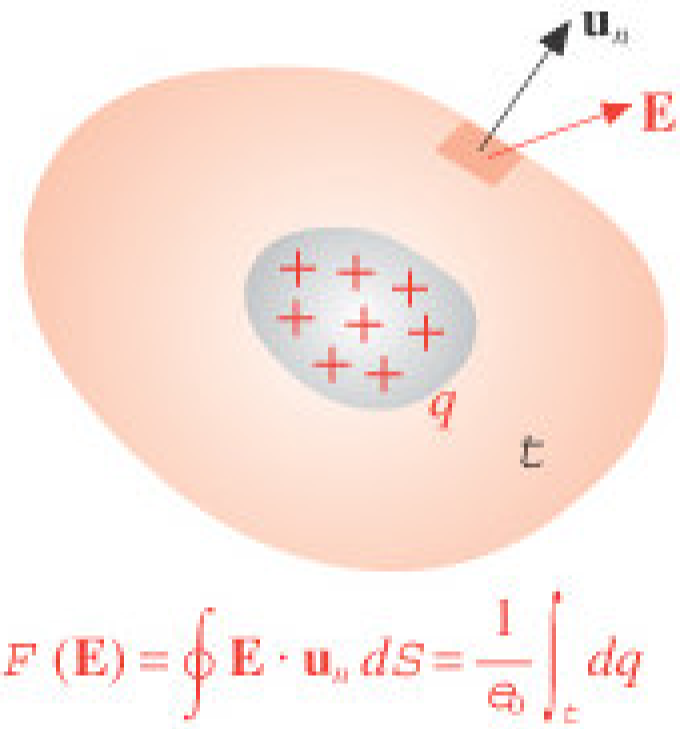
$$F_{S_1}(\mathbf{E}) = \frac{q_1 + q_3}{\varepsilon_0}$$

$$F_{S_2}(\mathbf{E}) = \frac{q_2}{\varepsilon_0}$$

$$F_{S_3}(\mathbf{E}) = 0$$

Per distribuzioni continue

$$\Phi\left(\vec{E}\right)=\oint_{\Sigma}\vec{E}\bullet\vec{u}_n d\Sigma=\frac{1}{\varepsilon_0}\int dq$$



In generale

$$\boxed{\Phi\left(\vec{E}\right) = \oint_{\Sigma} \vec{E} \bullet \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Nel SI il flusso del campo elettrostatico si misura in volt x metro, Vm

La legge di Gauss e quella di Coulomb sono formulazioni diverse della stessa legge; la prima è una conseguenza diretta della seconda.

La legge di Coulomb consente di ricavare il campo una volta che siano note le cariche che lo creano

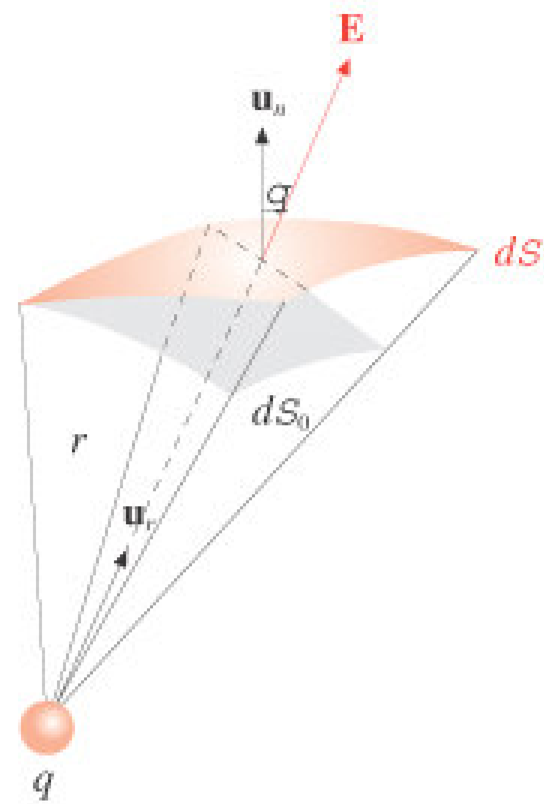
La legge di Gauss, se è noto il campo in tutti i punti di una regione dello spazio, consente di individuare posizione e valore di tutte le cariche contenute in quella regione

La legge di Gauss consente anche di ricavare il campo una volta che nota la distribuzione delle cariche, purchè questa abbia caratteristiche di simmetria tali che per ogni punto passi una superficie chiusa in tutti i punti della quale il campo sia costante e perpendicolare alla superficie stessa (**superficie gaussiana**)

Dimostrazione della legge di Gauss

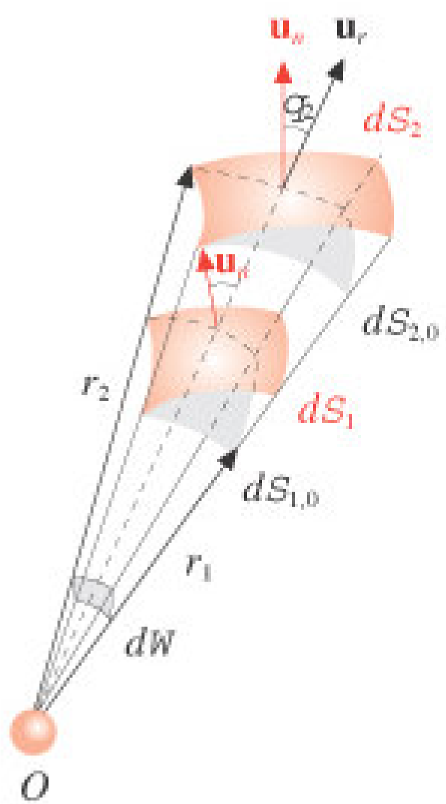
$$d\Phi\left(\vec{E}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_r\bullet\vec{u}_n d\Sigma}{r^2}=$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\Sigma\cos\theta}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\Sigma_0}{r^2}$$



$$\frac{d\Sigma_0}{r^2}$$

Per definizione rappresenta l'angolo solido sotto cui è visto dalla carica q il contorno di dΣ, per cui

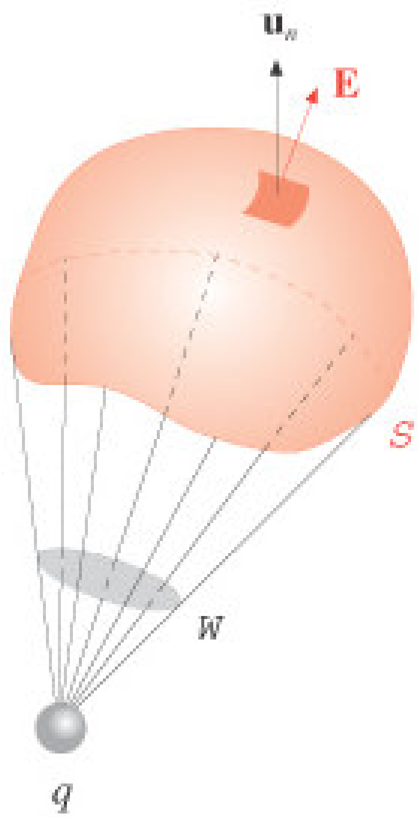


$$d\Phi\left(\vec{E}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

Dipende solo dall'angolo solido!!!!!

Il flusso attraverso una superficie finita è

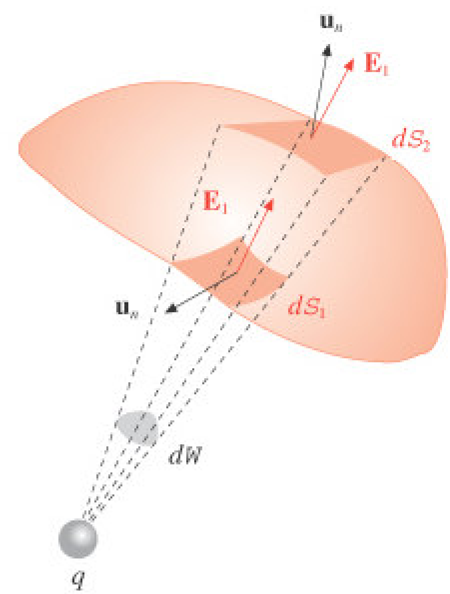
$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$$



Se la carica è interna

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Se la carica è esterna



$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega = 0$$

Il flusso totale attraverso una superficie chiusa del campo di una carica puntiforme q vale q/ε_0 se la carica è interna alla superficie, vale zero se la carica è esterna

Divergenza del campo elettrostatico

Il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie chiusa è uguale al all'integrale della divergenza del campo vettoriale esteso al volume τ racchiuso dalla superficie

$$\oint \vec{E} \bullet \vec{u}_r d\Sigma = \int_\tau \vec{\nabla} \bullet \vec{E}\, d\tau$$

La legge di Gauss diventa

$$\Phi\left(\vec{E}\right) = \int_{\tau} \vec{\nabla} \bullet \vec{E}\, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\tau} \rho d\tau$$

ovvero

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

Poiché

$$\vec{E} = \vec{\nabla} V$$

Otteniamo l'equazione di Poisson

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla} V = \vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Forma globale

Forma locale

$$\boxed{\oint_{\Sigma} \vec{E} \bullet \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho}$$

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}$$

Equazioni fondamentali del campo elettrostatico nel vuoto

Le proprietà del campo elettrostatico di non essere solenoidale e di essere conservativo sono una conseguenza:

1) della sovrapposizione lineare degli effetti delle cariche elettriche

2) della natura centrale della forza elettrostatica

3) della dipendenza di questa della sola distanza

Ma mentre le equazioni

$$\boxed{\oint \vec{E} \bullet d\vec{S} = 0}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}$$

sono del tutto indipendenti dal modo in cui la forza elettrostatica dipende dalla distanza, le equazioni

$$\boxed{\oint_{\Sigma} \vec{E} \bullet \vec{u}_n d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho}$$

Sono una conseguenza diretta della dipendenza della forza elettrostatica dall'inverso del quadrato della distanza