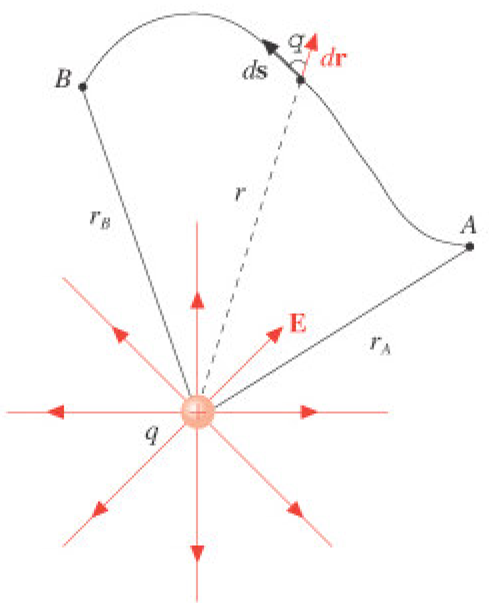
Potenziale elettrostatico

Lavoro della forza **F** per uno spostamento elementare d**s** della carica q_0 nel campo della carica puntiforme q

$$dW = q_0 \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{q\ q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u} \bullet d\vec{s}}{r^2} = \frac{q\ q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2}$$

Per uno spostamento da un punto A ad un punto B, caratterizzati dalle distanze r_A ed r_B, il lavoro è:

$$W = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$$



Il lavoro non dipende dal percorso seguito

Il campo elettrostatico è **conservativo**

Possiamo definire una funzione delle coordinate tale che

$$W = q_0 \int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{S} = q_0 \left(V_A - V_B \right)$$

Potenziale elettrostatico del campo **E**

Definito dalla:

$$\int_A^B \vec{E} \bullet d\vec{S} = \left(V_A - V_B\right)$$

$$\left(V_A - V_B\right) = d.d.p.$$

Il lavoro svolto dalla forza elettrica per portare q_0 da A a B è dato dal prodotto di q_0 per la d.d.p. tra A e B ovvero dal prodotto di q_0 per l'opposto della d.d.p. tra il punto di arrivo e il punto di partenza

$$W_{AB} = q_0(V_A - V_B) = -q_0 \Delta V$$

Per un qualsiasi percorso chiuso nella regione in cui è definito il campo E, essendo la d.d.p. nulla in quanto A≡B

$$f.e.m. = \oint \vec{E} \bullet d\vec{S} = 0$$

In un campo elettrostatico la f.e.m. è sempre eguale a zero

La proprietà del campo elettrostatico di essere **conservativo** è espressa in forma globale dall'integrale:

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{S} = 0$$

Dato un campo elettrostatico **E** di una carica puntiforme, il potenziale è determinato a meno di una costante:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + A$$

Porre la costante uguale a zero significa porre uguale a zero il potenziale all'infinito

$$V(r) = \int_r^{\infty} \vec{E} \bullet d\vec{S} = (V_r - V_{\infty}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Il potenziale in un punto ha il significato fisico di "**lavoro che compiono le forze del campo per trasportare una carica positiva unitaria da quel punto all'infinito**"

Distribuzioni continue di cariche

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\rho\, d\tau}{r}$$

volume

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\Sigma \frac{\sigma\, d\Sigma}{r}$$

superficie

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\lambda\, dl}{r}$$

linea

Energia potenziale

Consideriamo un corpo puntiforme carico con carica q posta in un campo elettrostatico di intensità **E**. Esso e soggetto alla forza elettrostatica

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Se è in equilibrio, è soggetto ad una forza esterna $\mathbf{F}_{\text{est}}$, per esempio di origine meccanica, uguale ed opposta a quella elettrostatica

$$\vec{F}_e = -\vec{F}$$

Se la carica viene spostata da un punto A ad un punto B il lavoro che compie la forza elettrostatica è:

$$W = q_0(V_A - V_B) = -q_0 \Delta V$$

Se si suppone che lo spostamento sia cosi lento che la forza esterna equilibri, istante per istante, quella elettrostatica, il lavoro W_{est} della prima è uguale ed opposto a quello della seconda

$$W_{est} = q_0 (V_B - V_A)$$

Se il movimento è talmente lento che la corpo carico non acquista alcuna energia cinetica, per il principio ci conservazione dell'energia esso deve aver aumentato la propria energia di una quantità:

$$W = W_{est} = q_0 \left(V_B - V_A \right)$$

pari al lavoro compiuto dalla forza esterna

Questa energia che dipende solo dalla posizione viene chiamata

energia potenziale elettrostatica

$$U_e(r) = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r} + A$$

Come per il potenziale si pone

$$U_e(\infty) = 0$$

$$U_e(r) = q_0 \int_r^{\infty} \vec{E} \bullet d\vec{S} = q_0 (V_r - V_\infty) = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

L’energia potenziale posseduta da una carica puntiforme q quando è posta in un punto di un campo elettrico misura il lavoro che compiono le forze del campo per trasportare la carica da quel punto all’infinito

Proprietà formali dell'operatore $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$$

E' un operatore differenziale lineare e come tale gode delle stesse proprietà formali di cui gode l'operatore di differenziazione totale

Per esempio il differenziale totale di una funzione φ (x, y, z)

$$d\phi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz$$

Il suo gradiente

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{\nabla}x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{\nabla}y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{\nabla}z =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{u}_z$$

Esempi e risultati utili

$$\vec{\nabla} x = \vec{u}_x$$

$$\vec{\nabla} y = \vec{u}_y$$

$$\vec{\nabla} z = \vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} r = \vec{u}_r$$

Calcolare il gradiente di una funzione a simmetria sferica $\varphi=\varphi(r)$

$$\vec{\nabla}\varphi(r)=\frac{d\varphi}{dr}\vec{\nabla}r=\frac{d\varphi}{dr}\vec{u}_r$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{\nabla}r=-\frac{1}{r^2}\vec{u}_r$$

La legge di Coulomb dà per il campo **E**(**r**) creato da una carica puntiforme q in un punto P avente vettore di posizione **r** rispetto al punto in cui è posta la carica q

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

Essendo

$$\frac{1}{r^2}\vec{u}_r = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Si può porre sotto la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r)$$

Ricaviamo:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

In coordinate polari piane il campo elettrostatico risulta:

$$\vec{E}(r,\theta) = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\vartheta$$

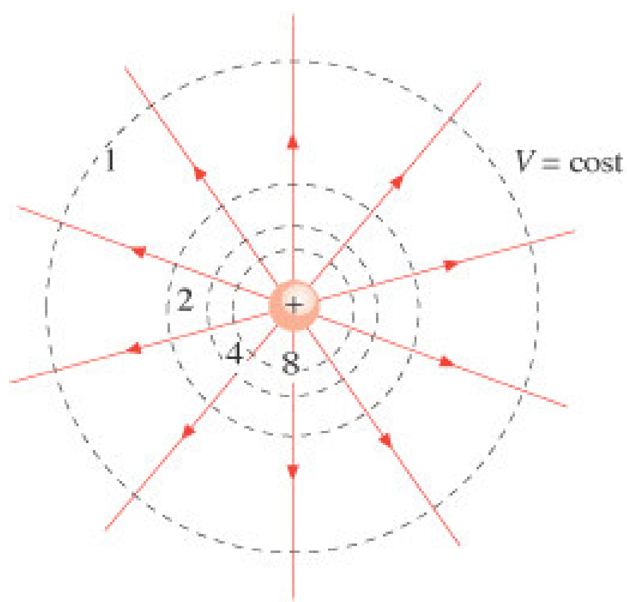
$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \qquad\qquad E_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Il campo elettrostatico di una carica puntiforme q deriva da un potenziale scalare V che è dato da:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + A$$

Superficie equipotenziali

Superficie dello spazio tridimensionale nei cui punti il potenziale ha lo stesso valore



Poichè

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r)$$

Le linee di forza risultano perpendicolari alle superfici equipotenziali e il campo, con il suo verso, indica il verso di massima diminuzione del potenziale

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r)$$

Questa espressione è valida per qualunque distribuzione di carica e risulta

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}$$

Questo vettore si chiama rotore di **E**

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\begin{vmatrix}\vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

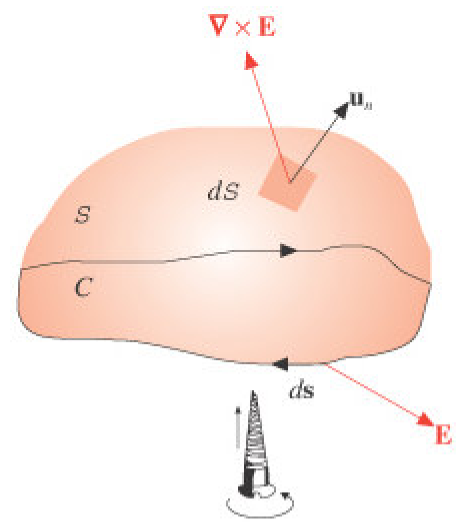
Si può quindi concludere che il campo elettrostatico di una qualunque distribuzione di carica è irrotazionale.

Esso è anche conservativo

Teorema di Stokes

La circuitazione di un campo vettoriale lungo una linea chiusa C è uguale al flusso del rotore del campo attraverso una qualunque superficie Σ avente per contorno C

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{s} = \int_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} \bullet u_n d\Sigma$$



$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{s} = \int_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} \bullet u_n d\Sigma$$

ma

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0$$

quindi

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{s} = 0$$

La proprietà del campo elettrostatico di essere conservativo è espressa in forma globale dall'integrale

$$\oint \vec{E} \bullet d\vec{S} = 0$$

che è esteso ad una qualunque linea chiusa

Per il teorema di Stokes, se S è una superficie qualunque avente per contorno la linea L si ha

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{s} = \int_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} \bullet u_n d\Sigma$$

e, per l'arbitrarietà della superficie S, deve quindi valere l'equazione locale

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

che esprime ancora la proprietà del campo elettrostatico di essere conservativo