



ADRIANA ARAUJO CINTRA

**SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM VARIEDADES LORENTZIANAS**

CAMPINAS

2014





UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística  
e Computação Científica

ADRIANA ARAUJO CINTRA

**SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM VARIEDADES LORENTZIANAS**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutora em matemática.

**Orientador: Francesco Mercuri**

**Coorientadora: Irene Ignazia Onnis**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELA ALUNA ADRIANA ARAUJO CINTRA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. FRANCESCO MERCURI.

**Assinatura do Orientador**

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Francesco Mercuri", is written over a horizontal line.

**Assinatura da Coorientadora**

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Irene Ignazia Onnis", is written over a horizontal line.

CAMPINAS  
2014

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

C493s Cintra, Adriana Araujo, 1985-  
Superfícies mínimas em variedades lorentzianas / Adriana Araujo Cintra. –  
Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Francesco Mercuri.

Coorientador: Irene Ignazia Onnis.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Superfícies mínimas. 2. Lie, Grupos de. 3. Geometria diferencial. I. Mercuri,  
Francesco, 1946-. II. Onnis, Irene Ignazia. III. Universidade Estadual de Campinas.  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Minimal surfaces in lorentzian manifolds

**Palavras-chave em inglês:**

Minimal surfaces

Lie groups

Differential geometry

**Área de concentração:** Matemática

**Titulação:** Doutora em Matemática

**Banca examinadora:**

Francesco Mercuri [Orientador]

Luiz Antonio Barrera San Martin

Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves

Martha Patrícia Dussan Angulo

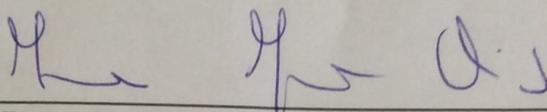
Luciano Mari

**Data de defesa:** 11-06-2014

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

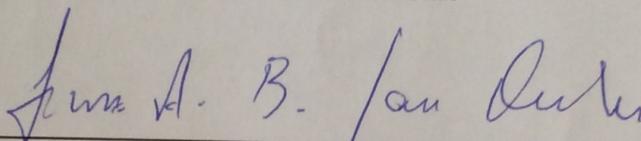
**Tese de Doutorado defendida em 11 de junho de 2014 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



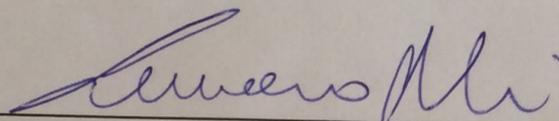
---

**Prof(a). Dr(a). IRENE IGNAZIA ONNIS**



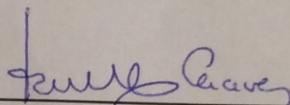
---

**Prof(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN**



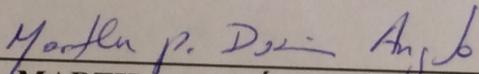
---

**Prof(a). Dr(a). LUCIANO MARI**



---

**Prof(a). Dr(a). ROSA MARIA DOS SANTOS BARREIRO CHAVES**



---

**Prof(a). Dr(a). MARTHA PATRÍCIA DUSSAN ANGULO**



## Abstract

In this thesis we study minimal surfaces immersed in Lorentzian manifolds. First, we develop a general version of the Weierstrass representation formula for timelike and spacelike minimal surfaces immersed in a  $n$ -dimensional Lorentzian manifold. A special treatment is presented for the case of a Lie group equipped with a left invariant Lorentzian metric. More specifically, we consider the case of the 4-dimensional Damek-Ricci space, Riemannian and Lorentzian. Applying the Weierstrass representation formula, we prove that there exists a unique solution to the Björling problem for timelike surfaces immersed in a Lorentzian Lie group, when the initial curve is a timelike or spacelike curve. Finally, we present some examples of minimal surfaces constructed via Björling problem for the cases in which the ambient manifolds, equipped with a left invariant Lorentzian metric, are the Heisenberg group, the De Sitter space, and the product of the hyperbolic plane and the real line.

**Keywords:** Minimal surfaces, Lorentzian manifolds, Weierstrass representation formula, Damek-Ricci spaces, Björling problem.

## Resumo

Nesta tese estudamos as superfícies mínimas imersas em variedades Lorentzianas. Desenvolvemos uma versão geral da fórmula da representação de Weierstrass para superfícies mínimas do tipo tempo e tipo espaço imersas em uma variedade Lorentziana  $n$ -dimensional. Um tratamento especial é apresentado para o caso em que a variedade é um grupo de Lie munido de uma métrica Lorentziana invariante à esquerda. Mais especificamente, tratamos o caso do espaço de Damek-Ricci 4-dimensional, Riemanniano e Lorentziano. Usando a fórmula da representação de Weierstrass mostramos que existe uma única solução do problema de Björling para superfícies imersas em grupo de Lie Lorentzianos. Por fim, apresentamos alguns exemplos de superfícies mínimas

---

construídas através do prolema de Björling para os casos em que os espaços ambientes, dotados de uma métrica Lorentziana invariante à esquerda, são o grupo de Heisenberg de dimensão três, o espaço de De Sitter e o espaço dado pelo produto do plano hiperbólico com a reta real.

**Palavras-chave:** Superfícies mínimas, variedades Lorentzianas, fórmula da representação de Weierstrass, espaços de Damek-Ricci, Problema de Björling.

# Sumário

Dedicatória	xi
Agradecimentos	xv
Introdução	1
<b>1 Variedades Lorentzianas</b>	<b>3</b>
1.1 Formas bilineares simétricas . . . . .	3
1.2 O espaço de Lorentz-Minkowski . . . . .	6
1.3 Variedades Semi-Riemannianas . . . . .	7
1.4 O tensor curvatura . . . . .	9
1.5 Existência de métricas Lorentzianas . . . . .	11
1.6 Superfícies de Riemann e de Lorentz . . . . .	14
<b>2 Subvariedades mínimas em variedades Lorentzianas</b>	<b>17</b>
2.1 Subvariedades em variedades semi-Riemannianas . . . . .	17
2.2 Fórmulas variacionais . . . . .	20
2.3 Caso de superfícies em variedades 3-dimensionais . . . . .	27
2.4 Gráficos Mínimos do tipo tempo em $\mathbb{L}^3$ . . . . .	34
2.4.1 Caso 1 - $z = f(x, y)$ . . . . .	34
2.4.2 Caso 2 - $x = f(y, z)$ . . . . .	39
<b>3 A representação de Weierstrass</b>	<b>47</b>
3.1 Superfícies mínimas no espaço de Lorentz-Minkowski . . . . .	48
3.2 Superfícies Mínimas em Variedades Lorentzianas . . . . .	50
3.2.1 A Representação de Weierstrass para o caso de grupos de Lie . . . . .	55

---

<b>4</b>	<b>Representação de Weierstrass para espaços de Damek-Ricci</b>	<b>63</b>
4.1	O caso Riemanniano . . . . .	63
4.1.1	O grupo $\mathbb{S}_4$ . . . . .	67
4.1.2	Exemplos . . . . .	71
4.2	Primeiro caso Lorentziano . . . . .	74
4.2.1	O grupo $\mathbb{S}_4^1$ . . . . .	78
4.2.2	Exemplos . . . . .	81
4.3	Segundo caso Lorentziano . . . . .	85
4.3.1	O grupo $\mathbb{S}_4^3$ . . . . .	86
4.3.2	Exemplos . . . . .	89
<b>5</b>	<b>O Problema de Björling</b>	<b>93</b>
5.1	Problema de Björling em grupos de Lie Lorentzianos 3-dimensionais . . . . .	94
5.1.1	Para superfícies do tipo tempo . . . . .	95
5.1.2	Para superfícies do tipo espaço . . . . .	99
5.2	Grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3$ . . . . .	100
5.3	O espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^3$ . . . . .	105
5.4	O grupo produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . . . . .	107
<b>A</b>	<b>Diferenciação paracomplexa</b>	<b>109</b>
A.0.1	Raízes quadrada de números paracomplexos . . . . .	113
<b>B</b>	<b>O Teorema de Cauchy-Kovalevskaya</b>	<b>117</b>
	<b>Referências</b>	<b>119</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>123</b>

*Aos meus pais, meus irmãos, minha sobrinha Yasmim,  
a minha madrinha Tita e ao meu namorado Júlio César.*



“Pode ser que um dia deixemos de nos falar...  
Mas, enquanto houver amizade,  
Faremos as pazes de novo.  
Pode ser que um dia o tempo passe...  
Mas, se a amizade permanecer,  
Um de outro se há-de lembrar.  
Pode ser que um dia nos afastemos...  
Mas, se formos amigos de verdade,  
A amizade nos reaproximará.  
Pode ser que um dia não mais existamos...  
Mas, se ainda sobrar amizade,  
Nascemos de novo, um para o outro.  
Pode ser que um dia tudo acabe...  
Mas, com a amizade construiremos tudo novamente,  
Cada vez de forma diferente.  
Sendo único e inesquecível cada momento  
Que juntos viveremos e nos lembraremos para sempre.  
Há duas formas para viver a sua vida:  
Uma é acreditar que não existe milagre.  
A outra é acreditar que todas as coisas são um milagre.”  
Albert Einstein



# Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado a oportunidade de estar nesse mundo, guiando e iluminando sempre meu caminho, colocando pessoas especiais minha vida que me ajudaram na conquista desse sonho.

A toda minha família, em especial aos meu pais, Brasil e Juliana, e a madrinha Tita por estarem sempre do meu lado me dando carinho e incentivo e aos meu irmãos, pelo apoio.

Ao meu orientador Dr. Francesco Mercuri pela sabedoria, compreensão e a minha coorientadora Dra. Irene Ignazia Onnis por todo empenho, amizade, sabedoria e compreensão e por serem um exemplo como orientadores e professores.

A meu namorado Júlio César Conegundes da Silva, amor da vida e grande companheiro, pelo carinho, amizade, paciência e por estar sempre ao lado.

A minha melhor amiga Dra. Lidiane Lima, irmã de coração, que me deu muita força durante toda minha vida pessoal e acadêmica, em especial pela paciência, carinho.

E as meus amigos Wender José de Souza, Cláudia Mesquita, Ana Paula Cruz de Freitas, Ailton Ribeiro, Alysso T. R. da Cunha, Apoenã Passos Passamani, Jordan Lambert Silva, Rafael Abreu dos Reis, Manuela, Maicon José, Tiago de Andrade e Débora Albanez pela amizade e conhecimento compartilhado.

Ao professor Dr. Paulo Régis C. Ruffino pelo apoio durante o doutorado.

Aos amigos e colegas de graduação, mestrado e doutorado que me apoiaram durante a minha vida acadêmica.

Aos professores e funcionários do IMECC/Unicamp.

E ao CNPq e a Capes pelo apoio financeiro.



# Lista de Ilustrações

1.1	Cone Temporal - caso $n = 2$ . . . . .	6
2.1	Superfície do tipo Scherk. . . . .	37
2.2	A superfície do Helicóide. . . . .	38
2.3	Superfície do tipo Scherk 2. . . . .	41
2.4	(a) Helicóide Lorentziano 1 e (b) Helicoide Lorentziano 2. . . . .	43
2.5	A superfície gráfico de $f(y, z) = \cosh(y + z)$ . . . . .	44
2.6	Catenóide hiperbólico Lorentziano. . . . .	45



# Símbolos

- $(\cdot, \cdot) : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{K}$  forma bilinear (para)complexa 52
- $\alpha(\cdot, \cdot)$  Segunda Forma fundamental 18
- $\Delta_s h$  Operador de Laplace-Beltrami de  $h$  19
- $\operatorname{div} Y$  Divergente de  $Y$  19
- $\mathcal{F}(M)$  espaço das funções diferenciáveis em  $M$  7
- $\Gamma_{ij}^k$  Símbolos de Christoffel 9
- $\mathcal{H}(M)$  espaço dos campos de vetores em  $M$  7
- $\mathbb{L}$  Álgebra dos números paracomplexos 109
- $\mathbb{L}^3$  Espaço de Lorentz-Minkowski 6
- $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{K}$  uma métrica (para)Hermitiana 53
- $\mathcal{H}^h$  vetor curvatura média-h em  $f$  50
- $\mathcal{N}(\sigma)$  Assinatura da Curvatura 11
- $\tau_h(f)$  Campo de Tensão de  $f$  50
- $\tau_p$  Cone Temporal 11
- $\times$  Produto Vetorial de Minkowski 6
- $\Upsilon$  métrica de energia 1 51
- $H(p)$  Vetor Curvatura Média de  $M$  em  $p$  19

---

$I_p$  Primeira forma fundamental de  $M$  em  $p$  28

$II$  métrica equiareal 51

$K_S(\sigma)$  Curvatura Seccional 10

$R(\cdot, \cdot)$  Tensor Curvatura 9

$Ric_M(\cdot, \cdot)(p)$  Curvatura de Ricci 10

$S(p)$  Curvatura Escalar 10

# Introdução

A Fórmula da representação de Weierstrass clássica fornece uma descrição das superfícies mínimas em espaços Euclidianos em termos de dados holomorfos. Portanto é uma ferramenta fundamental na construção de exemplos de tais superfícies. Além disso, é bastante importante no estudo de propriedades gerais de tais superfícies pois permite o uso da análise complexa, a qual é uma teoria muito bem desenvolvida.

Uma generalização de tal representação para superfícies mínimas em variedades Riemannianas foi obtida por F. Mercuri, S. Montaldo and P. Piu em [18].

No espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^3$ , ou seja, o espaço afim  $\mathbb{R}^3$  munido da métrica Lorentziana

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2,$$

um teorema do tipo representação de Weierstrass foi obtido em 1983 por Kobayashi [13] para as imersões mínimas do tipo espaço e em 2005 por Konderak [15] para superfícies do tipo tempo. Esses teoremas foram estendidos para superfícies mínimas em variedades Lorentzianas 3-dimensionais em [16].

No caso de variedades Riemannianas e/ou Lorentzianas, a condição de holomorfia é substituída pela condição que os dados são soluções de certas EDPs, que, na realidade, é a condição de holomorfia para uma estrutura complexa não padrão. Estas equações são, em geral, complicadas demais para que se espere obter soluções explícitas. No entanto para certas variedades ambiente, mais precisamente certos grupos de Lie, as equações são mais “amigáveis” e, com argumentos *ad hoc*, que dependem do espaço ambiente, é possível achar soluções explícitas e, portanto, construir exemplos (veja [14], [18]).

Neste trabalho pretendemos dar uma contribuição ao estudo das superfícies mínimas em variedades Lorentzianas, usando essencialmente a representação de Weierstrass para tais superfícies. Para isso organizamos a tese da maneira que segue:

No Capítulo 1, vamos falar sobre a geometria Lorentziana (veja [8], [21], [27]) e daremos algumas definições e propriedades, fazendo um paralelo com a Geometria Riemanniana, que serão utilizadas nos demais capítulos.

No Capítulo 2, calculamos a primeira e a segunda variação da área de uma subvariedade mínima imersa em uma variedade semi-Riemanniana  $n$ -dimensional. No caso de variedades tridimensionais concluiremos que as superfícies mínimas do tipo tempo são pontos críticos da função área e que a estabilidade de um domínio na superfície mínima depende da escolha da variação normal. Além disso, estudamos as superfícies mínimas do tipo tempo que são do tipo gráfico no espaço de Lorentz-Minkowski (veja [2])

No Capítulo 3, falaremos sobre a representação de Weierstrass e iremos construir a versão geral para superfícies mínimas em variedade Lorentziana e para o caso de grupos de Lie munidos de uma métrica invariante à esquerda Lorentziana.

No Capítulo 4, vamos desenvolver o Teorema da representação de Weierstrass para o espaço de Damek-Ricci Riemanniano e Lorentziano, que é um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo, cuja a álgebra de Lie é soma semi-direta da álgebra de Heisenberg com um espaço vetorial unidimensional, dotado de uma métrica invariante à esquerda. Além disso, este espaço pode ser visto como produto semi-direto do grupo de Heisenberg com um grupo de Lie unidimensional.

Finalmente, no Capítulo 5, vamos formular o problema de Björling para superfícies mínimas em grupos de Lie Lorentzianos 3-dimensionais da seguinte maneira:

Seja  $\beta : I \rightarrow M$  uma curva analítica e  $V : I \rightarrow TM$  um campo de vetores do tipo-espaço (respectivamente do tipo-tempo) unitário analítico ao longo de  $\beta$  e tal que  $g(\dot{\beta}, V) \equiv 0$ . O problema de Björling consiste em determinar uma superfície mínima do tipo-tempo (respectivamente do tipo-espaço)  $f : I \times (-\epsilon, \epsilon) = \Omega \subseteq \mathbb{K} \rightarrow M$  tal que

- i.  $f(u, 0) = \beta(u)$ ,
- ii.  $N(u, 0) = V(u)$ ,

para todo  $u \in I$ , onde  $N : \Omega \rightarrow TM$  é a aplicação normal de Gauss da superfície.

E mostraremos que este problema tem solução única. No caso de superfícies do tipo tempo consideraremos dois casos: quando  $\beta$  é uma curva do tipo tempo e chamaremos o problema correspondente de *Problema de Björling do tipo tempo*, e quando  $\beta$  é uma curva do tipo espaço e chamaremos de *Problema de Björling do tipo espaço*. Além disso, iremos apresentar alguns exemplos de superfícies mínimas construídas através do Teorema de Björling para o caso em que o espaço ambiente é o grupo de Heisenberg  $\mathbb{H}_3$ , o espaço de De Sitter  $\mathbb{S}_1^3$  e o espaço  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , dotados de uma métrica Lorentziana invariante à esquerda.

# Capítulo 1

## Variedades Lorentzianas

Neste capítulo iremos relembrar a definição e as propriedades das variedades semi-Riemannianas, em particular das variedades Lorentzianas, que são as variedades que possuem métrica cujo o índice é 1. Estas métricas são chamadas métricas Lorentzianas em homenagem ao físico Hendrik Lorentz e são muito utilizadas pelos físicos na teoria da Relatividade Geral, pois o espaço-tempo pode ser modelado como uma variedade de Lorentz 4-dimensional.

Além disso, relembraremos alguns resultados da geometria Riemanniana que podem ser generalizados na geometria semi-Riemanniana como, por exemplo, o Teorema de Levi-Civita. Também veremos que (veja Teorema 1.5.4), diferentemente da geometria Riemanniana, nem sempre podemos munir uma variedade diferenciável com uma métrica Lorentziana.

### 1.1 Formas bilineares simétricas

Seja  $\mathbb{E}$  um espaço vetorial real de dimensão finita e  $g : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear simétrica. Então  $g$  induz uma aplicação linear

$$\begin{aligned} \flat &:= \flat_g : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}^* \\ \flat(u)(v) &= g(u, v). \end{aligned}$$

Claramente

$$\ker \flat = \{u \in \mathbb{E} : g(u, w) = 0, \forall w \in \mathbb{E}\}. \quad (1.1.1)$$

**Definição 1.1.1.** A forma  $g$  é *não degenerada* ou um *produto escalar* se  $\ker \flat = \{0\}$ . Neste caso usaremos as notações:

$$\flat^{-1} = \sharp, \quad \langle u, v \rangle := g(u, v).$$

Os isomorfismos  $\flat$  e  $\sharp$  são frequentemente chamados de *isomorfismos musicais*.

**Definição 1.1.2.** Se  $L : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  é uma aplicação linear, diremos que  $L$  é uma *isometria* se

$$\langle L(u), L(v) \rangle = \langle u, v \rangle, \quad u, v \in \mathbb{E}.$$

Definimos também a forma quadrática associada a  $g$  e a  $g$ -norma por

$$q = q_g : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(v) = g(v, v),$$

$$\|v\| := \|v\|_g = |q(v)|^{\frac{1}{2}}.$$

A forma bilinear  $g$  pode ser recuperada a partir da forma quadrática usando a fórmula de interpolação:

$$g(u, v) = \frac{1}{2}(q(u + v) - q(u) - q(v)).$$

**Definição 1.1.3.** Seja  $\mathbb{E}$  um espaço vetorial real com produto escalar  $g$  e a forma quadrática  $q$  associada a  $g$ . Se  $v \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ , dizemos que

- $v$  é do *tipo espaço*, se  $q(v) > 0$ ,
- $v$  é do *tipo tempo*, se  $q(v) < 0$ ,
- $v$  é do *tipo luz*, se  $q(v) = 0$ .

**Observações 1.1.4.** No caso do vetor nulo não temos uma convenção consolidada. Ele será de um dos tipos acima quando claro no contexto.

**Definição 1.1.5.** Seja  $\mathbb{E}$  um espaço vetorial real com produto escalar.

- Diremos que  $v, w \in \mathbb{E}$  são *ortogonais* se  $\langle u, v \rangle = 0$ . Neste caso escreveremos  $v \perp w$ .
- Diremos que uma base de  $\mathbb{E}$ ,  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , é *ortonormal* se  $\langle e_i, e_j \rangle = \pm \delta_{ij}$ .
- Se  $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$  é um subespaço vetorial, definimos

$$F^\perp = \{v \in \mathbb{E} : \langle v, w \rangle = 0, \quad \forall w \in \mathbb{F}\}.$$

- Se  $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$  é um subespaço vetorial, diremos que  $\mathbb{F}$  é não degenerado se  $\mathbb{F} \cap \mathbb{F}^\perp = \{0\}$ , ou equivalentemente, se o produto escalar, restrito a  $\mathbb{F}$  é ainda um produto escalar.

Os fatos a seguir são simples e uma demonstração encontra-se, por exemplo, em [8].

**Lema 1.1.6.** Seja  $\mathbb{E}$  um espaço vetorial com produto escalar e  $\mathbb{F}$  um subespaço. Então:

## 1.1 Formas bilineares simétricas

---

1. O espaço  $\mathbb{E}$  admite uma base ortonormal.
2. O número de vetores de tipo tempo em uma base ortonormal não depende da base.
3.  $\dim \mathbb{F} + \dim \mathbb{F}^\perp = \dim \mathbb{E}$ .
4.  $(\mathbb{F}^\perp)^\perp = \mathbb{F}$ .
5.  $\mathbb{E} = \mathbb{F} + \mathbb{F}^\perp \Leftrightarrow \mathbb{F}$  é não degenerado e, neste caso, a soma é direta, pelo item 3.

**Definição 1.1.7.** O número de vetores do tipo tempo em uma base ortonormal se chama o *índice* do produto escalar.

**Definição 1.1.8.** Seja  $\mathbb{E}$  um espaço vetorial real.

- Um produto escalar de índice zero é dito uma *métrica Euclideana*.
- Um produto escalar de índice 1 é dito uma *métrica Lorentziana*.

Um espaço vetorial com uma métrica Lorentziana será chamado de *espaço Lorentziano*.

Seja  $\mathbb{E}$  um espaço Lorentziano. É simples de se ver que o conjunto dos vetores não nulos de tipo tempo tem duas componentes conexas, ambas convexas.

**Definição 1.1.9.** Um *cone temporal* é uma das componentes conexas dos vetores do tipo tempo. Uma *orientação temporal* é a escolha de um cone temporal.

**Exemplo 1.1.10.** O exemplo básico de espaço Lorentziano é o espaço  $\mathbb{R}^n$  com a métrica dada por:

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n.$$

Tal espaço será denotado por  $\mathbb{R}_1^n$ .

Se  $\mathbb{E}$  é um espaço Lorentziano, a escolha de uma base ortonormal equivale a escolha de uma isometria de  $\mathbb{E}$  com  $\mathbb{R}_1^n$ . Temos que os vetores nas retas  $r$  e  $s$  da Figura A.0.1 são do tipo-luz e temos duas regiões convexas de vetores do tipo tempo e duas de tipo espaço.

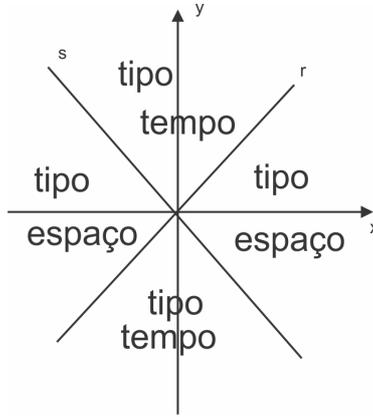


Figura 1.1: Cone Temporal - caso  $n = 2$ .

## 1.2 O espaço de Lorentz-Minkowski

O espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^3$  é o espaço  $\mathbb{R}^3$ , isto é,  $\mathbb{R}^3$  com o produto interno Lorentziano

$$\langle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3. \quad (1.2.1)$$

O produto vetorial de Minkowski entre os vetores  $u = (u_1, u_2, u_3)$  e  $v = (v_1, v_2, v_3)$  de  $\mathbb{L}^3$  é definido por

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & -\vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (1.2.2)$$

ou equivalentemente,

$$\langle u \times v, w \rangle = \det [u, v, w],$$

para todo  $w \in \mathbb{L}^3$ .

Observe que  $u \times v = -v \times u$ . Além disso, temos o seguinte

**Lema 1.2.1.** Sejam  $u, v, w, z \in \mathbb{L}^3$ . Vale que

### 1.3 Variedades Semi-Riemannianas

---

- i.  $\langle u \times v, w \times z \rangle = \langle u, z \rangle \langle v, w \rangle - \langle u, w \rangle \langle v, z \rangle,$
- ii.  $(u \times v) \times w = \langle v, w \rangle u - \langle u, w \rangle v.$

*Demonstração.*

- i. Observe primeiramente que

$$\langle u \times v, x \rangle \langle w \times z, y \rangle = \det[u, v, x] \det[w, z, y] = - \begin{vmatrix} \langle u, w \rangle & \langle u, z \rangle & \langle u, y \rangle \\ \langle v, w \rangle & \langle v, z \rangle & \langle v, y \rangle \\ \langle x, w \rangle & \langle x, z \rangle & \langle x, y \rangle \end{vmatrix}.$$

Logo, tomando  $y = u \times v$ , temos que

$$\langle u \times v, x \rangle \langle w \times z, u \times v \rangle = \langle u, z \rangle \langle v, w \rangle \langle x, u \times v \rangle - \langle u, w \rangle \langle v, z \rangle \langle x, u \times v \rangle,$$

para todo  $x \in \mathbb{L}^3$ . Assim podemos tomar  $x$  de maneira que  $\langle u \times v, x \rangle \neq 0$ . Portanto, temos o desejado.

- ii. Usando o item i. resulta que

$$\begin{aligned} \langle (u \times v) \times w, z \rangle &= \det[u \times v, w, z] = \det[w, z, u \times v] \\ &= \langle w \times z, u \times z \rangle = \langle u, z \rangle \langle v, w \rangle - \langle u, w \rangle \langle v, z \rangle \\ &= \langle \langle v, w \rangle u - \langle u, w \rangle v, z \rangle, \end{aligned}$$

para todo  $z \in \mathbb{L}^3$ . Logo, temos o desejado. □

Observem que as fórmulas do Lema 1.2.1 são as fórmulas do caso Euclideano a menos de sinal.

### 1.3 Variedades Semi-Riemannianas

Nesta seção vamos discutir fatos básicos de geometria semi-Riemanniana, que generalizam os correspondentes em geometria Riemanniana. Referiremos a [8], [11] e [21] para as demonstrações.

Seja  $M$  uma variedade diferenciável. Denotaremos com  $\mathcal{F}(M)$  o espaço das funções diferenciáveis em  $M$  e com  $\mathcal{H}(M)$  o espaço dos campos de vetores (diferenciáveis) em  $M$ .

**Definição 1.3.1.** Uma *métrica semi-Riemanniana* em  $M$  é uma lei que associa a cada espaço tangente  $T_pM$ ,  $p \in M$ , um produto escalar  $g_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  que depende diferenciavelmente de  $p$ . Isso significa que, dados campos  $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ , a função que associa a  $p \in M$  o número real  $g_p(X(p), Y(p))$  é uma função diferenciável.

Uma variedade com uma métrica semi-Riemanniana fixada será chamada de uma *variedade semi-Riemanniana*.

Se  $g$  é uma métrica semi-Riemanniana em  $M$  e o índice de  $g_p$  não depende de  $p$ , este será chamado de índice de  $g$ . É simples ver que isso acontece, por exemplo, se  $M$  for conexa.

**Definição 1.3.2.** Seja  $(M, g)$  uma variedade semi-Riemanniana. Então  $M$  é dita

- *Riemanniana*, se o índice de  $g$  é 0,
- *Lorentziana*, se o índice de  $g$  é 1.

Analogamente ao caso Riemanniano temos uma (única) conexão de Levi-Civita associada a uma métrica semi-Riemanniana, isto é, uma única aplicação  $\mathbb{R}$ -bilinear

$$\nabla : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$$

tal que

- $\nabla_{fX}Y = f\nabla_XY$ ,  $\nabla_XfY = X(f)Y + f\nabla_XY$ ,  $\forall f \in \mathcal{F}(M)$ ,  $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ ,
- $\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y]$ ,
- $Xg(Y, Z) = g(\nabla_XY, Z) + g(Y, \nabla_XZ)$ ,  $\forall X, Y, Z \in \mathcal{H}(M)$ .

A partir da conexão (ou derivada covariante) podemos então, como no caso Riemanniano, definir:

- o conceito de derivada covariante de campos de vetores ao longo de uma curva (denotada por  $\frac{\nabla}{dt}$ ),
- o transporte paralelo ao longo de uma curva diferenciável por partes (que, como no caso Riemanniano, resulta ser uma isometria entre os espaços tangentes nos pontos inicial e final da curva),
- geodésicas como curvas cujo campo de vetores tangentes é paralelo,
- a aplicação exponencial  $\exp_p : T_pM \rightarrow M$ .

## 1.4 O tensor curvatura

---

Se  $(x_1, \dots, x_n)$  são coordenadas locais em um aberto  $U \subseteq M$ , a métrica semi-Riemanniana  $g$  é dada, em termos das coordenadas, pela seguinte matriz com entradas em  $\mathcal{F}(U)$ :

$$g = [g_{ij}] := [g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})],$$

e a conexão em termos dos símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  definidos pela relação

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

**Definição 1.3.3.** Seja  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  uma curva regular. A curva  $\beta$  é dita do *tipo espaço* (respectivamente do *tipo tempo*, *tipo luz*) se  $\beta'(t)$  é do tipo espaço (respectivamente do tipo tempo, tipo luz), para todo  $t \in I$ .

## 1.4 O tensor curvatura

**Definição 1.4.1.** Seja  $(M, g)$  uma variedade semi-Riemanniana com a conexão de Levi-Civita  $\nabla$ . A função  $R : \mathcal{H}(M)^3 \rightarrow \mathcal{H}(M)$  dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad (1.4.1)$$

é um campo de tensor de tipo  $(1, 3)$ , chamado *tensor curvatura* de  $M$ .

Analogamente ao caso Riemanniano podemos definir as componentes em coordenadas locais do tensor curvatura.

**Proposição 1.4.2.** Em uma vizinhança coordenada de um sistema de coordenadas  $\{x_1, \dots, x_n\}$  de uma variedade semi-Riemanniana  $M$  (de dimensão  $n$ ) temos que o tensor curvatura é dado por

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n R_{jkl}^i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial x_k} + \sum_{m=1}^n \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m - \sum_{m=1}^n \Gamma_{km}^i \Gamma_{lj}^m.$$

**Proposição 1.4.3.** Sejam  $X, Y, Z, W \in \mathcal{H}(M)$ . Definimos

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W).$$

Então, valem as seguintes propriedades

1.  $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$ ,
2.  $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$ ,
3.  $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$ ,
4.  $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$ , (primeira Identidade de Bianchi),
5.  $(\nabla_Z R)(X, Y) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_X R)(Y, Z) = 0$ , (segunda Identidade de Bianchi).

**Definição 1.4.4.** A *curvatura de Ricci* e a *curvatura escalar* são definidas por

$$\begin{aligned} Ric_M(Y, Z)(p) := \text{tr } R(\cdot, Y(p))Z(p) &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} g \left( R \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, Y(p) \right) Z(p), \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} R \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, Y(p), Z(p), \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) \end{aligned}$$

e

$$S(p) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(p) Ric \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right),$$

respectivamente, onde  $Y, Z \in \mathcal{H}(M)$  e  $p \in M$ .

**Observação 1.4.5.** Estamos usando a notação  $g^{ij}$  para o elemento  $ij$  da matriz inversa,  $g^{-1}$ .

Se  $g$  é uma métrica Riemanniana e  $\sigma \subseteq T_p M$  é um plano no espaço tangente a  $M$  em  $p$  com base  $\{u, v\}$ , a *curvatura seccional* de  $\sigma$  é definida por

$$K_S(\sigma) = \frac{R(u, v, u, v)}{g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2}, \quad (1.4.2)$$

a qual é independente da escolha da base  $\{u, v\}$  de  $\sigma$ . No caso em que  $g$  é uma métrica semi-Riemanniana (1.4.2) faz sentido desde que o plano  $\sigma$  seja *não degenerado*.

Seja

$$Q(u, v) = g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2.$$

Temos que

$$Q(u, v) = \begin{cases} > 0 & \text{se e somente, se } g|_{\sigma} \text{ é definida,} \\ = 0 & \text{se e somente, se } g|_{\sigma} \text{ é degenerada,} \\ < 0 & \text{se e somente, se } g|_{\sigma} \text{ é indefinida.} \end{cases} \quad (1.4.3)$$

## 1.5 Existência de métricas Lorentzianas

---

Observe que o sinal do numerador em (1.4.2) independente da escolha da base uma vez que  $R(u, v, v, u)$  é um tensor e satisfaz a Proposição 1.4.3. Assim, se  $\sigma$  é degenerado, definimos a *assinatura da curvatura* como sendo

$$\mathcal{N}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } R(u, v, u, v) > 0, \\ 0 & \text{se } R(u, v, u, v) = 0, \\ -1 & \text{se } R(u, v, u, v) < 0. \end{cases} \quad (1.4.4)$$

**Definição 1.4.6.** Seja  $\sigma \subseteq T_p M$  um plano tangente com base  $\{u, v\}$ .

1. Se  $\sigma$  é não degenerado, definimos a curvatura seccional  $K_S(\sigma)$  usando (1.4.2).
2. Se  $\sigma$  é degenerado, definimos a assinatura de sua curvatura seccional  $\mathcal{N}(\sigma)$  usando (1.4.4).

Assim como no caso Riemanniano as curvaturas seccionais  $K_S(\sigma)$ , para todo plano não degenerado tangente a  $p$ , e a assinatura nos planos degenerados, determinam o valor do tensor curvatura  $R$  em  $p$ . A demonstração pode ser encontrada em [8].

## 1.5 Existência de métricas Lorentzianas

É bem conhecido o resultado que garante que qualquer variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana. Isso não acontece para métricas Lorentzianas e, de fato, temos obstruções á existência de tais métricas. Para explicar tais obstruções, vamos começar introduzindo o conceito de orientação temporal.

**Definição 1.5.1.** Seja  $M$  uma variedade Lorentziana. Uma *orientação temporal* em  $M$  é a escolha de um cone temporal  $\tau_p \subset T_p M$  em cada espaço tangente, que depende diferenciavelmente de  $p \in M$ . Isso significa que para todo  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $U_p \subset M$  de  $p$  e um campo não nulo do tipo tempo  $X \in \mathcal{H}(U_p)$  tal que  $X(q) \in \tau_q$ , para todo  $q \in U_p$ . Além disso

1. se existir uma orientação temporal diremos que  $M$  é *t-orientável*,
2. se  $M$  é t-orientável e uma t-orientação for fixada, diremos que  $M$  é t-orientada.

**Proposição 1.5.2.** Uma variedade Lorentziana é t-orientável, se e somente se, existe um campo vetorial globalmente definido  $X \in \mathcal{H}(M)$  tal que  $g(X, X) < 0$ , isto é,  $X$  é tipo tempo.

*Demonstração.* Se existir um campo  $X \in \mathcal{H}(M)$  tal que  $g(X, X) < 0$ , dado  $p \in M$  escolhamos o cone temporal  $\tau_p \subset T_p M$  que contem  $X(p)$ .

Vamos mostrar a recíproca. Se  $M$  é t-orientável, então para cada  $p \in M$  podemos escolher um cone temporal  $\tau_p \subset T_p M$  que depende diferenciavelmente de  $p$ . Isto é, para todo  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $U_p \subset M$  de  $p$  e um campo não nulo do tipo tempo  $X \in \mathcal{H}(U_p)$  que satisfaz a Definição 1.5.1.

Seja  $\{\mu_i; i \in \mathbb{N}\}$  uma partição da unidade subordinada à cobertura aberta  $\{U_p; p \in M\}$  de  $M$ , isto é,

- a)  $\mu_i : M \rightarrow [0, 1]$  é uma função diferenciável.
- b)  $\{\text{Supp } \mu_i\}$  é um recobrimento de  $M$  localmente finito.
- c) O conjunto  $\text{Supp } \mu_i$  está contido em algum aberto  $U_{p_i}$  da cobertura.
- d)  $\sum_i \mu_i(x) = 1, \forall x \in M$ .

Seja  $X_i$  o campo de vetores do tipo tempo correspondente a  $U_i$ . Definimos

$$X = \sum_i \mu_i X_i.$$

Como os cones temporais  $\tau_p$  são convexos, temos que

$$\sum_i \mu_i X_i(p_i) \in \tau_{p_i},$$

pois  $X_i(p_i) \in \tau_{p_i}$ . Portanto  $X$  está globalmente definido,  $X(p) \in \tau_p$ , para todo  $p \in M$ , e  $g(X, X) < 0$ .  $\square$

**Observação 1.5.3.** No caso de variedades diferenciáveis a orientabilidade é uma propriedade que depende somente da topologia da variedade. No caso Lorentziano a t-orientabilidade é uma propriedade que depende da métrica. De fato, como veremos no Teorema 1.5.4, se uma variedade admite uma métrica Lorentziana ela admite também uma métrica Lorentziana t-orientável, possivelmente diferente da primeira.

**Teorema 1.5.4** ([8]). Seja  $M$  uma variedade diferenciável conexa. Então as seguintes condições são equivalentes:

- i)  $M$  admite uma métrica Lorentziana.
- ii)  $M$  admite uma métrica Lorentziana com orientação temporal.

## 1.5 Existência de métricas Lorentzianas

---

iii)  $M$  admite um campo de vetores  $X$  sem zeros.

iv) Ou  $M$  não é compacta ou a sua característica de Euler  $\chi(M)$  é zero.

*Demonstração.* a) Observemos que obviamente ii) implica i).

b) Vamos mostrar que iii) implica ii). Como  $M$  é uma variedade diferenciável, então admite uma métrica Riemanniana  $g_R$ . Além disso  $M$  possui um campo de vetores  $X$  sem zeros. Então podemos definir

$$g_L(Y, Z) = g_R(Y, Z) - \frac{2g_R(X, Y)g_R(X, Z)}{g_R(X, X)}, \quad (1.5.1)$$

com  $Y, Z \in \mathcal{H}(M)$ . Vamos mostrar que  $g_L$  é uma métrica Lorentziana.

Primeiramente, temos que  $g_L$  é uma forma bilinear e simétrica pois  $g_R$  o é. Além disso,  $g_L$  é não degenerada. De fato, seja  $V \in \ker(g_L)$ , então  $g_L(V, W) = 0$ , para todo  $W \in \mathcal{H}(M)$ . Em particular para  $W = X$ . Logo

$$0 = g_L(V, X) = g_R(V, X) - \frac{2g_R(X, V)g_R(X, X)}{g_R(X, X)} = -g_R(V, X).$$

Consequentemente,  $V$  é ortogonal a  $X$ . Dessa forma  $g_L(V, W) = g_R(V, W)$ . Assim  $V \in \ker g_R = \{0\}$ . Portanto,  $g_L$  é não degenerada.

Seja  $p \in M$  e  $\{u, v_1, \dots, v_n\}$  uma base ortonormal de  $T_p M$ , onde

$$u = \frac{X(p)}{\sqrt{g_R(X(p), X(p))}}.$$

Logo:

- $g_L(u, u) = -g_R(u, u) = -1$ . Logo  $u$  é do tipo tempo.
- $g_L(u, v_i) = 0$ , para  $i = 1, \dots, n$ .
- $g_L(v_i, v_j) = g_R(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ . Logo, cada  $v_i$  é do tipo-espaço.

Então o índice de  $g_L$  é 1. Portanto  $g_L$  é uma métrica Lorentziana.

Observamos que  $g_L(X, X) = -g_R(X, X) < 0$ . Assim  $X$  é um campo do tipo-tempo. Portanto pela Proposição 1.5.2 temos que  $M$  é t-orientável.

c) A equivalência entre iii) e iv) é um clássico da topologia algébrica e pode ser encontrado em [26].

d) Vamos mostrar que i) implica iv). Seja  $M$  uma variedade Lorentziana compacta.

Se  $M$  é t-orientável então pela Proposição 1.5.2 temos que  $M$  possui um campo de vetores sem zeros, ou seja, sem singularidades. Portanto, se  $M$  for compacta, a característica de Euler de  $M$  é zero.

Se  $M$  não é t-orientável, então existe um recobrimento duplo  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  t-orientável. Portanto  $\chi(\tilde{M}) = 0$ . Mas  $\chi(\tilde{M}) = 2\chi(M)$ . Ou seja  $\chi(M) = 0$ .

□

## 1.6 Superfícies de Riemann e de Lorentz

Seja  $M$  uma superfície, isto é, uma variedade 2-dimensional e  $g$  uma métrica Riemanniana. É bem conhecido que para todo  $p \in M$  existe uma carta local  $\varphi_p : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \rightarrow M$  tal que  $p \in \varphi_p(\Omega)$  e  $\varphi_p^*g = \lambda(dx^2 + dy^2)$ , onde  $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função positiva. Uma tal carta é chamada isotérmica. Dadas duas cartas isotérmicas, a mudança de coordenadas é, onde definida, uma aplicação conforme entre abertos de  $\mathbb{C}$ , portanto holomorfa se preserva orientação e anti-holomorfa se inverte orientação. Em particular se  $M$  é orientável, ela admite um atlas holomorfo.

**Definição 1.6.1.** Uma *superfície de Riemann* é um par constituído de uma superfície  $M$  e uma classe de métricas Riemannianas conformes.

Queremos agora introduzir conceitos análogos para o caso de métricas Lorentzianas. Seja  $M$  uma superfície e  $g$  uma métrica Lorentziana em  $M$ .

**Proposição 1.6.2** ([27]). Dado  $p \in M$ , existe uma carta local  $\varphi_p : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \rightarrow M$ , com  $p \in \varphi_p(\Omega)$ , tal que  $\varphi_p^*g = 2Bdx dy$ , onde  $B$  é uma função positiva. Essas coordenadas são ditas *coordenadas nulas*.

*Demonstração.* Em alguma vizinhança  $U$  de  $p \in M$  escolha campos linearmente independentes  $X, Y$  tais que  $q(X) = q(Y) = 0$ . É bem conhecido que existem funções  $\lambda, \mu > 0$  de classe  $C^\infty$  tais que  $[\lambda X, \mu Y] = 0$ . Podemos portanto assumir que  $[X, Y] = 0$ . Pelo Teorema de Frobenius existe uma carta local  $\varphi_p : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \rightarrow M$  tal que  $d\varphi_p(\frac{\partial}{\partial x}) = X$  e  $d\varphi_p(\frac{\partial}{\partial y}) = Y$ . Logo,

$$\begin{aligned}\varphi_p^*g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right) &= g(X, X) = 0, \\ \varphi_p^*g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) &= g(X, Y) = B, \\ \varphi_p^*g\left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right) &= g(Y, Y) = 0.\end{aligned}$$

## 1.6 Superfícies de Riemann e de Lorentz

---

Portanto  $\varphi_p^*g = 2B dx dy$ , onde  $B > 0$ . □

**Teorema 1.6.3.** Seja  $(M, g)$  uma superfície Lorentziana e  $p \in M$ . Então em alguma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$  existem coordenadas  $\{u, v\}$  em termos das quais a métrica  $g$  é dada por  $B(du^2 - dv^2)$  sobre  $U$ , onde  $B > 0$ .

*Demonstração.* Pelo Proposição 1.6.2, existem coordenadas locais  $x, y$  em alguma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que a métrica  $g$  é dada por  $g = 2B dx dy$ , onde  $B > 0$ . Agora tome as coordenadas

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \quad \text{e} \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y).$$

Portanto,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{cases} \quad (1.6.1)$$

Logo  $g = B(du^2 - dv^2)$ . □

**Observação 1.6.4.** Analogamente ao caso Riemanniano temos que em um aberto  $U_0 \subset \mathbb{R}^2$  no qual coordenadas isotérmicas  $\{u, v\}$  e  $\{x, y\}$  estão definidas, a mudança de variável é  $\mathbb{L}$ -diferenciável se preserva orientação e anti- $\mathbb{L}$ -diferenciável se inverte orientação.

De fato, seja  $f : U_0 \rightarrow M$  uma parametrização de  $M$ . Temos que  $g = \alpha(du^2 - dv^2)$  e  $\hat{g} = \beta(dx^2 - dy^2)$ , onde  $\alpha, \beta > 0$ . Como

$$\begin{cases} f_x = f_u u_x + f_v v_x, \\ f_y = f_u u_y + f_v v_y, \end{cases} \quad (1.6.2)$$

então

$$\begin{cases} \beta = \alpha(u_x^2 - v_x^2) \\ 0 = u_x u_y - v_x v_y \\ -\beta = \alpha(u_y^2 - v_y^2). \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} u_x^2 - v_x^2 = -(u_y^2 - v_y^2), \\ 0 = u_x u_y - v_x v_y. \end{cases} \quad (1.6.3)$$

Assim temos que

$$\frac{u_x}{v_y} = \frac{v_x}{u_y}$$

e

$$u_x^2 - v_x^2 = \frac{u_x^2}{v_y^2} v_y^2 - \frac{v_x^2}{u_y^2} u_y^2 = \left( \frac{u_x}{v_y} \right)^2 (v_y^2 - u_y^2).$$

Por outro lado, como  $u_x$  e  $v_x$  satisfazem (1.6.3), então

$$\left( \frac{v_x}{u_y} \right)^2 = 1.$$

Além disso, podemos escrever

$$\det \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \frac{v_x}{u_y} (v_y^2 - u_y^2),$$

em que  $v_y^2 - u_y^2 > 0$ . Portanto se a mudança preserva a orientação,  $\frac{v_x}{u_y} = 1$  e, conseqüentemente,

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = v_x. \end{cases}$$

Logo a mudança é  $\mathbb{L}$ -diferenciável. Se a mudança de variável inverte a orientação, então  $\frac{v_x}{u_y} = -1$ , ou seja a mudança é anti- $\mathbb{L}$ -diferenciável.

**Definição 1.6.5.** Uma *superfície de Lorentz* é um par constituído de uma superfície  $M$  e uma classe de métricas Lorentzianas conformes.

**Observação 1.6.6.** O Teorema de uniformização garante que uma superfície de Riemann simplesmente conexa é conformemente equivalente a um dos modelos padrões, i.e, a esfera  $\mathbb{S}^2$ , a reta complexa  $\mathbb{C}$ , ou ao disco  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . Observamos explicitamente que  $\mathbb{C}$  e  $D$  são difeomorfos mas *não* bi-holomorfos pois, pelo Teorema de Liouville, uma aplicação holomorfa  $f : \mathbb{C} \rightarrow D$  é necessariamente constante.

No caso Lorentziano a situação é completamente diferente. De fato, pode se mostrar que existem infinitas superfícies de Lorentz simplesmente conexa, não conformemente equivalentes (veja [19]).

## Capítulo 2

# Subvariedades mínimas em variedades Lorentzianas

Neste capítulo iremos calcular a primeira e a segunda variação da área para uma subvariedade mínima de uma variedade semi-Riemanniana. Veremos que, assim como no caso Riemanniano, uma subvariedade mínima é um ponto crítico para a função área para qualquer variação normal. Particularmente, para o caso de superfícies do tipo tempo imersas em variedades tridimensionais estudamos a segunda variação para determinar se esta superfície é mínimo, máximo ou sela para a função área. Concluiremos que superfícies mínimas do tipo tempo são pontos de sela para o funcional da área.

Além disso, estudamos as superfícies mínimas do tipo tempo que são do tipo gráfico no espaço de Lorentz-Minkowski. Concluímos que o helicóide não é a única superfície mínima regrada do tipo-tempo em  $\mathbb{L}^3$  e que Teorema de Bernstein não é válido no espaço de Lorentz  $\mathbb{L}^3$ , pois encontramos outras superfícies mínimas do tipo-tempo que são completas e gráficos que não são planos.

Alguns dos resultados acima, em particular as formas variacionais, podem ser encontrados em [2].

### 2.1 Subvariedades em variedades semi-Riemannianas

Seja  $\overline{M}^n$  uma variedade semi-Riemanniana munida da métrica  $g$ ,  $M^k$  uma variedade diferenciável e  $f : M^k \rightarrow \overline{M}^n$  uma imersão. O sobrescritos denotam as respectivas dimensões e serão omitidos quando claro do contexto.

**Definição 2.1.1.** Diremos que  $f$  é não degenerada se  $f^*g$  for não degenerada.

## 2. Subvariedades mínimas em variedades Lorentzianas

Se  $f$  é não degenerada, a forma bilinear  $f^*g$  define uma métrica semi-Riemanniana em  $M$ , tal que  $f$  é uma imersão isométrica.

**Assumiremos, daqui adiante, que  $f$  seja não degenerada.**

Sendo  $f$  localmente um mergulho podemos identificar, localmente,  $M$  com  $f(M)$  e assim o faremos em todos os argumentos de caracter local. Denotaremos com  $\bar{\nabla}$  a conexão de Levi Civita de  $\bar{M}$  e com  $\nabla$  a de  $M$ . Pelo Lema 1.1.6 temos a decomposição ortogonal

$$T_p\bar{M} = T_pM \oplus [T_pM]^\perp, \quad p \in M$$

e portanto, se  $X, Y \in \mathcal{H}(M)$ , temos

$$\bar{\nabla}_Y X = [\bar{\nabla}_Y X]^\top + [\bar{\nabla}_Y X]^\perp.$$

É fácil ver que o operador  $[\bar{\nabla}_Y X]^\top$  verifica as propriedades da conexão de Levi-Civita de  $M$ , portanto,  $\nabla_Y X = [\bar{\nabla}_Y X]^\top$ . Além disso, a aplicação

$$\alpha : \mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M) \longrightarrow \mathcal{H}(M), \quad \alpha(X, Y) := [\bar{\nabla}_Y X]^\perp$$

é simétrica e  $\mathcal{F}(M)$ -bilinear.

**Definição 2.1.2.** A aplicação  $\alpha$  é chamada de *segunda forma fundamental de  $M$*  (ou, melhor, de  $f$ ).

Seja  $N : M \longrightarrow T\bar{M}$  um *campo normal* ao longo de  $M$ , isto é,  $N(p) \in [T_pM]^\perp$ , e  $p \in M$ ,  $X \in \mathcal{H}(M)$ . Temos a decomposição ortogonal

$$\bar{\nabla}_X N(p) = -A_N X(p) + \nabla_X^\perp N(p),$$

onde  $A_N : T_pM \longrightarrow T_pM$  é uma aplicação linear simétrica, para cada  $p \in M$ , caracterizada por

$$g(A_N X, Y) = g(\alpha(X, Y), N). \tag{2.1.1}$$

Seja  $\{e_1, \dots, e_k\}$  um referencial local ortonormal de  $T_pM$ ,  $p \in M$ .

**Definição 2.1.3.** A *norma ao quadrado* da segunda forma fundamental em  $p \in M$  é definida por

$$|\alpha|^2 = \sum_{i,j=1}^k \varepsilon_i \varepsilon_j g(\alpha(e_i, e_j), \alpha(e_i, e_j)), \tag{2.1.2}$$

onde  $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ .

## 2.1 Subvariedades em variedades semi-Riemannianas

---

É fácil ver que a definição não depende da escolha da base.

**Definição 2.1.4.** Seja  $p \in M$ . Então, definimos o *vetor curvatura média*  $H(p)$  de  $M$  em  $p$  por

$$H(p) = \text{tr}_g \alpha(p) = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \alpha(e_i, e_i), \quad (2.1.3)$$

onde  $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ . Dizemos que  $M$  é uma subvariedade *mínima* se  $H(p) = 0$ ,  $\forall p \in M$ .

Seja  $M$  uma variedade semi-Riemanniana com métrica  $s$  e conexão de Levi Civita  $\nabla$ . Se  $h \in \mathcal{F}(M)$ , o *gradiente* de  $h$ ,  $\nabla h$ , é definido pela identidade

$$s(\nabla h, Y) = df(Y), \quad \forall Y \in \mathcal{H}(M).$$

Dado  $Y \in \mathcal{H}(M)$ , consideramos a aplicação linear  $L : T_p M \rightarrow T_p M$ ,  $L(X) = \nabla_X Y$ . O *divergente* de  $Y$  é definido como

$$\text{div } Y = \text{tr}_s(L),$$

onde o traço é em relação a métrica  $s$ . Pode-se verificar que o divergente satisfaz a Regra de Leibniz

$$\text{div } fX = f \text{div } X + h(\nabla f, X).$$

Seja  $h \in \mathcal{F}(M)$ . A partir do gradiente e da divergência, podemos definir o *operador de Laplace-Beltrami*,  $\Delta_s h$ , como

$$\Delta_s h = \text{div } \nabla h.$$

**Observação 2.1.5.** Vamos supor que o referencial  $\{e_1, \dots, e_k\}$  seja um referencial ortonormal geodésico em um ponto  $p \in M$ , isto é,  $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$ ,  $i, j = 1, \dots, k$ . Dados  $X \in \mathcal{H}(M)$ ,  $h \in \mathcal{F}(M)$ , temos:

$$\text{div } X(p) = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i s(\nabla_{e_i} X, e_i), \quad \nabla h(p) = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i e_i(f) e_i, \quad \Delta_s h(p) = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i e_i(e_i f).$$

Voltamos ao caso das subvariedades.

**Proposição 2.1.6.** Sejam  $M^k$  um subvariedade de  $\overline{M}$  e  $Y$  um campo de vetores normais ao longo de  $M$ . Então

$$\text{div } Y = -g(Y, H).$$

*Demonstração.* Como  $g(e_i, Y) = 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ , temos que

$$0 = e_i g(e_i, Y) = g(\overline{\nabla}_{e_i} Y, e_i) + g(Y, \overline{\nabla}_{e_i} e_i),$$

para todo  $i = 1, \dots, k$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} Y &= \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g(\nabla_{e_i} Y, e_i) = - \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g(Y, \nabla_{e_i} e_i) \\ &= - \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g(Y, \nabla_{e_i}^\perp e_i) = -g(Y, \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \alpha(e_i, e_i)) \\ &= -g(Y, \vec{H}). \end{aligned}$$

□

## 2.2 Fórmulas variacionais

Seja  $\overline{M}^n$  uma variedade semi-Riemanniana com métrica  $g$ ,  $M^k$  uma variedade diferenciável, compacta e com bordo  $\partial M \neq \emptyset$  e seja  $f : M \rightarrow \overline{M}$  uma imersão não degenerada.

**Definição 2.2.1.** Uma *variação (diferenciável) de  $f$*  é uma aplicação diferenciável

$$F : M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \overline{M}$$

tal que:

- a) cada aplicação  $F_t = F(\cdot, t) : M \rightarrow \overline{M}$  é uma imersão,
- b)  $F_0(p) = F(p, 0) = f(p)$ , para todo  $p \in M$ ,
- c)  $F(p, t) = f(p)$ , para todo  $p \in \partial M$ .

O campo de vetores ao longo de  $M$ ,  $E = \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{t=0}$ , é chamado de *campo variacional*. Uma variação de  $M$  é dita *normal* se  $E^\top \equiv 0$ .

Seja  $\{e_1, \dots, e_k\}$  um referencial ortonormal local em  $M$ . Os coeficientes da métrica induzida em  $M$  por  $F_t$  são dados por  $g_{ij}(t) = g(e_i(t), e_j(t))$ , onde  $e_i(t) = dF_t(e_i)$ . Seja  $\nu$  o índice da métrica induzida em  $M$ . Então o volume de  $F_t$  é dado por

$$\operatorname{Vol}(t) = \int_M \sqrt{|\det(g_{ij}(t))|} dV.$$

**Lema 2.2.2.** Temos que

$$\frac{d}{dt} (\det(g_{ij}(t))) \Big|_{t=0} = (-1)^\nu \operatorname{tr}_g(g'_{ij}(0)).$$

## 2.2 Fórmulas variacionais

*Demonstração.* Seja  $d(t) = \det(g_{ij}(t)) = \det[g_1(t), \dots, g_k(t)]$ , onde  $g_i(t)$  são as colunas da matriz  $(g_{ij}(t))$ . Como o determinante é uma aplicação multilinear, obtemos que:

$$d'(t) = \sum_{i=1}^k \det[g_1(t), \dots, g'_i(t), \dots, g_k(t)]. \quad (2.2.1)$$

Sendo  $\{e_1, \dots, e_k\}$  é um referencial ortonormal, temos que

$$g_{ij}(0) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ \varepsilon_i, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Sejam  $I_i = (0\dots 1\dots 0)$ . Portanto, em  $t = 0$ , temos que

$$\begin{aligned} d'(0) &= \sum_{i=1}^k \det[g_1(0), \dots, g'_i(0), \dots, g_k(0)] = \sum_{i=1}^k \det[\varepsilon_1 I_1, \dots, g'_i(0), \dots, \varepsilon_k I_k] \\ &= \sum_{i=1}^k \varepsilon_1 \dots \hat{\varepsilon}_i \dots \varepsilon_k g'_{ii}(0) = (-1)^\nu \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g'_{ii}(0) = (-1)^\nu (\text{tr}_g g'_{ij}(0)), \end{aligned}$$

pois  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_i \dots \varepsilon_k = \det(g_{ij}(0)) = (-1)^\nu$ . □

**Teorema 2.2.3.** [Primeira Variação da Área] Com as notações acima temos

$$\text{Vol}'(0) = - \int_M g(E, H) dV.$$

*Demonstração.* Seja  $w(t) = \sqrt{(-1)^\nu d(t)}$ . Assim, do lema anterior e usando que  $d(0) = (-1)^\nu$ , temos

$$w'(0) = \frac{(-1)^\nu d'(0)}{2w(0)} = \frac{\text{tr}_g g'_{ij}(0)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g'_{ii}(0).$$

Como  $g_{ii}(t) = g(e_i(t), e_i(t))$ , então

$$g'_{ii}(t) = 2g\left(\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} e_i(t), e_i(t)\right).$$

Seja  $p \in M$  e considere um sistema de coordenadas em  $U \times (-\epsilon, \epsilon)$ , onde  $U$  é uma vizinhança de  $p$  em  $M$ , com campos coordenados  $\left\{\frac{\partial}{\partial t}, e_i\right\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Logo, temos que

$$\left[\frac{\partial F}{\partial t}, e_i(t)\right] = \left[dF_t\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), dF_t(e_i)\right] = dF_t\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}, e_i\right]\right) = 0.$$

Assim,

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} e_i(t) = \overline{\nabla}_{e_i(t)} \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Então,

$$g'_{ii}(t) = 2g\left(\nabla_{e_i(t)} \frac{\partial F}{\partial t}, e_i(t)\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} w'(0) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g'_{ii}(0) = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g\left(\nabla_{e_i(0)} \frac{\partial F}{\partial t} \Big|_0, e_i(0)\right) \\ &= \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g(\nabla_{e_i} E, e_i) = \operatorname{div}_M E = -g(E, H), \end{aligned}$$

onde foi usada a Proposição 2.1.6. Portanto,

$$\operatorname{Vol}'(0) = \int_M w'(0) dV = - \int_M g(E, H) dV.$$

□

Agora, cada campo  $E$  ao longo  $f$  é campo variacional da variação  $F(p, t) = \exp_p(tE)$ . Portanto temos

**Corolário 2.2.4.**  $M$  é uma subvariedade mínima se e somente se  $\operatorname{Vol}'(0) = 0$ , para toda variação normal de  $M$ .

Vamos agora calcular a derivada segunda do funcional volume.

Sejam  $M^k \subset \overline{M}^n$  subvariedade mínima,  $F : M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \overline{M}$  uma variação normal de  $M$  e  $\{e_1, \dots, e_k\}$  um referencial ortonormal geodésico em  $T_p M$ , com  $p \in M$ . Precisaremos dos seguintes resultados preliminares.

**Lema 2.2.5.** Seja  $d(t) = \det(g_{ij}(t))$ . Então

$$d''(0) = (-1)^\nu \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g''_{ii}(0) + 2(-1)^\nu \sum_{i<j=1}^k \varepsilon_i \varepsilon_j g'_{ii}(0) g'_{jj}(0) + 2(-1)^{\nu+1} \sum_{i<j=1}^k \varepsilon_i \varepsilon_j g'_{ij}(0) g'_{ji}(0).$$

*Demonstração.* De (2.2.1), obtemos que

$$d''(t) = \sum_{i=1}^k \det[g_1(t), \dots, g''_i(t), \dots, g_k(t)] + 2 \sum_{i<j=1}^k \det[g_1(t), \dots, g'_i(t), g'_j(t), \dots, g_k(t)].$$

Logo, em  $t = 0$  temos que

$$\begin{aligned} d''(0) &= \sum_{i=1}^k \det[g_1(0), \dots, g''_i(0), \dots, g_k(0)] + 2 \sum_{i<j=1}^k \det[g_1(0), \dots, g'_i(0), g'_j(0), \dots, g_k(0)]. \\ &= \sum_{i=1}^k \det[\varepsilon_1 I_1, \dots, g''_i(0), \dots, \varepsilon_k I_k] + 2 \sum_{i<j=1}^k \det[\varepsilon_1 I_1, \dots, g'_i(0), g'_j(0), \dots, \varepsilon_k I_k]. \\ &= (-1)^\nu \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g''_{ii}(0) + 2(-1)^\nu \sum_{i<j=1}^k \varepsilon_i \varepsilon_j g'_{ii}(0) g'_{jj}(0) - 2(-1)^\nu \sum_{i<j=1}^k \varepsilon_i \varepsilon_j g'_{ij}(0) g'_{ji}(0). \end{aligned}$$

□

## 2.2 Fórmulas variacionais

**Lema 2.2.6.** Seja  $w(t) = \sqrt{(-1)^\nu d(t)}$ . Então

$$2w''(0) = \text{tr}_g(g_{ij}''(0)) - \text{tr}_g([g'_{ij}(0)]^2).$$

*Demonstração.* Derivando e usando que  $w(0) = 1$ , temos que:

$$2w''(0) = (-1)^\nu d''(0) - \frac{[d'(0)]^2}{2}. \quad (2.2.2)$$

Do Lema 2.2.2, resulta que

$$[d'(0)]^2 = [(-1)^\nu \text{tr}_g(g'_{ij}(0))]^2 = \left[ \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g'_{ii}(0) \right]^2 = \sum_{i=1}^k [g'_{ii}(0)]^2 + 2 \sum_{i<j=1}^k \varepsilon_i \varepsilon_j g'_{ii}(0) g'_{jj}(0). \quad (2.2.3)$$

Agora, usando o Lema 2.2.5, obtemos que

$$\begin{aligned} (-1)^\nu d''(0) - \frac{[d'(0)]^2}{2} &= \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g''_{ii}(0) + \sum_{i<j=1}^k \varepsilon_i \varepsilon_j g'_{ii}(0) g'_{jj}(0) - 2 \sum_{i<j=1}^k \varepsilon_i \varepsilon_j g'_{ij}(0) g'_{ji}(0) - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} [g'_{ii}(0)]^2 \\ &= \text{tr}_g(g_{ij}''(0)) - \left\{ 2 \sum_{i<j=1}^k \varepsilon_i \varepsilon_j g'_{ij}(0) g'_{ji}(0) + \sum_{i=1}^k [g'_{ii}(0)]^2 \right\} + \frac{1}{2} [\text{tr}_g(g'_{ij}(0))]^2 \\ &= \text{tr}_g(g_{ij}''(0)) - \text{tr}_g([g'_{ij}(0)]^2) + \frac{1}{2} [\text{tr}_g(g'_{ij}(0))]^2. \end{aligned}$$

Como  $M$  é uma subvariedade mínima, então  $\text{tr}_g(g'_{ij}(0)) = 0$ . Portanto, temos o desejado.  $\square$

**Lema 2.2.7.** Temos que

$$\text{a) } \text{tr}_g([g'_{ij}(0)]^2) = 4|g(\alpha(\cdot, \cdot), E)|^2$$

$$\text{b) } \text{tr}_g(g_{ij}''(0)) = 2|g(\alpha(\cdot, \cdot), E)|^2 + 2|(\bar{\nabla} E)^\perp|^2 + 2 \text{tr}_g g(R_{\bar{M}}(\cdot, E)E, \cdot) + 2 \text{div}(\bar{\nabla}_E E),$$

onde  $R_{\bar{M}}$  é o tensor curvatura de  $\bar{M}$ ,

$$|(\bar{\nabla} E)^\perp|^2 := \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g((\bar{\nabla}_{e_i} E)^\perp, (\bar{\nabla}_{e_i} E)^\perp).$$

e

$$|g(\alpha(\cdot, \cdot), E)|^2 := \sum_{i,j=1}^k \varepsilon_i \varepsilon_j g(\alpha(e_i, e_j), E)^2$$

*Demonstração.* a) Como  $[e_i(t), \frac{\partial F}{\partial t}] = 0$ , então

$$g'_{ij}(t) = g\left(\bar{\nabla}_{e_i(t)} \frac{\partial F}{\partial t}, e_j(t)\right) + g\left(e_i(t), \bar{\nabla}_{e_j(t)} \frac{\partial F}{\partial t}\right).$$

Portanto, em  $t = 0$  temos que

$$g'_{ij}(0) = g(\bar{\nabla}_{e_i} E, e_j) + g(e_i, \bar{\nabla}_{e_j} E).$$

Como a variação é normal, então  $g(E, e_i) = 0$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ . Logo,

$$0 = e_j g(E, e_i) = g(\bar{\nabla}_{e_i} E, e_j) + g(\bar{\nabla}_{e_i} e_j, E).$$

Com isso concluímos que

$$g'_{ij}(0) = -2g(\bar{\nabla}_{e_i} e_j, E) = -2g((\bar{\nabla}_{e_i} e_j)^\perp, E) = -2g(\alpha(e_i, e_j), E),$$

pois  $E^\top = 0$ . Portanto,

$$\text{tr}_g([g'_{ij}(0)]^2) = 4 \text{tr}_g([g(\alpha(\cdot, \cdot), E)]^2) = 4|g(\alpha(\cdot, \cdot), E)|^2,$$

já que a métrica  $g$  e a segunda forma fundamental  $\alpha$  são simétricas.

b) Uma vez que

$$g'_{ii}(t) = 2g\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} e_i(t), e_i(t)\right),$$

por derivação obtemos que

$$g''_{ii}(t) = 2g\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} e_i(t), e_i(t)\right) + 2g\left(\bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} e_i(t), \bar{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial t}} e_i(t)\right).$$

Assim, em  $t = 0$ , temos que

$$g''_{ii}(0) = 2g(\bar{\nabla}_E \bar{\nabla}_E e_i, e_i) + 2g(\bar{\nabla}_E e_i, \bar{\nabla}_E e_i).$$

i) Como  $[e_i, E] = 0$ , então o tensor curvatura de  $\bar{M}$  (1.4.1) fica

$$R_{\bar{M}}(e_i, E)E = \bar{\nabla}_E \bar{\nabla}_{e_i} E - \bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_E E.$$

Dessa maneira temos que

$$g(\bar{\nabla}_E \bar{\nabla}_E e_i, e_i) = g(R_{\bar{M}}(e_i, E)E, e_i) + g(\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_E E, e_i).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g(\bar{\nabla}_E \bar{\nabla}_E e_i, e_i) &= \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g(R_{\bar{M}}(e_i, E)E, e_i) + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g(\bar{\nabla}_{e_i} \bar{\nabla}_E E, e_i). \\ &= \text{tr}_g g(R_{\bar{M}}(\cdot, E)E, \cdot) + \text{div}_M(\bar{\nabla}_E E) \\ &= -\text{tr}_g g(R_{\bar{M}}(E, \cdot)E, \cdot) + \text{div}_M(\bar{\nabla}_E E). \end{aligned}$$

## 2.2 Fórmulas variacionais

ii) Da decomposição

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus [T_p M]^\perp,$$

temos que

$$g(\bar{\nabla}_E e_i, \bar{\nabla}_E e_i) = g((\bar{\nabla}_E e_i)^\top, (\bar{\nabla}_E e_i)^\top) + g((\bar{\nabla}_E e_i)^\perp, (\bar{\nabla}_E e_i)^\perp).$$

Como  $(\bar{\nabla}_E e_i)^\top \in T_p M$ , então podemos escrever

$$(\bar{\nabla}_E e_i)^\top = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j g((\bar{\nabla}_E e_i)^\top, e_j) e_j.$$

Portanto,

$$g((\bar{\nabla}_E e_i)^\top, (\bar{\nabla}_E e_i)^\top) = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j^2 g((\bar{\nabla}_E e_i)^\top, e_j)^2 g(e_j, e_j) = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j g((\bar{\nabla}_E e_i)^\top, e_j)^2.$$

Uma vez que  $E^\top = 0$ , de (2.1.1) resulta que

$$g((\bar{\nabla}_E e_i)^\top, (\bar{\nabla}_E e_i)^\top) = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j g((\bar{\nabla}_E e_i)^\top, e_j)^2 = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j g(-A_E(e_i), e_j)^2 = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j g(\alpha(e_i, e_j), E)^2.$$

Logo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g(\bar{\nabla}_E e_i, \bar{\nabla}_E e_i) &= \sum_{i,j=1}^k \varepsilon_i \varepsilon_j g(\alpha(e_i, e_j), E)^2 + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g((\bar{\nabla}_E e_i)^\perp, (\bar{\nabla}_E e_i)^\perp) \\ &= |g(\alpha(\cdot, \cdot), E)|^2 + |(\bar{\nabla}_E)^\perp|^2. \end{aligned}$$

Os itens i) e ii) implicam que

$$\text{tr}_g(g_{ij}''(0)) = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g_{ii}'(0) = 2|g(\alpha(\cdot, \cdot), E)|^2 + 2|(\bar{\nabla}_E)^\perp|^2 + 2 \text{tr}_g g(R_{\bar{M}}(\cdot, E)E, \cdot) + 2 \text{div}_M(\bar{\nabla}_E E).$$

□

Assim, usando os Lemas 2.2.6 e 2.2.7, temos que

$$w''(0) = -|g(\alpha(\cdot, \cdot), E)|^2 + |(\bar{\nabla}_E)^\perp|^2 - \text{tr}_g g(R_{\bar{M}}(E, \cdot)E, \cdot) + \text{div}_M(\bar{\nabla}_E E). \quad (2.2.4)$$

Considere o operador de Laplace-Beltrami no fibrado normal  $(TM)^\perp$  dado por

$$\Delta_M^\perp \eta(p) = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \nabla_{e_i}^\perp \nabla_{e_i}^\perp \eta(p), \quad (2.2.5)$$

onde  $\eta \in [T_p M]^\perp$  e  $\{e_1, \dots, e_k\}$  um referencial local ortonormal e geodésico em  $p$ . Considere também, o operador  $\tilde{A} : \mathcal{H}M^\perp \rightarrow \mathcal{H}(M)^\perp$  definido por

$$\tilde{A}(X) = \sum_{i,j=1}^k \varepsilon_i \varepsilon_j g(\alpha(e_i, e_j), X) \alpha(e_i, e_j).$$

**Teorema 2.2.8.** [Segunda Variação da Área] Com as notações acima, temos

$$Vol''(0) = - \int_M g(\Delta_M^\perp E + \tilde{A}(E), E) + \text{tr}_g g(R_{\overline{M}}(E, \cdot)E, \cdot) dV.$$

*Demonstração.* Integrando (2.2.4) temos que

$$Vol'(0) = \int_M w''(0) dV = \int_M \{-|g(\alpha(\cdot, \cdot), E)|^2 + |(\overline{\nabla} E)^\perp|^2 - \text{tr}_g g(R_{\overline{M}}(E, \cdot)E, \cdot) + \text{div}_M(\overline{\nabla}_E E)\} dV.$$

a) Usando o Teorema de Stokes e que  $E = 0$  em  $\partial M$  temos que:

$$\int_M \text{div}_M(\overline{\nabla}_E E) dV = \int_{\partial M} (\overline{\nabla}_E E) = 0.$$

b) Usando que a conexão é compatível com métrica temos que

$$e_i g(\nabla_{e_i}^\perp E, E) = g(\nabla_{e_i}^\perp \nabla_{e_i}^\perp E, E) + g(\nabla_{e_i}^\perp E, \nabla_{e_i}^\perp E). \quad (2.2.6)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_M |(\overline{\nabla} E)^\perp|^2 dV &= \int_M \sum_{i=1}^k \varepsilon_i g((\overline{\nabla}_E e_i)^\perp, (\overline{\nabla}_E e_i)^\perp) dV = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \int_M g((\overline{\nabla}_E e_i)^\perp, (\overline{\nabla}_E e_i)^\perp) dV \\ &= \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \int_M \{e_i g(\nabla_{e_i}^\perp E, E) - g(\nabla_{e_i}^\perp \nabla_{e_i}^\perp E, E)\} dV. \end{aligned}$$

Usando o Teorema de Stokes e o fato de que  $E = 0$  em  $\partial M$ , temos que

$$\int_M e_i g(\nabla_{e_i}^\perp E, E) dV = \int_{\partial M} g(\nabla_{e_i}^\perp E, E) dV = 0.$$

Logo,

$$\int_M |(\overline{\nabla} E)^\perp|^2 dV = - \sum_{i=1}^k \varepsilon_i \int_M g(\nabla_{e_i}^\perp \nabla_{e_i}^\perp E, E) dV = - \int_M g\left(\sum_{i=1}^k \varepsilon_i \nabla_{e_i}^\perp \nabla_{e_i}^\perp E, E\right) dV.$$

Portanto, de (2.2.5) e (2.2.6) obtemos que:

$$\int_M |(\overline{\nabla} E)^\perp|^2 dV = - \int_M g(\Delta_M^\perp E, E) dV.$$

c) Finalmente, temos que

$$\begin{aligned} \int_M |g(\alpha(\cdot, \cdot), E)|^2 dV &= \int_M \sum_{i,j=1}^k \varepsilon_i \varepsilon_j g(\alpha(e_i, e_j), E)^2 dV \\ &= \int_M g\left(\sum_{i,j=1}^k \varepsilon_i \varepsilon_j g(\alpha(e_i, e_j), E) \alpha(e_i, e_j), E\right) dV \\ &= \int_M g(\tilde{A}(E), E) dV. \end{aligned}$$

### 2.3 Caso de superfícies em variedades 3-dimensionais

De  $a)$ ,  $b)$  e  $c)$ , concluímos que

$$Vol'(0) = - \int_M g(\Delta_M^\perp E + \tilde{A}(E), E) + \text{tr}_g g(R_{\overline{M}}(E, \cdot)E, \cdot) dV.$$

□

**Observação 2.2.9.** Sejam  $M^{n-1}$  uma hipersuperfície Lorentziana de uma variedade Lorentziana  $\overline{M}^n$  e  $N : M \rightarrow T\overline{M}$  a aplicação normal de Gauss. Como  $M$  é Lorentziana, então  $N$  é do tipo-espaço e assim  $g(N, N) = 1$ . Consideramos uma variação normal com campo variacional  $E = hN$ , onde  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável.

a) Como

$$\tilde{A}(hN) = h \sum_{i,j=1}^k \varepsilon_i \varepsilon_j g(\alpha(e_i, e_j), N) \alpha(e_i, e_j),$$

temos que

$$g(\tilde{A}(hN), hN) = h^2 \sum_{i,j=1}^k \varepsilon_i \varepsilon_j g(\alpha(e_i, e_j), N)^2 = h^2 |\alpha|^2.$$

b)  $\text{tr}_g g(R_{\overline{M}}(hN, \cdot)hN, \cdot) = h^2 \text{tr}_g g(R_{\overline{M}}(N, \cdot)N, \cdot) = h^2 Ric_{\overline{M}}(N)$ .

c) Como  $g(N, N) = 1$ , temos que  $g(\nabla_{e_i}^\perp N, N) = 0$ . Assim  $\nabla_{e_i}^\perp N = 0$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta_M^\perp hN &= \sum_{i=1}^{n-1} h \varepsilon_i \nabla_{e_i}^\perp \nabla_{e_i}^\perp N + \sum_{i=1}^{n-1} 2e_i(h) \nabla_{e_i}^\perp N + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i e_i(e_i(h))N \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i e_i(e_i(h))N = (\Delta_s h)N. \end{aligned}$$

Logo, resulta:

$$g(\Delta_M^\perp E, E) = g((\Delta_M h)N, hN) = h(\Delta_s h).$$

Portanto, usando  $a)$ ,  $b)$  e  $c)$ , a segunda variação da área se escreve como:

$$Vol''(0) = - \int_M \{h(\Delta_s h) + h^2 |\alpha|^2 + h^2 Ric_{\overline{M}}(N)\} dV. \quad (2.2.7)$$

### 2.3 Caso de superfícies em variedades 3-dimensionais

Seja  $\overline{M}$  uma variedade Lorentziana, 3-dimensional, com métrica  $g$ , e  $f : M \rightarrow \overline{M}$  uma imersão de uma superfície  $M$  em  $\overline{M}$

**Definição 2.3.1.** A imersão  $f$  é dita de tipo

## 2. Subvariedades mínimas em variedades Lorentzianas

- i) *espaço*, se a métrica induzida  $s = f^*g$  é Riemanniana,
- ii) *tempo*, se a métrica induzida  $s = f^*g$  é Lorentziana.

Usaremos algumas notações clássicas.

**Definição 2.3.2.** A *primeira forma fundamental* é a forma bilinear induzida por  $f$ , isto é, se  $p \in M$ ,

$$I_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$I(v, w) = f^*g(v, w) := g_{f(p)}(df(p)(v), df(p)(w)).$$

Se  $\{u, v\}$  são coordenadas locais em  $M$ , em uma vizinhança de  $p \in M$ , a forma  $I$  se escreve como

$$I = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2,$$

onde

$$E = I\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right), \quad F = I\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right), \quad G = I\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right).$$

Seja  $N : M \longrightarrow T\overline{M}$  um *campo normal* ao longo de  $f$ , isto é,  $N(p) \in [T_p M]^\perp$ . Se  $M$  é do tipo-espaço, então  $N$  é do tipo-tempo. Por outro lado se  $M$  é do tipo-tempo, então  $N$  é do tipo-espaço. Para a segunda forma fundamental temos, em coordenadas locais  $\{u, v\}$ , a expressão

$$\alpha = e(u, v)du^2 + 2f(u, v)dudv + g(u, v)dv^2,$$

onde

$$e = -I\left(\frac{\partial}{\partial u}, N_u\right), \quad f = -I\left(\frac{\partial}{\partial u}, N_v\right) = -I\left(N_u, \frac{\partial}{\partial v}\right), \quad g = -I\left(\frac{\partial}{\partial v}, N_v\right).$$

Além disso, as curvaturas média e Gaussiana (seccional) de  $M$  são dadas (respectivamente) por:

$$H = \frac{Eg - 2fF + Ge}{EG - F^2}, \quad K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

**Definição 2.3.3.** Seja  $h \in \mathcal{F}(M)$ . O operador de Laplace-Beltrami  $\Delta_s h = \operatorname{div}(\operatorname{grad} h)$  pode ser escrito (em coordenadas locais) como:

$$\Delta_s h = \sum_{i,j=1}^2 s^{ij} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial u_i \partial u_j} - \sum_{k=1}^2 {}_s\Gamma_{ij}^k \frac{\partial h}{\partial u_k} \right), \quad (2.3.1)$$

onde  ${}_s\Gamma_{ij}^k$  são os símbolos de Christoffel para a métrica  $s$  e  $(s^{ij})$  é a inversa da matriz  $(s_{ij})$ .

### 2.3 Caso de superfícies em variedades 3-dimensionais

**Observação 2.3.4.** Considerando coordenadas isotérmicas  $\{u_1, u_2\}$  em  $M$ , podemos escrever a métrica  $s = \varphi du_1^2 + \varepsilon \varphi du_2^2$ , onde  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função positiva de classe  $C^\infty$  e  $\varepsilon = 1$ , se  $f$  é do tipo-espaço, e  $\varepsilon = -1$ , se  $f$  é do tipo-tempo. Os símbolos de Christoffel são dados por

$$\begin{cases} {}_s\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, & {}_s\Gamma_{11}^2 = -\varepsilon \frac{1}{2\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, & {}_s\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}, \\ {}_s\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, & {}_s\Gamma_{22}^1 = -\varepsilon \frac{1}{2\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, & {}_s\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \end{cases} \quad (2.3.2)$$

e, pela equação (2.3.1), o operador de Laplace-Beltrami se torna

$$\begin{aligned} \Delta_s h &= \sum_{i=1}^2 s^{ii} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial u_i^2} - \sum_{k=1}^2 {}_s\Gamma_{ii}^k \frac{\partial h}{\partial u_k} \right) \\ &= \frac{1}{\varphi} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial u_1^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 h}{\partial u_2^2} \right) + \frac{1}{\varphi} \left( \sum_{k=1}^2 {}_s\Gamma_{11}^k \frac{\partial h}{\partial u_k} + \varepsilon {}_s\Gamma_{22}^k \frac{\partial h}{\partial u_k} \right) \\ &= \frac{1}{\varphi} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial u_1^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 h}{\partial u_2^2} \right) + \frac{1}{\varphi} \left[ \left( {}_s\Gamma_{11}^1 + \varepsilon {}_s\Gamma_{22}^1 \right) \frac{\partial h}{\partial u_1} + \left( {}_s\Gamma_{11}^2 + \varepsilon {}_s\Gamma_{22}^2 \right) \frac{\partial h}{\partial u_2} \right] \end{aligned}$$

pois  $s_{ij} = 0$ , se  $i \neq j$ . Como  $\varepsilon^2 = 1$ , então de (2.3.2) temos que

$$\begin{cases} {}_s\Gamma_{11}^1 + \varepsilon {}_s\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} - \frac{1}{2\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = 0, \\ {}_s\Gamma_{11}^2 + \varepsilon {}_s\Gamma_{22}^2 = \frac{-\varepsilon}{2\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + \frac{\varepsilon}{2\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = 0. \end{cases}$$

Portanto,

$$\Delta_s h = \frac{1}{\varphi} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial u_1^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 h}{\partial u_2^2} \right). \quad (2.3.3)$$

Consequentemente, a menos do fator  $\varphi^{-1}$ , se a métrica induzida é Riemanniana temos que o operador de Laplace-Beltrami é o operador de Laplace e, quando a métrica induzida é Lorentziana, é o operador da onda. Sejam  $M^2$  uma superfície mínima do tipo-tempo em  $\bar{M}^3$ ,  $N : M \rightarrow TM$  a aplicação normal de Gauss de  $M$  e  $\{e_1, e_2\}$  um base ortonormal de  $T_p M$ ,  $p \in M$ , com  $e_1$  do tipo-espaço e  $e_2$  do tipo-tempo. Temos que

$$\alpha(e_1, e_1) = \lambda_1 N, \quad \alpha(e_2, e_2) = \lambda_2 N \quad \text{e} \quad \alpha(e_1, e_2) = \lambda_3 N.$$

Então a equação de Gauss fica:

$$K_S(e_1, e_2) = \bar{K}_S(e_1, e_2) - (\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_3^2) = \bar{K}_S(e_1, e_2) - \det(\alpha), \quad (2.3.4)$$

onde  $K_S(e_1, e_2)$  e  $\bar{K}_S(e_1, e_2)$  são as curvaturas seccionais de  $M$  e  $\bar{M}$ , respectivamente. Como  $M$  é mínima temos que:

$$H(p) = (\lambda_1 - \lambda_2)N = 0.$$

---

## 2. Subvariedades mínimas em variedades Lorentzianas

---

Assim

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_3^2 - 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2) = |\alpha|^2 - 2\det(\alpha).$$

Então (2.3.4) se torna:

$$K_S(e_1, e_2) = \bar{K}_S(e_1, e_2) - \frac{|\alpha|^2}{2}.$$

Usando (1.4.2) resulta que

$$\bar{K}_S(e_1, e_2) = -g(R(e_1, e_2)e_1, e_2) = -R_{1212}.$$

Logo,

$$R_{1212} = -K_S(e_1, e_2) - \frac{|\alpha|^2}{2}. \quad (2.3.5)$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned} Ric_{\bar{M}}(e_1) &= -g(R(e_1, e_2)e_1, e_2) + g(R(e_1, e_3)e_1, e_3) = -R_{1212} + R_{1313}, \\ Ric_{\bar{M}}(e_2) &= g(R(e_1, e_2)e_1, e_2) + g(R(e_2, e_3)e_2, e_3) = R_{1212} + R_{2323}, \\ Ric_{\bar{M}}(e_3) &= g(R(e_1, e_3)e_1, e_3) - g(R(e_2, e_3)e_2, e_3) = R_{1313} - R_{2323}, \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

onde  $e_3 = N$ . Podemos escrever a curvatura escalar de  $\bar{M}$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \bar{S}(p) &= Ric_{\bar{M}}(e_1) - Ric_{\bar{M}}(e_2) + Ric_{\bar{M}}(N) \\ &= -2R_{1212} + 2(R_{1313} - R_{2323}) \\ &= -2R_{1212} + 2Ric_{\bar{M}}(N). \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Usando (2.3.5) temos que a curvatura escalar  $\bar{S}(p)$  de  $\bar{M}$  fica

$$\bar{S}(p) = 2K_S(e_1, e_2) + |\alpha|^2 + 2Ric_{\bar{M}}(N). \quad (2.3.8)$$

Portanto,

$$|\alpha|^2 = \bar{S}(p) - 2K_S(e_1, e_2) - 2Ric_{\bar{M}}(N). \quad (2.3.9)$$

Substituindo em (2.2.7) temos que a segunda variação da área se torna:

$$A''(0) = - \int_M \{h(\Delta_s h) + h^2[\bar{S}(p) - 2K_S(e_1, e_2) - Ric_{\bar{M}}(N)]\} dV.$$

Por exemplo, se o ambiente tem curvatura constante temos que  $\bar{S}(p) = Ric_{\bar{M}}(N)$  e a segunda fórmula da variação é dada por:

$$A''(0) = \int_D \{-h\Delta_s h + 2h^2 K_S\} dS. \quad (2.3.10)$$

### 2.3 Caso de superfícies em variedades 3-dimensionais

---

**Definição 2.3.5.** Seja uma parametrização  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ , onde  $D \subset U$  um domínio limitado e uma função diferenciável  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que

- i)  $D$  é *h-estável*, se  $A''(0) > 0$ .
- ii)  $D$  é *h-instável*, se  $A''(0) < 0$ .

**Lema 2.3.6.** Dado um domínio limitado  $D \subset U$  na forma  $(a, b) \times (c, d)$  tal que

$$b - a = k\pi \quad \text{e} \quad d - c = k_1\pi, \quad (2.3.11)$$

para algum  $k, k_1 \in \mathbb{Z}$ . Então existe uma função diferenciável  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  que é solução do problema

$$\begin{cases} h_{uu} - h_{vv} = 4nh, & \text{para todo } (u, v) \in D, \\ h|_{\partial D} = 0, \end{cases} \quad (2.3.12)$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Sejam  $F_1(t) = \sin(t)$  e  $F_2(t) = \cos(t + \frac{\pi}{2})$ . Temos que

$$\begin{cases} F_1(0) = F_1(n_1\pi) = 0 \\ F_2(0) = F_2(n_2\pi) = 0, \end{cases} \quad (2.3.13)$$

para todo  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ . Além disso,

$$\begin{cases} F_1''(t) = -F_1(t) \\ F_2''(t) = -F_2(t). \end{cases} \quad (2.3.14)$$

Definimos

$$h_n(u, v) = F_i((n-1)(u-a))F_j((n+1)(v-c)), \quad i, j = 1, 2. \quad (2.3.15)$$

Vamos mostrar que  $h_n(u, v)$  satisfaz o problema (2.3.12). Calculando as derivadas parciais e usando (2.3.14) temos que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 h_n(u, v)}{\partial u^2} = -(n-1)^2 F_i((n-1)(u-a))F_j((n+1)(v-c)) = -(n-1)^2 h_n(u, v), \\ \frac{\partial^2 h_n(u, v)}{\partial v^2} = -(n+1)^2 F_i((n-1)(u-a))F_j((n+1)(v-c)) = -(n+1)^2 h_n(u, v). \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 h_n(u, v)}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 h_n(u, v)}{\partial v^2} = 4nh_n(u, v). \quad (2.3.16)$$

Além disso, de (2.3.11) e (2.3.13), temos que

$$\begin{cases} h_n(a, v) = F_i(0)F_j((n+1)(v-c)) = 0, \\ h_n(b, v) = F_i((n-1)(b-a))F_j((n+1)(v-c)) = F_i((n-1)k\pi)F_j((n+1)(v-c)) = 0, \\ h_n(u, c) = F_i((n-1)(u-a))F_j(0) = 0, \\ h_n(u, d) = F_i((n-1)(u-a))F_j((n+1)(d-c)) = F_i((n-1)(u-a))F_j((n+1)k_1\pi) = 0, \end{cases} \quad (2.3.17)$$

pois  $(n-1)k, (n+1)k_1 \in \mathbb{Z}$ .

Uma vez que  $\partial D = (\{a\} \times [c, d]) \cup (\{b\} \times [c, d]) \cup ([a, b] \times \{c\}) \cup ([a, b] \times \{d\})$ , de (2.3.17) temos que  $h_n$  se anula na fronteira. Portanto de (2.3.16) e (2.3.17),  $h_n$  é solução de (2.3.12).  $\square$

Como a curvatura seccional  $K_S$  é uma função diferenciável e para uma parametrização isotérmica  $E = -G = \lambda > 0$  e  $F = 0$ , a função  $\lambda$  é de classe  $C^\infty$ , então  $\lambda K_S$  também é diferenciável de classe  $C^\infty$ . Além disso  $\bar{D}$  é compacto, logo podemos garantir a existência de máximos e mínimos de  $\lambda K$  em  $\bar{D}$ .

**Teorema 2.3.7.** Seja  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  uma parametrização isotérmica,  $D \subset U$  um domínio limitado da forma  $(a, b) \times (c, d)$  satisfazendo (2.3.11) e  $h_n$  uma função diferenciável da forma (2.3.15) com  $n \in \mathbb{Z}$ .

i) Se  $2n < \min_{(u,v) \in \bar{D}} (\lambda K_S)$ , então  $D$  é  $h_n$ -estável.

ii) Se  $2n > \max_{(u,v) \in \bar{D}} (\lambda K_S)$ , então  $D$  é  $h_n$ -instável.

*Demonstração.* Como  $h_n$  é da forma (2.3.15), então  $h_n$  satisfaz o problema (2.3.12). Portanto,

$$\lambda \Delta_s h_n = h_{uu} - h_{vv} = 4n h_n$$

e  $h_n$  se anula na fronteira de  $D$ . Portanto a segunda variação da área (2.3.10) fica

$$\begin{aligned} Vol''(0) &= \int_{\bar{D}} (-h_n \lambda \Delta_s h_n + 2\lambda h_n^2 K) dudv \\ &= \int_{\bar{D}} (-4n h_n^2 + 2\lambda h_n^2 K_S) dudv \\ &= \int_{\bar{D}} 2 h_n^2 [-2n + \lambda K_S] dudv. \end{aligned}$$

Consequentemente:

i) Se  $2n < \min_{(u,v) \in \bar{D}} (\lambda K_S)$ , então  $2n < \lambda K_S$  para todo  $(u, v) \in D$ . Portanto  $-2n + \lambda K_S > 0$ , o que implica que  $Vol''(0) > 0$ . Logo,  $D$  é  $h_n$ -estável.

### 2.3 Caso de superfícies em variedades 3-dimensionais

ii) Se  $2n > \max_{(u,v) \in D} (\lambda K_S)$ , então  $2n > \lambda K_S$  para todo  $(u, v) \in D$ . Portanto  $-2n + \lambda K_S < 0$ , o que implica que  $Vol''(0) < 0$ . Logo,  $D$  é  $h_n$ -instável.

□

**Exemplo 2.3.8.** [Helicóide Lorentziano] Considere a imersão  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$  dada por

$$\varphi(u, v) = (u, \sinh u \sinh v, \cosh u \sinh v)$$

e o domínio limitado  $D = (0, k\pi) \times (0, k_1\pi)$ . Temos que:

$$\begin{cases} x_u = (1, \cosh u \sinh v, \sinh u \sinh v), \\ x_v = (0, \sinh u \cosh v, \cosh u \cosh v). \end{cases}$$

Logo a métrica induzida é

$$I = \cosh^2(v)(du^2 - dv^2)$$

e  $\det I = -\cosh^4(v) < 0$ . Logo  $\varphi$  é uma imersão do tipo tempo. Portanto, de (1.2.2) o campo normal é

$$N(u, v) = \left( \frac{\sinh v}{\cosh v}, -\frac{\cosh u}{\cosh v}, -\frac{\sinh u}{\cosh v} \right)$$

e  $g(N, N) = 1$ , isto é  $N$  é do tipo-espaço. De

$$\begin{cases} x_{uu} = (0, \sinh u \sinh v, \cosh u \sinh v), \\ x_{uv} = (0, \cosh u \cosh v, \sinh u \cosh v), \\ x_{vv} = (0, \sinh u \sinh v, \cosh u \sinh v), \end{cases}$$

resulta que a segunda forma fundamental é dada por:

$$II = -2dudv.$$

Portanto as curvaturas Gaussiana e média ficam:

$$K = \frac{1}{\cosh^4(v)} \quad \text{e} \quad H = 0.$$

Logo,  $\varphi$  é mínima e a segunda variação da área (2.3.10) é

$$\begin{aligned} A''(0) &= \int_D \left\{ -h \Delta_s h + \frac{2h^2}{\cosh^4(v)} \right\} dS \\ &= \int_D \left\{ -h(h_{uu} - h_{vv}) + \frac{2h^2}{\cosh^2(v)} \right\} dudv. \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Uma vez que  $\lambda K = \frac{1}{\cosh^2(v)}$  obtemos que

$$\min_{\bar{D}} \lambda K = \frac{1}{\cosh^2(k_1\pi)} > 0 \quad \text{e} \quad \max_{\bar{D}} \lambda K = 1$$

Como  $2n > 1$  para todo  $n > 0$  e  $2n < \frac{1}{\cosh^2(k_1\pi)}$  para todo  $n \leq 0$ , então pelo Teorema 2.3.7 temos que, para todo  $n \in \mathbb{Z}$  e  $h_n$  uma função diferenciável da forma (2.3.15) resulta:

i) se  $n \leq 0$ , então  $\bar{D}$  é  $h_n$ -estável,

ii) se  $n > 0$ , então  $\bar{D}$  é  $h_n$ -instável.

Através desse exemplo vemos que a região  $\varphi(\bar{D})$  dependendo da variação normal  $h$  é ponto mínimo ou é um ponto máximo da função área, isto é, dependendo de  $h$  temos que  $A''(0) > 0$  ou  $A''(0) < 0$ .

## 2.4 Gráficos Mínimos do tipo tempo em $\mathbb{L}^3$

Nesta seção vamos determinar a equação das superfícies mínimas para superfícies do tipo tempo no espaço de Lorentz  $\mathbb{L}^3$ . As superfícies mostradas nesta seção podem ser encontradas em [2] e [13].

Seja  $M \subset \mathbb{L}^3$  uma superfície mínima dada como gráfico de uma função diferenciável  $f : \Omega \rightarrow M$  de classe  $C^2$ , com  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ .

Vamos separar em dois casos, pois a equação das superfícies mínimas vai depender da escolha da parametrização por causa da métrica ser Lorentziana.

### 2.4.1 Caso 1 - $z = f(x, y)$

Seja  $M$  a superfície parametrizada por:

$$\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega,$$

com a função  $f(x, y)$  satisfazendo:

$$f_x^2 + f_y^2 > 1. \tag{2.4.1}$$

Como

$$\varphi_x(x, y) = (1, 0, f_x(x, y)),$$

$$\varphi_y(x, y) = (0, 1, f_y(x, y)),$$

## 2.4 Gráficos Mínimos do tipo tempo em $\mathbb{L}^3$

---

os coeficientes da primeira forma fundamental de  $M$  são:

$$E = 1 - f_x^2, \quad F = -f_x f_y \quad \text{e} \quad G = 1 - f_y^2.$$

Portanto de (2.4.1) temos que

$$EG - F^2 = 1 - f_x^2 - f_y^2 < 0.$$

Logo  $\varphi$  é do tipo tempo e o campo normal é dado por:

$$N = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 - 1}}(-f_x, -f_y, -1).$$

Além disso, os coeficientes da segunda forma fundamental de  $M$  são:

$$e = \frac{f_{xx}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 - 1}}, \quad f = \frac{f_{xy}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 - 1}} \quad \text{e} \quad g = \frac{f_{yy}}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 - 1}}.$$

Portanto as curvaturas Gaussiana e média de  $M$  são, respectivamente, dadas por

$$K = -\frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{f_x^2 + f_y^2 - 1},$$

$$H = \frac{f_{xx}(f_y^2 - 1) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(f_x^2 - 1)}{2(f_x^2 + f_y^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Como vimos anteriormente  $M$  é crítico da função área se e somente se  $H \equiv 0$ . Logo a equação das superfícies mínimas para as superfícies do tipo tempo da forma  $z = f(x, y)$  é

$$f_{xx}(f_y^2 - 1) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(f_x^2 - 1) = 0. \quad (2.4.2)$$

Em seguida, vamos apresentar alguns exemplos de gráficos mínimos.

**Exemplo 2.4.1.** Seja  $f(x, y) = \alpha(x)$ , onde  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável que depende somente de  $x$ . Nesse caso a equação (2.4.2) se torna  $\alpha''(x) = 0$ . Portanto  $\alpha(x) = ax + b$ , onde  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $|a| > 1$ . Analogamente, se  $f(x, y) = \alpha(y)$ , onde  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável que depende somente de  $y$ , então  $\alpha(y) = ay + b$ , onde  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $|a| > 1$ .

**Exemplo 2.4.2.** [Superfície do tipo Scherk] Seja  $f(x, y) = \alpha(x) + \beta(y)$ , onde  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis que dependem somente de  $x$  e de  $y$ , respectivamente. Nesse caso, a equação (2.4.2) se torna

$$\alpha''(x)(\beta'(y)^2 - 1) + \beta''(y)(\alpha'(x)^2 - 1) = 0,$$

---

## 2. Subvariedades mínimas em variedades Lorentzianas

que é equivalente a

$$\frac{\alpha''(x)}{\alpha'(x)^2 - 1} = -\frac{\beta''(y)}{\beta'(y)^2 - 1}.$$

Uma vez que  $x$  e  $y$  são variáveis independentes, cada lado da equação é constante. Indicando por  $a \in \mathbb{R}$  esta constante, obtemos duas equações diferenciáveis ordinárias:

$$\begin{cases} \alpha''(x) = a(\alpha'(x)^2 - 1) \\ \beta''(y) = -a(\beta'(y)^2 - 1). \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Portanto,

1. Se  $a = 0$ , então  $\alpha''(x) = \beta''(y) = 0$ . Logo,

$$\alpha(x) = a_1x + b_1 \quad \text{e} \quad \beta(y) = a_2y + b_2.$$

Portanto,

$$f(x, y) = a_1x + a_2y + b_3$$

, onde  $a_1^2 + a_2^2 > 1$ .

2. Se  $a \neq 0$ , então a solução de (2.4.3) é

$$\alpha(x) = -\frac{1}{a} \ln(|\sinh(ax)|) \quad \text{e} \quad \beta(y) = \frac{1}{a} \ln(|\sinh(ay)|),$$

com  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \neq 0\}$ . Uma vez que  $\left| \frac{\cosh(w)}{\sinh(w)} \right| > 1$ , para todo  $w \in \mathbb{R} - \{0\}$ , temos que

$$\left( \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \right)^2 + \left( \frac{\cosh(y)}{\sinh(y)} \right)^2 > 1.$$

Portanto, o gráfico da função  $f : \Omega \rightarrow M$  dada por:

$$f(x, y) = -\frac{1}{a} \ln(|\sinh(ax)|) + \frac{1}{a} \ln(|\sinh(ay)|),$$

é uma superfície mínima do tipo tempo.

## 2.4 Gráficos Mínimos do tipo tempo em $\mathbb{L}^3$

---

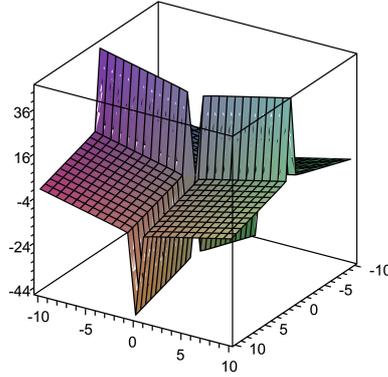


Figura 2.1: Superfície do tipo Scherk.

**Exemplo 2.4.3.** [Helicóide] Neste exemplo vamos procurar superfícies do tipo gráfico cujas curvas de níveis são retas. Seja a curva de nível  $\alpha(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$  tal que  $f(x(t), y(t)) = c$ . Então,

$$f_x x' + f_y y' = 0.$$

Uma vez que a curva está contida em um plano paralelo ao plano  $(x, y)$ , que possui a métrica Euclideana  $dx^2 + dy^2$ , então  $\text{grad } f$  é ortogonal a curva, o que implica que  $\alpha'(t) = (f_y, -f_x)$ . Portanto,

$$\alpha''(t) = (x'', y'') = (-f_x f_{yy} + f_{xy} f_y, -f_y f_{xx} + f_{xy} f_x).$$

Logo, a curvatura da curva  $\alpha$  é dada por:

$$\begin{aligned} k(\alpha) &= \frac{-x''y' + x'y''}{[(x')^2 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-f_{xx} + 2f_x f_y f_{xy} - f_{yy}}{\|\text{grad } f\|^3}. \end{aligned}$$

Como estamos procurando gráficos mínimos, temos que  $f(x, y)$  satisfaz a equação (2.4.2), logo

$$k(\alpha) = -\frac{f_{xx} + f_{yy}}{\|\text{grad } f\|^3}.$$

## 2. Subvariedades mínimas em variedades Lorentzianas

Uma vez que as curvas de nível são retas temos que  $k(\alpha) = 0$ , ou seja

$$f_{xx} + f_{yy} = 0.$$

Portanto,

$$f(x, y) = A \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + B,$$

onde  $A, B \in \mathbb{R}$ . Além disso,

$$f_x^2 + f_y^2 = \frac{A^2}{x^2 + y^2}.$$

Logo, o gráfico de  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}; x^2 + y^2 < A^2\}$ , é uma superfície do tipo tempo que é um pedaço do helicóide:

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, Av + B),$$

onde  $u \in \mathbb{R}$  tal que  $|u| < |A|$ .

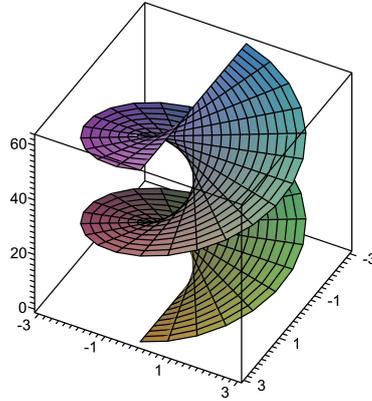


Figura 2.2: A superfície do Helicóide.

## 2.4 Gráficos Mínimos do tipo tempo em $\mathbb{L}^3$

---

### 2.4.2 Caso 2 - $x = f(y, z)$

Considere a superfície  $M$  parametrizada por:

$$\varphi(y, z) = (f(y, z), y, z), \quad (y, z) \in \Omega,$$

tal que a função  $f(y, z)$  satisfaz:

$$f_z^2 - f_y^2 < 1. \quad (2.4.4)$$

De

$$\varphi_y(y, z) = (f_y(y, z), 1, 0),$$

$$\varphi_z(y, z) = (f_z(y, z), 0, 1),$$

resulta que os coeficientes da primeira forma fundamental de  $M$  são:

$$E = f_y^2 + 1, \quad F = f_y f_z \quad \text{e} \quad G = f_z^2 - 1.$$

Portanto, de (2.4.4), temos que

$$EG - F^2 = -1 + f_z^2 - f_y^2 < 0.$$

Logo  $\varphi$  é do tipo tempo. O campo normal é dado por:

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 - f_z^2 + f_y^2}}(1, -f_y, f_z),$$

e os coeficientes da segunda forma fundamental de  $M$  são:

$$e = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 - f_z^2 + f_y^2}}, \quad f = \frac{f_{yz}}{\sqrt{1 - f_z^2 + f_y^2}} \quad \text{e} \quad g = \frac{f_{zz}}{\sqrt{1 - f_z^2 + f_y^2}}.$$

Portanto as curvaturas Gaussiana e média de  $M$  são, respectivamente,

$$K = -\frac{f_{yy}f_{zz} - f_{yz}^2}{1 - f_z^2 + f_y^2},$$
$$H = -\frac{f_{yy}(f_z^2 - 1) - 2f_y f_z f_{yz} + f_{zz}(f_y^2 + 1)}{2(1 - f_z^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Como vimos anteriormente  $M$  é crítico da função área se, somente, se  $H \equiv 0$ . Logo a equação das superfícies mínimas para as superfícies do tipo tempo da forma  $x = f(y, z)$  é:

$$f_{yy}(f_z^2 - 1) - 2f_y f_z f_{yz} + f_{zz}(f_y^2 + 1) = 0. \quad (2.4.5)$$

Vamos apresentar em seguida alguns exemplos de gráficos mínimos.

## 2. Subvariedades mínimas em variedades Lorentzianas

**Exemplo 2.4.4.** Seja  $f(y, z) = \alpha(y)$ , onde  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável que depende somente de  $y$ . Nesse caso, a equação (2.4.5) se torna  $\alpha''(y) = 0$ . Portanto  $\alpha(y) = ay + b$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.4.5.** Seja  $f(y, z) = \alpha(z)$ , onde  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável que depende somente de  $z$ . Nesse caso a equação (2.4.5) se torna  $\alpha''(z) = 0$ . Portanto  $\alpha(z) = az + b$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $|a| < 1$ . Se  $a \neq 0$ , podemos reparametrizar este plano da seguinte maneira

$$\varphi(x, y) = \left( x, y, \frac{x}{a} - \frac{b}{a} \right)$$

que é o plano obtido Exemplo 2.4.1, pois  $|a| < 1$ .

**Exemplo 2.4.6.** [Superfície do tipo Scherk 2] Seja  $f(y, z) = \alpha(y) + \beta(z)$ , onde  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis que dependem somente de  $y$  e de  $z$ , respectivamente. Nesse caso, a equação (2.4.5) se torna

$$\alpha''(y)(\beta'(z)^2 - 1) + \beta''(z)(\alpha'(y)^2 + 1) = 0,$$

que é equivalente a

$$\frac{\alpha''(y)}{\alpha'(y)^2 + 1} = -\frac{\beta''(z)}{\beta'(z)^2 - 1}.$$

Uma vez que  $y$  e  $z$  são variáveis independentes, cada lado da equação é constante. Indicando por  $a \in \mathbb{R}$  esta constante, obtemos duas equações diferenciáveis ordinárias:

$$\begin{cases} \alpha''(y) = a(\alpha'(y)^2 + 1) \\ \beta''(z) = -a(\beta'(z)^2 - 1). \end{cases} \quad (2.4.6)$$

Portanto,

1. Se  $a = 0$ , então  $\alpha''(y) = \beta''(z) = 0$ . Logo,  $\alpha(y) = a_1y + b_1$  e  $\beta(z) = a_2z + b_2$ . Portanto,  $f(y, z) = a_1y + a_2z + b_3$  onde  $a_2^2 - a_1^2 < 1$ .

2. Se  $a \neq 0$ , então a solução de (2.4.6) é

$$\alpha(y) = -\frac{1}{a} \ln(|\cos(ay)|) \quad \text{e} \quad \beta(z) = \frac{1}{a} \ln(\cosh(az)),$$

onde  $\Omega = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2; \frac{\pi}{4a} < y < \frac{7\pi}{4a} \right\}$ . Logo,

$$\begin{aligned} f_z^2 - f_y^2 &= \left( \frac{\sinh(az)}{\cosh(az)} \right)^2 - \left( \frac{\sin(ay)}{\cos(ay)} \right)^2 \\ &= 1 - \tan^2 ay < 0, \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

## 2.4 Gráficos Mínimos do tipo tempo em $\mathbb{L}^3$

pois  $\left| \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \right| < 1$ , para todo  $z \in \mathbb{R}$  e  $|y| > \frac{\pi}{4a}$ . Portanto, o gráfico da função dada por:

$$f(y, z) = -\frac{1}{a} \ln(|\cos(ay)|) + \frac{1}{a} \ln(\cosh(az))$$

é uma superfície mínima do tipo tempo.

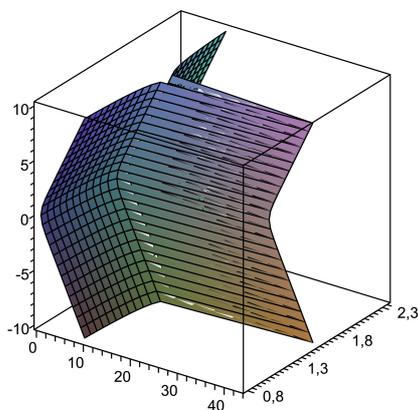


Figura 2.3: Superfície do tipo Scherk 2.

**Exemplo 2.4.7.** Vamos considerar superfícies do tipo gráfico cujas curvas de níveis são retas. Seja a curva de nível  $\alpha(t) = (f(y(t), z(t)), y(t), z(t))$  tal que  $f(y(t), z(t)) = c$ . Então,

$$f_y y' + f_z z' = 0.$$

Uma vez que a curva está contida em um plano paralelo ao plano  $(y, z)$ , que possui a métrica Lorentziana  $dy^2 - dz^2$ , então  $(f_y, -f_z)$  é ortogonal á curva, o que implica que  $\alpha'(t) = (-f_z, f_y)$ . Portanto,

$$\alpha''(t) = (y'', z'') = (-f_y f_{zz} + f_{yz} f_z, -f_z f_{yy} + f_{yz} f_y).$$

Como a curva é uma reta, temos que  $\alpha''(t) = 0$ . Logo,

$$\begin{cases} -f_y f_{zz} + f_{yz} f_z = 0 \\ -f_z f_{yy} + f_{yz} f_y = 0 \end{cases}$$

## 2. Subvariedades mínimas em variedades Lorentzianas

---

e

$$\begin{cases} -f_y^2 f_{zz} + f_{yz} f_z f_y = 0 \\ -f_z^2 f_{yy} + f_{yz} f_y f_z = 0. \end{cases}$$

Portanto,

$$-f_y^2 f_{zz} + 2f_{yz} f_z f_y - f_z^2 f_{yy} = 0.$$

Como estamos procurando gráficos mínimos, temos que  $f(y, z)$  satisfaz a equação (2.4.5), logo

$$f_{zz} - f_{yy} = 0. \quad (2.4.8)$$

Temos os seguintes casos:

1. A curva de nível é uma reta do tipo espaço, isto é,  $f_z^2 - f_y^2 > 0$ , então a solução de (2.4.8) é

$$f(y, z) = A \operatorname{arctanh}\left(\frac{z}{y}\right) + B,$$

onde  $A, B \in \mathbb{R}$ . Portanto o gráfico de  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $\Omega = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; y^2 - z^2 > A^2\}$  é uma superfície do tipo tempo que é um pedaço do helicóide Lorentziano

$$\varphi(u, v) = (Av + B, u \cosh v, u \sinh v),$$

onde  $u \in \mathbb{R}$  tal que  $|u| > |A|$ . Veja Figura 2.4(a).

2. A curva de nível é uma reta do tipo tempo, isto é,  $f_z^2 - f_y^2 < 0$ , então a solução de (2.4.8) é

$$f(y, z) = A \operatorname{arctanh}\left(\frac{y}{z}\right) + B,$$

onde  $A, B \in \mathbb{R}$ . Portanto o gráfico de  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , onde

$$\Omega = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}; y^2 - z^2 < 0\},$$

é uma superfície do tipo tempo que é um pedaço do helicóide Lorentziano

$$\varphi(u, v) = (Av + B, u \sinh v, u \cosh v),$$

onde  $u \in \mathbb{R}$ . Veja Figura 2.4(b).

## 2.4 Gráficos Mínimos do tipo tempo em $\mathbb{L}^3$

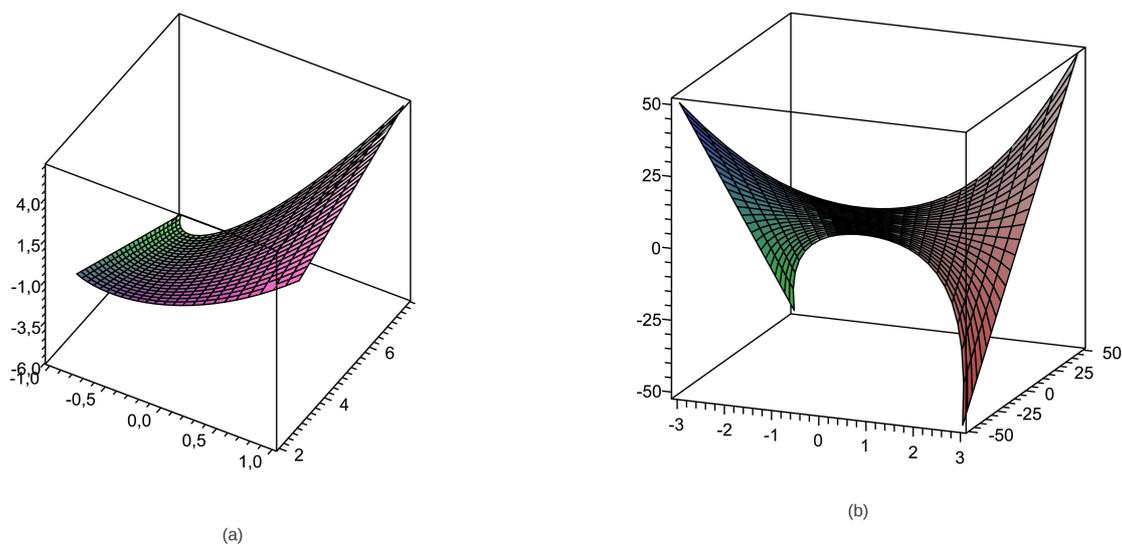


Figura 2.4: (a) Helicóide Lorentziano 1 e (b) Helicóide Lorentziano 2.

3. A curva de nível é uma reta do tipo luz, isto é,  $f_z^2 - f_y^2 = 0$ , então a solução de (2.4.8) é

$$f(y, z) = Ah(y + z) + B,$$

onde  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$ . Portanto o gráfico de  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma superfície do tipo tempo. Como exemplo, podemos escolher  $h(w) = \cosh(w)$  obtendo

$$f(y, z) = \cosh(y + z),$$

que está definida em todo  $\mathbb{R}^2$ . Portanto o gráfico de  $f$  é uma superfície mínima do tipo tempo completa.

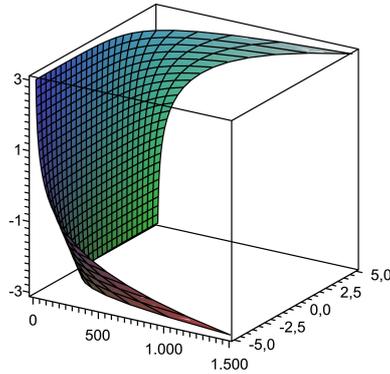


Figura 2.5: A superfície gráfico de  $f(y, z) = \cosh(y + z)$ .

**Exemplo 2.4.8.** [Catenóide Hiperbólico Lorentziano] Vamos considerar agora  $f(y, z) = h(z^2 - y^2)$ , onde  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^2$ . Como

$$\begin{cases} f_y = -2yh' & \text{e} & f_z = 2zh' \\ f_{yy} = -2h' + 4y^2h'' & , & f_{zz} = 2h' + 4z^2h'' & \text{e} & f_{yz} = -4yzh'' \end{cases} \quad (2.4.9)$$

então a condição (2.4.5) se transforma em

$$xh''(x) - 2x(h'(x))^3 + h'(x) = 0, \quad (2.4.10)$$

cuja solução é

$$h(x) = \frac{2}{c} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{c\sqrt{x}}{2}\right), \quad (2.4.11)$$

onde  $c \in \mathbb{R}$  é uma constante não nula. Portanto o gráfico de  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\Omega = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; z^2 - y^2 > 0\}$  é uma superfície do tipo tempo pois

$$f_z^2 - f_y^2 = \frac{4}{4 + c^2(z^2 - y^2)} < 1.$$

Observe que esta superfície pode ser parametrizada por

$$\varphi(u, v) = \left(\frac{2}{c} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{c|u|}{2}\right), u \sinh v, u \cosh v\right),$$

## 2.4 Gráficos Mínimos do tipo tempo em $\mathbb{L}^3$

---

onde  $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \neq 0\}$ .

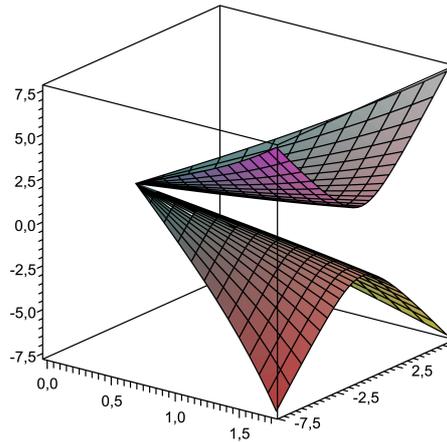


Figura 2.6: Catenóide hiperbólico Lorentziano.

Com estes exemplos, concluímos que o helicóide não é a única superfície mínima regrada do tipo-tempo em  $\mathbb{L}^3$ . Para concluir esta seção, vamos fazer algumas observações sobre o Teorema de Bernstein, cuja versão clássica de Bernstein estabelece que se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável cujo gráfico é uma superfície mínima, então tal gráfico é um plano. Este resultado foi estendido por Ossermann que provou que uma superfície mínima completa do tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$  é um plano. Para gráficos mínimos completos de tipo-tempo, o resultado não vale, como mostra o Exemplo 2.5. Porém T. Weierstrass tem provado que um gráfico mínimo completo do tipo-tempo é conformemente equivalente ao plano de Lorentz  $\mathbb{L}^2$ . Este resultado é significativo pois o teorema da uniformização para superfícies Riemannianas não vale para superfícies Lorentzianas e, de fato, temos infinitas classes conformes de superfícies Lorentzianas simplesmente conexas (ver a Observação 1.6.6 do Capítulo 1).



# Capítulo 3

## A representação de Weierstrass

A fórmula da representação de Weierstrass é uma ferramenta básica na teoria clássica de superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$ . Uma versão local pode ser dada da seguinte maneira:

**Teorema 3.0.1. (Representação de Weierstrass).** Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  um conjunto aberto dotado de uma coordenada complexa  $z = u + iv$ . Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão mínima conforme. Definimos  $\phi \in \Gamma(f^*TM \otimes \mathbb{C})$  como o vetor tangente complexo

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} - i \frac{\partial f}{\partial v} \right).$$

Então, as componentes Euclidianas  $\phi_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ , de  $\phi$  definidas por:

$$\phi = \sum_{a=1}^3 \phi_a \frac{\partial}{\partial x_a},$$

satisfazem as seguintes condições:

- i)  $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 > 0$ ,
- ii)  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ ,
- iii)  $\frac{\partial \phi_a}{\partial \bar{z}} = 0$ .

Além disso, se  $\Omega$  é simplesmente conexo,  $\phi_a : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $a = 1, 2, 3$ , são funções satisfazendo as três condições acima e  $z_o \in \Omega$ , então a aplicação:

$$f = 2 \operatorname{Re} \left( \int_{z_o}^z \phi dz \right) \tag{3.0.1}$$

é bem definida e representa uma imersão mínima conforme.

**Observação 3.0.2.** As formas  $\phi_i dz$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são fechadas pois  $\phi_i$  são holomorfas. Portanto,  $\phi_i dz$  são exatas se  $\Omega$  for simplesmente conexo, e as integrais em (3.0.1) não dependem do caminho da integração escolhido.

A condição *i*) do Teorema 3.0.1 nos diz que  $f$  é uma imersão, *ii*) que  $f$  é conforme e *iii*) que  $f$  é mínima. Para mais detalhes veja [4], por exemplo.

A fórmula da representação de Weierstrass tem uma dupla importância. Por um lado é uma grande ferramenta para a produção de exemplos, e por outro lado permite o uso da teoria de funções holomorfas para a investigação de propriedades estruturais de superfícies mínimas.

Um exemplo típico de um resultado geral que deriva do Teorema 3.0.1 é o Teorema de Björling que afirma que, dada uma curva real analítica  $\beta : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$  e um campo de vetores analítico unitário  $\xi$  ao longo de  $\beta$ , com  $\langle \xi, \dot{\beta} \rangle = 0$ , existem  $\epsilon > 0$  e uma imersão mínima conforme

$$f : (0, 1) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que  $f(t, 0) = \beta(t)$  e  $\xi$  é normal a  $f$  ao longo de  $\beta$ . Além disso, duas tais imersões coincidem ao longo da intersecção de seus domínios.

### 3.1 Superfícies mínimas no espaço de Lorentz-Minkowski

Para o caso de imersões mínimas tipo espaço no espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^3$ , um teorema do tipo representação de Weierstrass foi provado por Kobayashi em [13] e pode ser enunciado da seguinte maneira:

**Teorema 3.1.1.** Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  um conjunto aberto dotado de uma coordenada complexa  $z = u + iv$ . Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma imersão mínima conforme do tipo espaço. Então as componentes do vetor tangente complexo

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{a=1}^3 \phi_a \frac{\partial}{\partial x_a},$$

satisfazem as seguintes condições:

- i)  $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 - |\phi_3|^2 > 0$ ,
- ii)  $\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 = 0$ ,
- iii)  $\frac{\partial \phi_a}{\partial \bar{z}} = 0$ .

### 3.1 Superfícies mínimas no espaço de Lorentz-Minkowski

---

Além disso, se  $\Omega$  é simplesmente conexo e  $\phi_a : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, a = 1, 2, 3$ , são funções satisfazendo as condições acima, então a aplicação:

$$f = 2 \operatorname{Re} \left( \int \phi dz \right)$$

é uma imersão mínima conforme do tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$ .

No caso de superfícies mínimas do tipo tempo em  $\mathbb{L}^3$  é exigido que parâmetros locais pertençam a uma estrutura de Lorentz nessas superfícies. Essa estrutura é modelada através da álgebra dos números paracomplexos  $\mathbb{L} = \{a + \tau b : a, b \in \mathbb{R}\}$ , onde  $\tau^2 = 1$  (Veja Apêndice A). Novamente, nós temos um teorema do tipo representação de Weierstrass para imersões do tipo tempo que foi provado por Konderak em [15] e pode ser enunciado da seguinte maneira:

**Teorema 3.1.2.** Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{L}$  um conjunto aberto dotado de uma coordenada paracomplexa  $z = u + \tau v$ . Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma imersão mínima conforme do tipo tempo. Então as componentes do vetor tangente paracomplexo definidas por:

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{a=1}^3 \phi_a \frac{\partial}{\partial x_a},$$

satisfazem as seguintes condições:

- i)  $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 - |\phi_3|^2 > 0$ ,
- ii)  $\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 = 0$ ,
- iii)  $\frac{\partial \phi_a}{\partial \bar{z}} = 0$ .

Além disso, se  $\Omega$  é simplesmente conexo e  $\phi_a : \Omega \rightarrow \mathbb{L}, a = 1, 2, 3$ , são funções satisfazendo as condições acima, então a aplicação

$$f = 2 \operatorname{Re} \left( \int \phi dz \right)$$

é uma imersão mínima conforme do tipo tempo em  $\mathbb{L}^3$ .

**Observação 3.1.3.** No teorema acima as derivadas  $\frac{\partial \phi_a}{\partial \bar{z}}$  são no sentido de Lorentz. Como no caso complexo, a condição  $\frac{\partial \phi_a}{\partial \bar{z}} = 0$  nos garante que a integral não depende da escolha do caminho (veja Apêndice A).

Nos teoremas anteriores o fato que a codimensão da imersão é 1 é irrelevante. A condição essencial é que  $\Omega$  seja bidimensional.

## 3.2 Superfícies Mínimas em Variedades Lorentzianas

No caso de superfícies mínimas em variedades Riemannianas  $n$ -dimensionais uma representação de tipo Weierstrass foi obtida por F. Mercuri, S. Montaldo e P. Piu em [18]. A representação de Weierstrass para superfícies mínimas em variedades Lorentzianas 3-dimensionais se encontra em [16]. Vamos agora generalizar esta última para variedades Lorentzianas  $n$ -dimensionais.

Seja, então,  $\overline{M}^n$  uma variedade munida de uma métrica Lorentziana  $g$  e  $f : M \rightarrow \overline{M}$  uma superfície de classe  $C^\infty$  com uma métrica  $h$  não-degenerada. Temos que a aplicação  $f$  induz uma métrica  $s = f^*(g)$  que geralmente não tem relação com  $h$ .

Sejam  ${}_g\nabla$ ,  ${}_h\nabla$  e  ${}_s\nabla$  as derivadas covariantes com respeito as métricas  $g$ ,  $h$  e  $s$  respectivamente.

**Definição 3.2.1.** Diremos que  $f : M^2 \rightarrow \overline{M}^n$  é *harmônica* se, e somente se,

$$\tau_h(f) = \text{tr}_h({}_h\nabla df) = 0,$$

O campo  $\tau(f)$  é dito *campo de tensão* de  $f$ .

Em termos de coordenadas locais  $\{u_1, u_2\}$  em  $M$  e  $\{x_1, \dots, x_n\}$  em  $\overline{M}$  podemos escrever

$$h = \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} du_i du_j.$$

Portanto,

$$\tau_h(f) = \sum_{\alpha=1}^n \left\{ \Delta_h f_\alpha + \sum_{i,j=1}^2 h^{ij} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^n g \Gamma_{\beta,\gamma}^\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial u_i} \frac{\partial f_\gamma}{\partial u_j} \right\} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad (3.2.1)$$

onde  $(h^{ij})$  é a inversa da matriz  $(h_{ij})$  e  $\Delta_h$  é o operador de Laplace-Beltrami (2.3.1) para  $h$ .

**Definição 3.2.2.** Chamaremos  $\mathcal{H}^h = \text{tr}_h \alpha$  de *vetor curvatura média-h* em  $f$ .

**Proposição 3.2.3.** Uma aplicação  $f : (M, h) \rightarrow (\overline{M}, g)$  de classe  $C^\infty$  é harmônica se, e somente se,  $f : (M, \lambda h) \rightarrow (\overline{M}, g)$  é harmônica para toda função  $\lambda \neq 0$  em  $M$  de classe  $C^\infty$ .

*Demonstração.* Tomando coordenadas isotérmicas  $\{u_1, u_2\}$  em  $M$ , podemos escrever a métrica  $h = \varphi du_1^2 + \varepsilon \varphi du_2^2$ , onde  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função positiva de classe  $C^\infty$  e  $\varepsilon = 1$ , se  $f$  é do tipo-espaço ( $\varepsilon = -1$ , se  $f$  é do tipo-tempo). De (2.3.3) e (3.2.1) temos que o campo de tensão de  $f$  é dado por

$$\tau_h(f) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{\varphi} \left\{ \left( \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial u_1^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial u_2^2} \right) + \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^n g \Gamma_{\beta,\gamma}^\alpha \left( \frac{\partial f_\beta}{\partial u_1} \right)^2 + \varepsilon \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^n g \Gamma_{\beta,\gamma}^\alpha \left( \frac{\partial f_\beta}{\partial u_2} \right)^2 \right\} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}. \quad (3.2.2)$$

### 3.2 Superfícies Mínimas em Variedades Lorentzianas

Portanto, para a métrica  $h_1 = \lambda h$  de (3.2.2) resulta que

$$\tau_{h_1}(f) = \frac{1}{\lambda} \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{\varphi} \left\{ \left( \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial u_1^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial u_2^2} \right) + \sum_{\alpha,\beta=1}^n g^{\Gamma_{\beta,\gamma}^\alpha} \left( \frac{\partial f_\beta}{\partial u_1} \right)^2 + \varepsilon \sum_{\alpha,\beta=1}^n g^{\Gamma_{\beta,\gamma}^\alpha} \left( \frac{\partial f_\beta}{\partial u_2} \right)^2 \right\} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

Logo,

$$\tau_{h_1}(f) = \frac{1}{\lambda} \tau_h(f),$$

e o resultado segue.  $\square$

**Definição 3.2.4.** Seja  $f : (M, h) \rightarrow (\overline{M}, g)$  de classe  $\mathbb{C}^\infty$ . O par de métricas  $h = \sum_{i,j=1}^2 h_{ij} du_i du_j$  e  $s = \sum_{i,j=1}^2 s_{ij} du_i du_j$  em  $M$  define as funções

$$H = H(h, s) = \frac{h_{22}s_{11} + h_{11}s_{22} - 2h_{12}s_{12}}{2 \det h} \quad \text{e} \quad K = K(h, s) = \frac{\det s}{\det h}.$$

A função  $H$  é também conhecida como a *função energia*  $E$  de  $f$ .

1. Se  $H(h, s) \neq 0$ , a métrica  $\Upsilon = |H|h$  é chamada de *métrica de energia* 1.
2. Se  $K(h, s) \neq 0$ , a métrica  $II = \sqrt{|K|}h$  é chamada de *métrica equiareal*.

**Teorema 3.2.5.** Uma aplicação  $f : (M, h) \rightarrow (\overline{M}, g)$  de classe  $\mathbb{C}^\infty$  com  $K \neq 0$  é harmônica se, e somente se,

$$(i) \quad \begin{cases} L_{u_2} - M_{u_1} = L({}_s\Gamma_{12}^1) + M({}_s\Gamma_{12}^2 - {}_s\Gamma_{11}^1) - N({}_s\Gamma_{11}^2), \\ M_{u_2} - N_{u_1} = L({}_s\Gamma_{22}^1) + M({}_s\Gamma_{22}^2 - {}_s\Gamma_{12}^1) - N({}_s\Gamma_{12}^2). \end{cases} \quad (3.2.3)$$

$$(ii) \quad \mathcal{H}^h = 0,$$

onde  $II = L du_1^2 + 2M du_1 du_2 + N du_2^2$ .

As equações (3.2.3) são conhecidas com as equações de *Codazzi-Mainardi* e a demonstração do Teorema 3.2.5 pode ser encontrada em [20].

**Definição 3.2.6.** Seja  $f : (M, h) \rightarrow (\overline{M}, g)$  de classe  $\mathbb{C}^\infty$ . Então:

1.  $f$  é dita uma *imersão isométrica* se, e somente se,  $s = h$ .
2.  $f$  é dita uma *imersão conforme* se, e somente se,  $s = \lambda h$ , para alguma função  $\lambda \neq 0$  em  $M$  de classe  $C^\infty$ .

**Definição 3.2.7.** Uma aplicação  $f : (M, h) \rightarrow (\overline{M}, g)$  de classe  $\mathbb{C}^\infty$  é dita uma *imersão mínima* se, e somente se,  $\det s \neq 0$  e  $\mathcal{H}^s = 0$ .

**Lema 3.2.8.** Uma imersão isométrica  $f : (M, h) \rightarrow (\overline{M}, g)$  de classe  $\mathbb{C}^\infty$  é harmônica se, e somente se, é uma imersão mínima.

*Demonstração.* Como  $f$  é uma imersão isométrica, temos que  $s = h$ . Então

- $\det s = \det h \neq 0$ ,
- $K = \frac{\det s}{\det h} = \frac{\det h}{\det h} = 1 \neq 0$ ,
- as métricas  $s$  e  $h$  satisfazem as equações de Codazzi-Mainardi,
- $\mathcal{H}^h = \mathcal{H}^s$ .

Logo, pelo Teorema 3.2.5, temos que  $f$  é harmônica se, e somente se,  $\mathcal{H}^h = 0$ , ou seja,  $\mathcal{H}^s = 0$ . Portanto pela Definição 3.2.7  $f$  é harmônica, se, e somente se,  $f$  for mínima.  $\square$

**Teorema 3.2.9.** Uma imersão conforme  $f : (M, h) \rightarrow (\overline{M}, g)$  de classe  $\mathbb{C}^\infty$  é harmônica se, e somente se, é uma imersão mínima.

*Demonstração.* Como  $f$  é uma imersão conforme temos que  $s = \lambda h$ , para alguma função  $\lambda \neq 0$  em  $M$  de classe  $C^\infty$ .

Seja  $h_1 = \lambda h$ . Assim  $h_1 = s$  e pelo item *i*) da Definição 3.2.6 temos que  $f : (M, h_1) \rightarrow (\overline{M}, g)$  é uma imersão isométrica. Portanto, pelo Lema 3.2.8, temos que  $f : (M, h_1) \rightarrow (\overline{M}, g)$  é uma imersão harmônica se, e somente se, é mínima.

Agora pela Proposição 3.2.3 temos que  $f : (M, h) \rightarrow (\overline{M}, g)$  é harmônica se, e somente se,  $f : (M, h_1) \rightarrow (\overline{M}, g)$  é harmônica. Portanto  $f : (M, h) \rightarrow (\overline{M}, g)$  é harmônica se, e somente se, é mínima.  $\square$

Consideremos o caso de imersões tipo-espaço e tipo-tempo em uma mesma abordagem. Para isto denotaremos por  $\mathbb{K}$  o conjunto  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{L}$  e  $M$  denotará uma superfície de Riemann (no caso tipo-espaço) ou uma superfície de Lorentz (no caso tipo-tempo).

Seja  $(\overline{M}^n, g)$  uma variedade Lorentziana  $n$ -dimensional e  $f : M \rightarrow \overline{M}^n$  uma aplicação suave. A métrica Lorentziana e a conexão de Levi-Civita de  $\overline{M}$  induzem no fibrado pullback  $f^*(T\overline{M})$  uma métrica e uma conexão compatível, a conexão pullback. Considere o fibrado (para)complexificado  $\mathbb{E} = f^*(T\overline{M}) \otimes \mathbb{K}$ . A métrica  $g$  pode ser estendida para  $\mathbb{E}$  das seguintes maneiras:

- uma forma bilinear (para)complexa  $(\cdot, \cdot) : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{K}$ ;

### 3.2 Superfícies Mínimas em Variedades Lorentzianas

---

- uma métrica (para)Hermitiana  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{K}$ ;

Estas duas extensões são relacionadas por:

$$\langle\langle V, W \rangle\rangle = (V, \bar{W}).$$

Sejam  $(u, v)$  coordenadas locais em  $M$ .

- Se  $M$  é uma superfície de Riemann, seja  $z = u + iv$  o parâmetro local complexo e defina

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

- Se  $M$  é uma superfície de Lorentz, seja  $z = u + \tau v$  o parâmetro local paracomplexo e defina

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + \tau \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - \tau \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Podemos olhar

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial z}$$

como uma seção de  $\mathbb{E}$  e nós temos as seguintes propriedades:

- Se  $f$  é uma imersão então  $\langle\langle \phi, \phi \rangle\rangle \neq 0$ .

De fato, se  $f$  é uma imersão do tipo tempo, sendo que  $\phi = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right)$ , então

$$\begin{aligned} \langle\langle \phi, \phi \rangle\rangle &= \left\langle \left\langle \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right), \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right\rangle \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) - \frac{\tau}{4} g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \frac{\tau}{4} g \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) - \frac{\tau^2}{4} g \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[ g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) - g \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right), \end{aligned}$$

pois foram escolhidas coordenadas isotérmicas. Analogamente, se  $f$  é uma imersão do tipo-espaço temos que  $\langle\langle \phi, \phi \rangle\rangle \neq 0$ .

- Se  $f$  é uma imersão então,  $f$  é conforme se, e somente se,  $(\phi, \phi) = 0$ .

De fato, se  $f$  é uma imersão do tipo-tempo, temos que

$$\begin{aligned} (\phi, \phi) &= \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right), \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4} g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \tau \frac{1}{4} g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) + \tau \frac{1}{4} g \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \tau^2 \frac{1}{4} g \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[ g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u} \right) + g \left( \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right] + \frac{\tau}{2} g \left( \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Portanto,  $(\phi, \phi) = 0$  se, e somente se,

$$g\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) = -g\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) \quad \text{e} \quad g\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0,$$

ou seja se, e somente se,  $f$  é conforme. Analogamente, se  $f$  é uma imersão do tipo-espaço temos que  $f$  é conforme se, e somente se,  $(\phi, \phi) = 0$ .

Seja  $f$  uma imersão do tipo-espaço (ou tipo-tempo) e  $z = u + iv$  (ou  $u + \tau v$ ) um parâmetro isotérmico local. Então a métrica induzida em  $M$  é dada por:

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 \pm dv^2) = \lambda^2|dz|^2$$

e o operador de Laplace-Beltrami em  $M$  é definido por

$$\Delta_s = \lambda^{-2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} \pm \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) = 4\lambda^{-2}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Seja  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  um sistema de coordenadas locais em uma vizinhança  $U$  de  $\bar{M}^n$  tal que  $U \cap f(M) \neq \emptyset$ , então em um conjunto aberto  $\Omega \subset M$ , temos que  $\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , onde  $\phi_i$  são funções (para)complexas definidas em  $\Omega$ . Logo, com respeito à decomposição local de  $\phi$ ,  $\tau_s(f)$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \tau_s(f) &= \sum_{i=1}^n \left\{ \Delta_s f_i + 4\lambda^{-2} \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f_k}{\partial z} \right\} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= 4\lambda^{-2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \bar{\phi}_j \phi_k \right\} \frac{\partial}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

onde  $\Gamma_{jk}^i$  são os símbolos de Christoffel de  $\bar{M}$ .

Agora pelo Teorema 3.2.9 temos que  $f$  é mínima se, e somente se, é harmônica. Da Definição 3.2.1,  $f$  é mínima se, e somente se,  $\tau(f) = 0$ , ou seja

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \bar{\phi}_j \phi_k = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2.4)$$

Podemos olhar (3.2.4) como um sistema de primeira ordem de equações diferenciais em  $\phi_i$ , que pode ser escrito como

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} + 2 \sum_{j>k} \Gamma_{jk}^i \operatorname{Re}(\bar{\phi}_j \phi_k) + \sum_j \Gamma_{jj}^i |\phi_j|^2 = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Portanto  $\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} \in \mathbb{R}$ . Logo,

### 3.2 Superfícies Mínimas em Variedades Lorentzianas

- Se  $M$  é uma superfície de Riemann, temos que

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \operatorname{Re}(\phi_i)}{\partial u} - \frac{\partial \operatorname{Im}(\phi_i)}{\partial v} \right) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial \operatorname{Im}(\phi_i)}{\partial u} + \frac{\partial \operatorname{Re}(\phi_i)}{\partial v} \right).$$

- Se  $M$  é uma superfície de Lorentz, temos que

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \operatorname{Re}(\phi_i)}{\partial u} - \frac{\partial \operatorname{Im}(\phi_i)}{\partial v} \right) + \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial \operatorname{Im}(\phi_i)}{\partial u} - \frac{\partial \operatorname{Re}(\phi_i)}{\partial v} \right).$$

Assim, obtemos que

$$\frac{\partial \operatorname{Im}(\phi_i)}{\partial u} \pm \frac{\partial \operatorname{Re}(\phi_i)}{\partial v} = 0. \quad (3.2.5)$$

A equação (3.2.5) diz que a 1-forma  $\phi_i dz$  não tem períodos reais, então a integral  $\operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi_i dz$  está bem-definida. Portanto demonstramos o seguinte

**Teorema 3.2.10** (Representação de Weierstrass). Seja  $(\bar{M}^n, g)$  uma variedade Lorentziana e  $\{x_1, \dots, x_n\}$  coordenadas locais. Sejam  $\phi_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , funções (para)complexas em um domínio aberto simplesmente conexo  $\Omega \subset \mathbb{K}$  que são soluções de (3.2.4). Então a aplicação  $f : \Omega \rightarrow \bar{M}$  com funções coordenadas

$$f_j(u, v) = 2 \operatorname{Re} \left( \int_{z_0}^z \phi_j dz \right), \quad j = 1, \dots, n,$$

é bem-definida e define uma imersão mínima conforme do tipo-tempo (ou tipo-espaço) se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas

- $\sum_{j,k=1}^n g_{jk} \bar{\phi}_j \phi_k \neq 0$ ;
- $\sum_{j,k=1}^n g_{jk} \phi_j \phi_k = 0$ .

#### 3.2.1 A Representação de Weierstrass para o caso de grupos de Lie

Seja  $G$  um grupo de Lie  $n$ -dimensional dotado de uma métrica invariante à esquerda Lorentziana e com a conexão de Levi-Civita  $\nabla$ . Sejam  $\Omega \subset \mathbb{K}$  um conjunto aberto e  $f : \Omega \rightarrow G$  uma imersão mínima conforme do tipo-tempo (ou do tipo espaço) e  $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  um referencial ortonormal de campos invariantes à esquerda com  $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$  do tipo-espaço e  $E_n$  do tipo-tempo.

Fixado um parâmetro isotérmico  $z \in \Omega$ , podemos escrever o campo tangente (para)complexo  $\frac{\partial f}{\partial z}$  ao longo de  $f$  tanto em termos de coordenadas locais  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  em  $G$ , como usando os campos invariantes à esquerda. Portanto, temos que

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \psi_j E_j,$$

onde as funções  $\phi_i$  e  $\psi_j$ , com  $i, j = 1, \dots, n$ , estão relacionadas por

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \psi_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2.6)$$

onde  $A : \Omega \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ . Em termos das componentes  $\psi_i$  a equação (3.2.4) pode ser escrita como

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n L_{jk}^i \bar{\psi}_j \psi_k = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2.7)$$

onde os símbolos  $L_{jk}^i$  são definidos por

$$\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^n \frac{L_{jk}^i}{2} E_k,$$

com  $i, j = 1, \dots, n$ .

Sejam  $C_{ij}^k$  as constantes de estrutura da álgebra de Lie de  $G$ , ou seja,  $[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k E_k$ . Assim, pelo Teorema de Levi-Civita, temos que

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle &= -\langle [E_j, E_k], E_i \rangle - \langle [E_i, E_k], E_j \rangle - \langle [E_j, E_i], E_k \rangle \\ &= -C_{jk}^i \langle E_i, E_i \rangle - C_{ik}^j \langle E_j, E_j \rangle + C_{ij}^k \langle E_k, E_k \rangle. \end{aligned}$$

Como

$$\langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle = \frac{L_{ij}^k}{2} \langle E_k, E_k \rangle,$$

então,

$$L_{ij}^k \langle E_k, E_k \rangle^2 = -C_{jk}^i \langle E_i, E_i \rangle \langle E_k, E_k \rangle - C_{ik}^j \langle E_j, E_j \rangle \langle E_k, E_k \rangle + C_{ij}^k \langle E_k, E_k \rangle^2.$$

Portanto,

$$L_{ij}^k = C_{ij}^k - C_{jk}^i \varepsilon_i \varepsilon_k - C_{ik}^j \varepsilon_j \varepsilon_k, \quad (3.2.8)$$

onde  $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$ , com  $i = 1, \dots, n$ . Assim o Teorema 3.2.10 pode ser escrito no caso de um grupo de Lie  $n$ -dimensional da seguinte maneira:

**Teorema 3.2.11.** Seja  $G$  um grupo de Lie  $n$ -dimensional dotado de uma métrica Lorentziana invariante à esquerda e  $\{E_1, \dots, E_n\}$  campos ortonormais invariantes à esquerda. Seja  $f : \Omega \rightarrow G$  uma imersão mínima conforme do tipo-tempo (ou do tipo-espaço), onde  $\Omega \subseteq \mathbb{K}$  é um conjunto aberto. Defina o vetor tangente (para)complexo  $\phi \in \Gamma(f^*TG \otimes \mathbb{K})$  por

$$\phi(z) = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

### 3.2 Superfícies Mínimas em Variedades Lorentzianas

---

Então, as componentes  $\psi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , de  $\phi$  definidas por

$$\phi(z) = \sum_{i=1}^n \psi_i E_i,$$

satisfazem as seguintes condições:

- i.  $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \dots + |\psi_{n-1}|^2 - |\psi_n|^2 \neq 0$ ,
- ii.  $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots + \psi_{n-1}^2 - \psi_n^2 = 0$ ,
- iii.  $\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n L_{jk}^i \bar{\psi}_j \psi_k = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Respectivamente, se  $\Omega$  é um conjunto simplesmente conexo e  $\psi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ , com  $i = 1, \dots, n$ , satisfazem as condições acima, então a aplicação  $f : \Omega \rightarrow G$  definida por

$$f_i = 2 \operatorname{Re} \left( \int \sum_{j=1}^n A_{ij} \psi_j dz \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2.9)$$

é uma imersão mínima conforme do tipo-tempo (ou do tipo-espaço).

As equações do item iii. do Teorema 3.2.11 têm a vantagem de serem equações com coeficientes constantes, mas o uso da fórmula (3.2.9) tem problemas pois as funções  $A_{ij}$  devem ser calculadas ao longo das soluções. Porém, em muitos casos, podemos usar argumentos ad hoc para superar o problema. Vamos dar alguns exemplos a seguir:

**Exemplo 3.2.12** (O grupo produto  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ). Consideraremos o modelo do semi-plano superior para o plano hiperbólico dado por  $\mathbb{H}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$  e seja  $x_3$  o parâmetro natural em  $\mathbb{R}$ . O espaço  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  é um grupo de Lie Lorentziano com a estrutura de produto e munido da métrica invariante à esquerda Lorentziana dada por:

$$g = \frac{1}{x_2^2} (dx_1^2 + dx_2^2) - dx_3^2.$$

Com respeito à métrica  $g$ , uma base ortonormal de campos vetores invariantes à esquerda é dada por:

$$E_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad E_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{e} \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Assim a matriz definida em (3.2.6) é dada por

$$d(L_g)_h = \begin{bmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, temos que

$$\begin{cases} \phi_1(u, v) = x_2 \psi_1(u, v), \\ \phi_2(u, v) = x_2 \psi_2(u, v), \\ \phi_3(u, v) = \psi_3(u, v), \end{cases} \quad (3.2.10)$$

e, também,

$$\begin{cases} f_1(u, v) = 2 \operatorname{Re} \left( \int f_2(u, v) \psi_1(u, v) dz \right), \\ f_2(u, v) = \exp \left( 2 \operatorname{Re} \int \psi_2 dz \right), \\ f_3(u, v) = 2 \operatorname{Re} \left( \int \psi_3(u, v) dz \right). \end{cases}$$

Da segunda equação em (3.2.10) temos que  $f_2 = \exp(2 \operatorname{Re}(\int \psi_2 dz))$ . Além disso, as únicas constantes de estruturas da álgebra de Lie não nulas são  $C_{12}^1 = -1$  e  $C_{21}^1 = 1$ . Logo  $L_{12}^1 = -2$  e  $L_{11}^2 = 2$  e os outros  $L_{ij}^k$  são nulos. Assim o item iii) do Teorema 3.2.11 fica

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \psi_1 \bar{\psi}_2 = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} + \bar{\psi}_1 \psi_1 = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} = 0. \end{cases}$$

Observe que se  $\psi_2$  é  $\mathbb{L}$ -diferenciável, ou seja,  $\frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} = 0$  então  $\bar{\psi}_1 \psi_1 = 0$  e  $\psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} = 0$ . Nós podemos considerar, por exemplo, que  $\psi_1 = 0$ , ou seja, o plano  $x_1 = cte$ .

**Exemplo 3.2.13** (O grupo de Heisenberg  $\mathbb{H}_3$ ). O grupo de Heisenberg  $\mathbb{H}_3$  é um grupo de Lie nilpotente de grau 2 representado por

$$\mathbb{H}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z + \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

A álgebra de Lie  $\mathfrak{h}_3$  de  $\mathbb{H}_3$  é representada pelas matrizes da forma

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Seja  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{H}_3$  a aplicação dada por

$$\varphi(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & x & z + \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 3.2 Superfícies Mínimas em Variedades Lorentzianas

---

O grupo de Heisenberg é isomorfo a  $\mathbb{R}^3$  com o produto

$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2)),$$

onde esse isomorfismo é dado por  $\varphi$ . Considere a métrica Lorentziana invariante à esquerda dada por

$$g = dx^2 + dy^2 - \left( \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + dz \right)^2.$$

Então, uma base ortonormal de campos invariantes à esquerda é dada por

$$E_1(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad E_2(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{e} \quad E_3(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z},$$

com  $\{E_1, E_2\}$  tipo-espaço e  $E_3$  tipo-tempo. Logo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{y}{2} & \frac{x}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

assim

$$\begin{cases} \phi_1(u, v) = \psi_1(u, v), \\ \phi_2(u, v) = \psi_2(u, v), \\ \phi_3(u, v) = -\frac{f_2}{2}\psi_1 + \frac{f_1}{2}\psi_2 + \psi_3. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} f_1 = 2 \operatorname{Re} \left( \int \psi_1 dz \right), \\ f_2 = 2 \operatorname{Re} \left( \int \psi_2 dz \right), \\ f_3 = 2 \operatorname{Re} \int \left( -\frac{f_2}{2}\psi_1 + \frac{f_1}{2}\psi_2 + \psi_3 \right) dz. \end{cases}$$

Além disso os únicos  $L_{ij}^k$  não nulos são

$$L_{12}^3 = L_{13}^2 = L_{31}^2 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad , L_{21}^3 = L_{32}^1 = L_{23}^1 = -\frac{1}{2}.$$

Logo o item iii) do Teorema 3.2.11 se torna:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \operatorname{Re}(\bar{\psi}_3 \psi_2) = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} + \operatorname{Re}(\bar{\psi}_3 \psi_1) = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2}(\psi_1 \bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1 \psi_2) = 0. \end{cases}$$

**Exemplo 3.2.14** (O espaço de De Sitter  $\mathbb{S}_1^3$ ). O espaço De Sitter  $\mathbb{S}_1^3$  pode ser modelado com o semi-espaço,

$$\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$$

munido da métrica Lorentziana invariante à esquerda dada por

$$g = \frac{1}{x_3^2}(dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2).$$

Uma base ortonormal de campos invariantes à esquerda é dada por

$$E_1 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad E_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{e} \quad E_3 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

com  $\{E_1, E_2\}$  do tipo-espaço e  $E_3$  do tipo-tempo. Logo, sendo

$$A = \begin{bmatrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix},$$

assim

$$\begin{cases} \phi_1(u, v) = x_3 \psi_1(u, v), \\ \phi_2(u, v) = x_3 \psi_2(u, v), \\ \phi_3(u, v) = x_3 \psi_3(u, v). \end{cases} \quad (3.2.11)$$

Da terceira equação em (3.2.11) temos que  $f_3 = \exp(2 \operatorname{Re}(\int \psi_3 dz))$ . Logo,

$$\begin{cases} f_1 = 2 \operatorname{Re}(\int f_3 \psi_1 dz), \\ f_2 = 2 \operatorname{Re}(\int f_3 \psi_2 dz), \\ f_3 = \exp(2 \operatorname{Re} \int \psi_3 dz). \end{cases}$$

Observe que os únicos  $L_{ij}^k$  não nulos são  $L_{13}^1 = L_{23}^2 = L_{11}^3 = L_{22}^3 = -1$ . Logo o item iii) do Teorema 3.2.11 se torna:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi}_1 \psi_3 = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi}_2 \psi_3 = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} - (\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2) = 0. \end{cases}$$

Alguns exemplos explícitos de superfícies mínimas nos espaços acima considerados podem ser encontrados em [16] e [18].

### 3.2 Superfícies Mínimas em Variedades Lorentzianas

---

Os espaços acima considerados são importantes pois fazem partes das oito “geometrias 3-dimensionais” considerada por W.P. Thurston (veja [24] e [25]). Estas “geometrias” são espaços homogêneos simplesmente conexos, com quocientes compactos, e são

$$\mathbb{S}^3, \quad \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{H}^3, \quad \mathbb{H}_3, \quad \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \quad \widetilde{Sl(2, \mathbb{R})} \quad \text{e} \quad Sol(3),$$

onde  $\widetilde{Sl(2, \mathbb{R})}$  é o revestimento universal do grupo especial linear  $Sl(2, \mathbb{R})$  e  $Sol(3)$  é um grupo solúvel 3-dimensional.

A resposta positiva dada por G. Perelman à conjectura da geometrização garante que toda variedade Riemanniana 3-dimensional é obtida “colando pedaços” isomorfos a tais geometrias.



## Capítulo 4

# Representação de Weierstrass para espaços de Damek-Ricci

Os espaços de Damek-Ricci são grupos de Lie conexos e simplesmente conexos, onde a álgebra de Lie é soma semi-direta da álgebra generalizada de Heisenberg com um espaço vetorial unidimensional, dotado de uma métrica invariante à esquerda. Além disso, estes espaços podem ser vistos como produto semi-direto do grupo generalizado de Heisenberg com um grupo de Lie unidimensional.

Consideraremos espaços de Damek-Ricci Lorentzianos de dois tipos:

- produto semi-direto do grupo generalizado de Heisenberg com um grupo de Lie Lorentziano unidimensional,
- produto semi-direto do grupo generalizado de Heisenberg Lorentziano com um grupo de Lie Riemanniano unidimensional.

Neste capítulo consideraremos, iremos desenvolver a fórmula da representação de Weierstrass para os espaços de Damek-Ricci Lorentzianos 4-dimensionais mencionados acima e faremos alguns exemplos.

### 4.1 O caso Riemanniano

Nesta seção, seguiremos [5].

Sejam  $b_m$  e  $z_n$  espaços vetoriais reais com produto interno, de dimensão  $m$  e  $n$  respectivamente, e  $\beta : b_m \times b_m \rightarrow z_n$  uma aplicação bilinear anti-simétrica.

---

#### 4. Representação de Weierstrass para espaços de Damek-Ricci

Consideremos a soma-direta  $\mathfrak{h}_{m+n} = b_m \oplus z_n$  com o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}}$  tal que  $b_m$  e  $z_n$  são perpendiculares e definimos um homomorfismo de  $\mathbb{R}$ -álgebra  $J : z_n \rightarrow \text{End}(b_m)$ , onde  $J(Z) = J_Z$ , por

$$\langle J_Z U, V \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} = \langle \beta(U, V), Z \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}}, \quad (4.1.1)$$

para todo  $U, V \in b_m$  e  $Z \in z_n$ .

**Proposição 4.1.1.** Sejam  $U + X, V + Y \in \mathfrak{h}_{m+n}$ . Defina

$$[U + X, V + Y] = \beta(U, V). \quad (4.1.2)$$

Então  $[\cdot, \cdot]$  é um colchete de Lie em  $\mathfrak{h}_{m+n}$ , e conseqüentemente,  $\mathfrak{h}_{m+n}$  é uma álgebra de Lie.

*Demonstração.* Como  $\beta$  é bilinear e anti-simétrica temos que  $[\cdot, \cdot]$  é também bilinear e anti-simétrica, assim basta mostrar a identidade de Jacobi. Como

$$\begin{aligned} [U + X, [V + Y, W + Z]] &= [U + X, \beta(V, W)] \\ &= [U + X, 0 + \beta(V, W)] \\ &= \beta(U, 0) = 0 = 0 + 0 \\ &= \beta(0, W) + \beta(V, 0) \\ &= [\beta(U, V), W + Z] + [V + Y, \beta(U, W)] \\ &= [[U + X, V + Y], W + Z] + [V + Y, [U + X, W + Z]] \end{aligned}$$

temos o desejado. □

**Definição 4.1.2.** A álgebra de Lie  $\mathfrak{h}_{m+n}$  é dita *álgebra generalizada de Heisenberg* se

$$J_Z^2 = -\langle Z, Z \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} \text{id}_{b_m},$$

para todo  $Z \in z_n$ . Além disso, como  $\mathfrak{h}_{m+n}$  é uma álgebra de Lie real de dimensão finita, existe um grupo de Lie associado simplesmente conexo que denotamos por  $\mathbb{H}_{m+n}$ , dotado de uma métrica Riemanniana invariante à esquerda  $g$ , que é chamado de *grupo generalizado de Heisenberg*.

Considere a soma direta  $\mathfrak{s}_{m+n+1} = \mathfrak{h}_{m+n} \oplus \mathfrak{a}$ , onde  $\mathfrak{a}$  é um espaço vetorial unidimensional. Um vetor em  $\mathfrak{s}_{m+n+1}$  é escrito de uma única maneira como  $U + X + sA$ , onde  $U \in b_m, X \in z_n, s \in \mathbb{R}$  e  $A$  um vetor unitário em  $\mathfrak{a}$ .

#### 4.1 O caso Riemanniano

**Proposição 4.1.3.** Sejam  $U + X + rA, V + Y + sA \in \mathfrak{s}_{m+n+1}$ . Defina

$$\langle U + X + rA, V + Y + sA \rangle = \langle U + X, V + Y \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} + rs \quad (4.1.3)$$

e

$$[U + X + rA, V + Y + sA] = [U, V]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{1}{2}rV - \frac{1}{2}sU + rY - sX. \quad (4.1.4)$$

Então  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é uma métrica Riemanniana e  $[\cdot, \cdot]$  é um colchete de Lie em  $\mathfrak{s}_{m+n+1}$  e, conseqüentemente,  $\mathfrak{s}_{m+n+1}$  é uma álgebra de Lie com métrica Riemanniana.

*Demonstração.* Primeiramente, vamos provar que (4.1.3) é uma métrica Riemanniana. Como  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}}$  é bilinear temos que (4.1.3) é bilinear. Basta mostrar que (4.1.3) é não-degenerado e tem índice zero.

- Suponhamos que  $\langle U + X + rA, V + Y + sA \rangle = 0$ , para todo  $V + Y + sA \in \mathfrak{s}_{m+n+1}$ . Então, em particular temos

$$\langle U + X + rA, V + Y \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle U + X + rA, A \rangle = 0,$$

para todo  $V + Y \in \mathfrak{h}_{m+n}$ . Logo,

$$\langle U + X, V + Y \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} = 0 \quad \text{e} \quad r = 0.$$

Como  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}}$  é não degenerada temos que  $U + X = 0$ . Portanto (4.1.3) é não-degenerada.

- Sejam  $\{U_1, \dots, U_m\}$  e  $\{X_1, \dots, X_n\}$  bases ortonormais de  $\mathfrak{b}_m$  e  $\mathfrak{z}_n$ , respectivamente. Então  $\{U_1, \dots, U_m, X_1, \dots, X_n, A\}$  é uma base ortonormal para  $\mathfrak{s}_{m+n+1}$ . Temos que

$$\begin{cases} \langle U_i, U_i \rangle = \langle U_i, U_i \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} = 1, \\ \langle X_j, X_j \rangle = \langle X_j, X_j \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} = 1, \\ \langle A, A \rangle = 1. \end{cases} \quad (4.1.5)$$

Logo, (4.1.3) tem índice zero.

Vamos mostrar agora que (4.1.4) é um colchete de Lie. Uma vez que  $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{h}_{m+n}}$  é bilinear, temos que (4.1.4) é bilinear. Além disso,  $[U + X + rA, U + X + rA] = 0$  que implica que (4.1.4) é anti-simétrica. Então basta mostrar que (4.1.4) satisfaz a identidade de Jacobi. Temos que

$$\begin{aligned} I &= [U + X + rA, [V + Y + sA, W + Z + tA]] \\ &= [U + X + rA, [V, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{1}{2}sW - \frac{1}{2}tV + sZ - tY] \\ &= [U, \frac{1}{2}sW - \frac{1}{2}tV]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{r}{2} \left( \frac{1}{2}sW - \frac{1}{2}tV \right) + r(sZ - tY) + r[V, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} \\ &= \frac{s}{2}[U, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} - \frac{t}{2}[U, V]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + r[V, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{1}{4}rsW - \frac{1}{4}rtV + rsZ - rtY. \end{aligned}$$

---

#### 4. Representação de Weierstrass para espaços de Damek-Ricci

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} II &= [[U + X + rA, V + Y + sA], W + Z + tA] \\ &= \frac{r}{2}[V, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} - \frac{s}{2}[U, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} - t[U, V]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{1}{4}stU - \frac{1}{4}rtV + tsX - rtY \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} III &= [V + Y + sA, [U + X + rA, W + Z + tA]] \\ &= \frac{r}{2}[V, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} - \frac{t}{2}[V, U]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + s[U, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{1}{4}srW - \frac{1}{4}stU + srZ - stX. \end{aligned}$$

Observe que  $I = II + III$ . Portanto (4.1.4) satisfaz a identidade de Jacobi.  $\square$

**Definição 4.1.4.** O grupo de Lie simplesmente conexo associado a  $\mathfrak{s}_{m+n+1}$  dotado com métrica Riemanniana induzida invariante à esquerda é dito *Espaço de Damek-Ricci* e é denotado por  $\mathbb{S}_{m+n+1}$ .

**Proposição 4.1.5.** A conexão de Levi-Civita  $\nabla$  de  $\mathbb{S}_{m+n+1}$  é dada por

$$\nabla_{V+Y+sA}(U + X + rA) = -\frac{1}{2}\{J_Y U + J_X V + rV + [U, V] + 2rY - \langle U, V \rangle A - 2\langle X, Y \rangle A\}. \quad (4.1.6)$$

*Demonstração.* Usando a equação (4.1.4), resulta que

$$\begin{aligned} I &= \langle [U + X + rA, W + Z + tA], V + Y + sA \rangle \\ &= \langle [U, W]_{\mathfrak{H}_{m+n}} + \frac{1}{2}rW - \frac{1}{2}tU + rZ - tX, V + Y + sA \rangle \\ &= \langle [U, W]_{\mathfrak{H}_{m+n}} + \frac{1}{2}rW - \frac{1}{2}tU + rZ - tX, V + Y \rangle. \end{aligned}$$

Como  $b_m$  e  $z_n$  são ortogonais temos que

$$I = \langle [U, W], Y \rangle + \langle \frac{1}{2}rW, V \rangle - \langle \frac{1}{2}tU, V \rangle + \langle rZ, Y \rangle - \langle tX, Y \rangle.$$

Usando (4.1.1) e (4.1.2), obtemos:

$$\begin{aligned} I &= \langle J_Y U, W \rangle + \langle \frac{1}{2}rV, W \rangle - \frac{1}{2}t\langle U, V \rangle + \langle rY, Z \rangle - t\langle X, Y \rangle \\ &= \langle J_Y U, W + Z \rangle + \langle \frac{1}{2}rV, W + Z \rangle - \frac{1}{2}t\langle U, V \rangle + \langle rY, W + Z \rangle - t\langle X, Y \rangle \\ &= \langle J_Y U + \frac{1}{2}rV + rY, W + Z \rangle - [\frac{1}{2}t\langle U, V \rangle + t\langle X, Y \rangle]. \end{aligned}$$

Portanto, de (4.1.3), temos que

$$I = \langle J_Y U + \frac{1}{2}rV + rY - \frac{1}{2}\langle U, V \rangle A - \langle X, Y \rangle A, W + Z + tA \rangle. \quad (4.1.7)$$

## 4.1 O caso Riemanniano

---

Analogamente, obtemos que

$$II = \langle J_X V + \frac{1}{2}sU + sX - \frac{1}{2}\langle U, V \rangle A - \langle X, Y \rangle A, W + Z + tA \rangle \quad (4.1.8)$$

e

$$III = \langle [U, V]_{\mathbb{H}_{m+n}} + \frac{1}{2}rV - \frac{1}{2}sU + rY - sX, W + Z + tA \rangle. \quad (4.1.9)$$

Somando (4.1.7), (4.1.8) e (4.1.9) resulta que

$$I + II + III = \langle J_Y U + J_X V + rV + [U, V] + 2rY - \langle U, V \rangle A - 2\langle X, Y \rangle A, W + Z + tA \rangle$$

Logo do Teorema de Levi-Civita temos que

$$\begin{aligned} \nabla &= \langle \nabla_{V+Y+sA}(U + X + rA), W + Z + tA \rangle \\ &= \frac{1}{2}\{-I - II - III\} \\ &= -\frac{1}{2}\{\langle J_Y U + J_X V + rV + [U, V] + 2rY - \langle U, V \rangle A - 2\langle X, Y \rangle A, W + Z + tA \rangle\}. \end{aligned}$$

Portanto vale (4.1.6). □

O grupo de Lie  $\mathbb{S}_{m+n+1}$  é o produto semi-direto  $\mathbb{H}_{m+n} \times_F \mathbb{R}$ , onde

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}_{m+n}) \\ s &\mapsto F_s \end{aligned}$$

é definida por

$$F_s(\exp_{\mathfrak{h}_{m+n}}(V + Y)) = \exp_{\mathfrak{h}_{m+n}}(e^{\frac{s}{2}V} + e^s Y),$$

sendo  $\exp_{\mathfrak{h}_{m+n}}$  a exponencial de Lie de  $\mathbb{H}_{m+n}$ .

### 4.1.1 O grupo $\mathbb{S}_4$

Sejam  $\mathbb{S}_4$  o espaço de Damek-Ricci 4-dimensional e  $\{x, y, z, t\}$  coordenadas globais. A métrica Riemanniana invariante à esquerda  $g$  em  $\mathbb{S}_4$  é dada por:

$$g = e^{-t} dx^2 + e^{-t} dy^2 + e^{-2t} (dz + \frac{c}{2} y dx - \frac{c}{2} x dy)^2 + dt^2,$$

onde  $c \in \mathbb{R}$ . A álgebra de Lie  $\mathfrak{s}_4$  de  $\mathbb{S}_4$  tem a base ortonormal

$$e_1 = e^{\frac{t}{2}} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{cy}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad e_2 = e^{\frac{t}{2}} \left( \frac{\partial}{\partial y} + \frac{cx}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad e_3 = e^t \frac{\partial}{\partial z}, \quad e_4 = \frac{\partial}{\partial t},$$

---

#### 4. Representação de Weierstrass para espaços de Damek-Ricci

Calculando os colchetes de Lie obtemos que

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = ce_3, & [e_1, e_3] = 0, & [e_1, e_4] = -\frac{1}{2}e_1, \\ [e_2, e_3] = 0, & [e_2, e_4] = -\frac{1}{2}e_2, & [e_3, e_4] = -e_3. \end{cases}$$

Escrevendo  $e_1 = U$ ,  $e_2 = V$ ,  $e_3 = X$  e  $e_4 = A$  e usando a equação da conexão (4.1.6) obtemos que:

- $\nabla_{e_1}e_1 = \nabla_U U = \frac{1}{2}\langle U, U \rangle A = \frac{1}{2}e_4$ ,
- $\nabla_{e_1}e_2 = \nabla_U V = -\frac{1}{2}[V, U] = -\frac{1}{2}[e_2, e_1] = \frac{c}{2}e_3$ ,
- $\nabla_{e_1}e_3 = \nabla_U X = -\frac{1}{2}J_X U = -\frac{c}{2}e_2$ . De fato,

$$\langle J_X U, U \rangle = \langle \beta(U, U), X \rangle = \langle [U, U], X \rangle = 0$$

e

$$\langle J_X U, V \rangle = \langle \beta(U, V), X \rangle = \langle [U, V], X \rangle = \langle ce_3, e_3 \rangle = c.$$

Logo,  $J_X U = ce_2$ .

- $\nabla_{e_1}e_4 = \nabla_U A = -\frac{1}{2}U = -\frac{1}{2}e_1$ ,
- $\nabla_{e_2}e_1 = \nabla_V U = -\frac{1}{2}[U, V] = -\frac{1}{2}[e_1, e_2] = -\frac{c}{2}e_3$ ,
- $\nabla_{e_2}e_2 = \nabla_V V = \frac{1}{2}\langle V, V \rangle A = \frac{1}{2}e_4$ ,
- $\nabla_{e_2}e_3 = \nabla_V X = -\frac{1}{2}J_X V = \frac{c}{2}e_1$ . De fato,

$$\langle J_X V, U \rangle = \langle \beta(V, U), X \rangle = \langle [V, U], X \rangle = \langle -ce_3, e_3 \rangle = -c$$

e

$$\langle J_X V, V \rangle = \langle \beta(V, V), X \rangle = \langle [V, V], X \rangle = 0.$$

Logo,  $J_X V = -ce_1$ .

- $\nabla_{e_2}e_4 = \nabla_V A = -\frac{1}{2}V = -\frac{1}{2}e_2$ ,
- $\nabla_{e_3}e_1 = \nabla_X U = -\frac{1}{2}J_X U = -\frac{c}{2}e_2$ ,

#### 4.1 O caso Riemanniano

---

- $\nabla_{e_3}e_2 = \nabla_X V = -\frac{1}{2}J_X V = \frac{c}{2}e_1$ ,
- $\nabla_{e_3}e_3 = \nabla_X X = \langle X, X \rangle A = e_4$ ,
- $\nabla_{e_3}e_4 = \nabla_X A = -X = -e_3$ ,
- $\nabla_{e_4}e_1 = \nabla_A U = 0$ ,
- $\nabla_{e_4}e_2 = \nabla_A V = 0$ ,
- $\nabla_{e_4}e_3 = \nabla_A X = 0$ ,
- $\nabla_{e_4}e_4 = \nabla_A A = 0$ .

Por outro lado, temos que

$$\nabla_{e_i}e_j = \sum_1^4 \frac{L_{ij}^k}{2} e_k.$$

Logo,

$$\begin{cases} L_{11}^4 = 1, & L_{12}^3 = c, & L_{13}^2 = -c, & L_{14}^1 = -1, & L_{21}^3 = -c, & L_{22}^4 = 1, \\ L_{23}^1 = c, & L_{24}^2 = -1, & L_{31}^2 = -c, & L_{32}^1 = c, & L_{33}^4 = 2, & L_{34}^3 = -2. \end{cases} \quad (4.1.10)$$

e os outros  $L_{ij}^k$  são nulos.

Seja  $\phi = \frac{\partial f}{\partial z}$ . Podemos escrever o campo tangente  $\phi$  tanto em termos de coordenadas locais  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , como usando os campos invariantes à esquerda. Portanto,

$$\phi = \sum_{i=1}^4 \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^4 \psi_i e_i,$$

onde as funções  $\phi_i$  e  $\psi_i$  são funções complexas.

Existe uma matriz invertível  $A = (A_{ij})$ , com  $A_{ij} : f(\Omega) \cap U \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\Omega$  é um domínio simplesmente conexo em  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  tal que

$$\phi_i = \sum_{j=1}^4 A_{ij} \psi_j, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Logo,

$$A = \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{c}{2}e^{\frac{t}{2}}y & \frac{c}{2}e^{\frac{t}{2}}x & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

#### 4. Representação de Weierstrass para espaços de Damek-Ricci

É conhecido que  $\phi$  é holomorfa se, somente, se  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \phi = 0$ , isto é,

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^4 L_{ij}^k \bar{\psi}_i \psi_j = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (4.1.11)$$

**Lema 4.1.6.** O sistema (4.1.11) é equivalente a:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \psi_4 + c \operatorname{Re}(\bar{\psi}_2 \psi_3) = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_2 \psi_4 - c \operatorname{Re}(\bar{\psi}_1 \psi_3) = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi}_3 \psi_4 + \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1) = 0, \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2) + \bar{\psi}_3 \psi_3 = 0. \end{cases} \quad (4.1.12)$$

*Demonstração.* Usando (4.1.9) e (4.1.11) temos que

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \psi_4 + \frac{c}{2} (\bar{\psi}_2 \psi_3 + \bar{\psi}_3 \psi_2) = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_2 \psi_4 - \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_3 + \bar{\psi}_3 \psi_1) = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi}_3 \psi_4 + \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1) = 0, \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2) + \bar{\psi}_3 \psi_3 = 0, \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema desejado. □

Logo temos o resultado:

**Teorema 4.1.7.** Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  um conjunto aberto dotado de uma coordenada complexa  $z = u + iv$ . Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4$  uma imersão mínima conforme. Então as componentes do vetor tangente complexo

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \psi_i e_i,$$

satisfazem o sistema (4.1.12) e as seguintes condições

- i.  $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \neq 0$ ,
- ii.  $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 + \psi_4^2 = 0$ ,

## 4.1 O caso Riemanniano

Respectivamente, se  $\Omega$  é simplesmente conexo e  $\psi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , são funções satisfazendo as condições acima, então a aplicação  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4$  definida por

$$f_i = 2 \operatorname{Re} \left( \int \sum_{j=1}^4 A_{ij} \psi_j dz \right), \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

é uma imersão mínima conforme em  $\mathbb{S}_4$ .

### 4.1.2 Exemplos

Vamos fazer alguns exemplos de imersões mínimas conformes em  $\mathbb{S}_4$ .

**Exemplo 4.1.8.** Considere as funções complexas

$$\psi_1 = \frac{i}{u}, \quad \psi_2 = \psi_3 = 0 \quad \text{e} \quad \psi_4 = \frac{1}{u}$$

em  $\Omega = \{u + iv \in \mathbb{C}; u > 0\}$ , que é um domínio simplesmente conexo. Note que os itens i. e ii. do Teorema 4.1.7 são satisfeitos, isto é,

$$\text{i. } \psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2 + \psi_3 \bar{\psi}_3 + \psi_4 \bar{\psi}_4 = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^2} \neq 0,$$

$$\text{ii. } \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 + \psi_4^2 = -\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^2} = 0.$$

Além disso,

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} = -\frac{i}{2u^2} = \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \psi_4 - c \operatorname{Re}(\bar{\psi}_2 \psi_3), \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} = 0 = \frac{1}{2} \bar{\psi}_2 \psi_4 + c \operatorname{Re}(\bar{\psi}_1 \psi_3), \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} = 0 = \bar{\psi}_3 \psi_4 - \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1), \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2) - \bar{\psi}_3 \psi_3, \end{cases}$$

uma vez que  $\psi_2 = \psi_3 = 0$ . Portanto pelo Teorema 4.1.7, temos que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4$  dada por:

$$\begin{cases} f_1 = -\frac{2(v - v_0)}{u_0}, \\ f_2 = k, \\ f_3 = \frac{k_1(v - v_0)}{u_0}, \\ f_4 = 2 \ln \left( \frac{u}{u_0} \right), \end{cases}$$

é uma imersão mínima conforme em  $\mathbb{S}_4$ , com  $z_0 = u_0 + iv_0 \in \Omega$ .

#### 4. Representação de Weierstrass para espaços de Damek-Ricci

**Exemplo 4.1.9.** Analogamente ao Exemplo 4.1.8 temos que as funções complexas

$$\psi_1 = \psi_3 = 0, \quad \psi_2 = \frac{i}{u} \quad \text{e} \quad \psi_4 = \frac{1}{u}$$

satisfazem as condições do Teorema 4.1.7. Logo,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4$  dada por

$$\begin{cases} f_1 = k, \\ f_2 = -\frac{2(v - v_0)}{u_0}, \\ f_3 = -\frac{k_1(v - v_0)}{u_0}, \\ f_4 = 2 \ln \left( \frac{u}{u_0} \right), \end{cases}$$

é uma imersão mínima conforme em  $\mathbb{S}_4$ , com  $z_0 = u_0 + iv_0 \in \Omega$ .

**Exemplo 4.1.10.** Sejam as funções complexas

$$\psi_1 = \frac{1}{v}, \quad \psi_2 = \psi_3 = 0 \quad \text{e} \quad \psi_4 = \frac{-i}{v},$$

definidas em  $\Omega = \{u + iv \in \mathbb{C}; v > 0\}$ , que é um domínio simplesmente conexo. Note que os itens *i* e *ii* do Teorema 4.1.7 são satisfeitos, isto é,

$$\text{i. } \psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2 + \psi_3 \bar{\psi}_3 + \psi_4 \bar{\psi}_4 = \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^2} \neq 0,$$

$$\text{ii. } \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 + \psi_4^2 = \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^2} = 0.$$

Além disso,

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} = \frac{-i}{2v^2} = \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \psi_4 - cRe(\bar{\psi}_2 \psi_3), \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} = 0 = \frac{1}{2} \bar{\psi}_2 \psi_4 + cRe(\bar{\psi}_1 \psi_3), \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} = 0 = \bar{\psi}_3 \psi_4 - \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1), \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} = \frac{-1}{2v^2} = -\frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2) - \bar{\psi}_3 \psi_3, \end{cases}$$

uma vez que  $\psi_2 = \psi_3 = 0$ . Portanto pelo Teorema 4.1.7 temos que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4$ , dada por

$$\begin{cases} f_1 = \frac{2(u - u_0)}{v_0}, \\ f_2 = k, \\ f_3 = -\frac{k_1(u - u_0)}{v_0}, \\ f_4 = 2 \ln \left( \frac{v}{v_0} \right), \end{cases}$$

#### 4.1 O caso Riemanniano

---

é uma imersão mínima conforme em  $\mathbb{S}_4$ , com  $z_0 = u_0 + iv_0 \in \Omega$ .

**Exemplo 4.1.11.** Tome as funções complexas

$$\psi_1 = \psi_2 = \frac{i}{\sqrt{2}u}, \quad \psi_3 = 0 \quad \text{e} \quad \psi_4 = \frac{1}{u},$$

em  $\Omega = \{u + iv \in \mathbb{C}; u > 0\}$  domínio simplesmente conexo. Note que os itens *i* e *ii* do teorema são satisfeitos, isto é,

- i.  $\psi_1\bar{\psi}_1 + \psi_2\bar{\psi}_2 + \psi_3\bar{\psi}_3 + \psi_4\bar{\psi}_4 = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^2} \neq 0$ ,
- ii.  $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 + \psi_4^2 = -\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^2} = 0$ ,

Além disso,

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi_1}{\partial\bar{z}} = -\frac{i}{2\sqrt{2}u^2} = \frac{1}{2}\bar{\psi}_1\psi_4 - cRe(\bar{\psi}_2\psi_3), \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial\bar{z}} = -\frac{i}{2\sqrt{2}u^2} = \frac{1}{2}\bar{\psi}_2\psi_4 + cRe(\bar{\psi}_1\psi_3), \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial\bar{z}} = 0 = \bar{\psi}_3\psi_4 - \frac{c}{2}(\bar{\psi}_1\psi_2 - \bar{\psi}_2\psi_1), \\ \frac{\partial\psi_4}{\partial\bar{z}} = -\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2}(\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2) - \bar{\psi}_3\psi_3, \end{cases}$$

uma vez que  $\psi_3 = 0$  e  $\bar{\psi}_1\psi_2 - \bar{\psi}_2\psi_1 = 0$ . Portanto pelo Teorema 4.1.7 temos que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4$ , dada por:

$$\begin{cases} f_1 = -\frac{2(v - v_0)}{u_0}, \\ f_2 = -\frac{2(v - v_0)}{u_0}, \\ f_3 = k, \\ f_4 = 2 \ln\left(\frac{u}{u_0}\right), \end{cases}$$

é uma imersão mínima conforme em  $\mathbb{S}_4$ , com  $z_0 = u_0 + iv_0 \in \Omega$ .

**Exemplo 4.1.12.** Considere as funções complexas

$$\psi_1 = \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = \frac{i}{2u}, \quad \text{e} \quad \psi_4 = \frac{1}{2u}$$

no domínio simplesmente conexo  $\Omega = \{u + iv \in \mathbb{C}; u, v > 0\}$ . Note que os itens *i* e *ii* do Teorema 4.1.7 são satisfeitos, isto é,

#### 4. Representação de Weierstrass para espaços de Damek-Ricci

- i.  $\psi_1\bar{\psi}_1 + \psi_2\bar{\psi}_2 + \psi_3\bar{\psi}_3 + \psi_4\bar{\psi}_4 = \frac{1}{4u^2} + \frac{1}{4u^2} \neq 0$ ,
- ii.  $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 + \psi_4^2 = -\frac{1}{4u^2} + \frac{1}{4u^2} = 0$ ,

Além disso,

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi_1}{\partial\bar{z}} = 0 = \frac{1}{2}\bar{\psi}_1\psi_4 - cRe(\bar{\psi}_2\psi_3), \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial\bar{z}} = 0 = \frac{1}{2}\bar{\psi}_2\psi_4 + cRe(\bar{\psi}_1\psi_3), \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial\bar{z}} = -\frac{i}{4u^2} = \bar{\psi}_3\psi_4 - \frac{c}{2}(\bar{\psi}_1\psi_2 - \bar{\psi}_2\psi_1), \\ \frac{\partial\psi_4}{\partial\bar{z}} = -\frac{1}{4u^2} = -\frac{1}{2}(\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2) - \bar{\psi}_3\psi_3, \end{cases}$$

uma vez que  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ . Portanto pelo Teorema 4.1.7 temos que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4$ , dada por

$$\begin{cases} f_1 = k_1, \\ f_2 = k_2, \\ f_3 = -\frac{(v - v_0)}{u_0}, \\ f_4 = \ln\left(\frac{u}{u_0}\right), \end{cases}$$

é uma imersão mínima conforme em  $\mathbb{S}_4$ , com  $z_0 = u_0 + iv_0 \in \Omega$ .

## 4.2 Primeiro caso Lorentziano

Sejam  $b_m$  e  $z_n$  espaços vetoriais reais com produto interno de dimensão  $m$  e  $n$  respectivamente e  $\beta : b_m \times b_m \rightarrow z_n$  uma aplicação bilinear anti-simétrica.

Consideremos a soma-direta  $\mathfrak{h}_{m+n} = b_m \oplus z_n$  com o produto interno Riemanniano  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}}$  tal que  $b_m$  e  $z_n$  são perpendiculares e definimos um homomorfismo de  $\mathbb{R}$ -álgebra  $J : z_n \rightarrow End(b_m)$ , onde  $J(Z) = J_Z$ , por

$$\langle J_Z U, V \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} = \langle \beta(U, V), Z \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}}, \quad (4.2.1)$$

para todo  $U, V \in b_m$  e  $Z \in z_n$ .

**Proposição 4.2.1.** Sejam  $U + X, V + Y \in \mathfrak{h}_{m+n}$ . Defina

$$[U + X, V + Y] = \beta(U, V). \quad (4.2.2)$$

Então  $[\cdot, \cdot]$  é um colchete de Lie em  $\mathfrak{h}_{m+n}$  e, conseqüentemente,  $\mathfrak{h}_{m+n}$  é uma álgebra de Lie.

## 4.2 Primeiro caso Lorentziano

---

*Demonstração.* Como  $\beta$  é bilinear e anti-simétrica, temos que  $[\cdot, \cdot]$  é também bilinear e anti-simétrica. Assim basta mostrar a identidade de Jacobi. De fato,

$$\begin{aligned}
 [U + X, [V + Y, W + Z]] &= [U + X, \beta(V, W)] \\
 &= [U + X, 0 + \beta(V, W)] \\
 &= \beta(U, 0) = 0 = 0 + 0 \\
 &= \beta(0, W) + \beta(V, 0) \\
 &= [\beta(U, V), W + Z] + [V + Y, \beta(U, W)] \\
 &= [[U + X, V + Y], W + Z] + [V + Y, [U + X, W + Z]].
 \end{aligned}$$

Portanto temos o desejado. □

**Definição 4.2.2.** A álgebra de Lie  $\mathfrak{h}_{m+n}$  é dita *álgebra generalizada de Heisenberg* se

$$J_Z^2 = -\langle Z, Z \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} id_{b_m},$$

para todo  $Z \in z_n$ . Além disso, como  $\mathfrak{h}_{m+n}$  é uma álgebra de Lie real de dimensão finita existe um grupo de Lie associado simplesmente conexo, que denotamos por  $\mathbb{H}_{m+n}$ , dotado de uma métrica Riemanniana invariante à esquerda  $g$ , que é chamado de *grupo generalizado de Heisenberg*.

Seja a soma direta  $\mathfrak{s}_{m+n+1} = \mathfrak{h}_{m+n} \oplus \mathfrak{a}$ , onde  $\mathfrak{a}$  é um espaço vetorial unidimensional. Um vetor em  $\mathfrak{s}_{m+n+1}$  é escrito de uma única maneira como  $U + X + sA$ , onde  $U \in b_m, X \in z_n, s \in \mathbb{R}$  e  $A$  um vetor unitário em  $\mathfrak{a}$ .

**Proposição 4.2.3.** Sejam  $U + X + rA, V + Y + sA \in \mathfrak{s}_{m+n+1}$ . Definimos

$$\langle U + X + rA, V + Y + sA \rangle = \langle U + X, V + Y \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} - rs \quad (4.2.3)$$

e

$$[U + X + rA, V + Y + sA] = [U, V]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{1}{2}rV - \frac{1}{2}sU + rY - sX. \quad (4.2.4)$$

Então  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é uma métrica Lorentziana e  $[\cdot, \cdot]$  é um colchete de Lie em  $\mathfrak{s}_{m+n+1}$  e, conseqüentemente,  $\mathfrak{s}_{m+n+1}$  é uma álgebra de Lie com métrica Lorentziana.

*Demonstração.* Vamos provar que (4.2.3) é uma métrica Lorentziana. Como  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}}$  é bilinear temos que (4.2.3) é bilinear. Basta mostrar que (4.2.3) é não-degenerado e tem índice 1.

#### 4. Representação de Weierstrass para espaços de Damek-Ricci

- Suponhamos que  $\langle U + X + rA, V + Y + sA \rangle = 0$ , para todo  $V + Y + sA \in \mathfrak{s}_{m+n+1}$ . Então, em particular

$$\langle U + X + rA, V + Y \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle U + X + rA, A \rangle = 0,$$

para todo  $V + Y \in \mathfrak{h}_{m+n}$ . Logo,

$$\langle U + X, V + Y \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} = 0 \quad \text{e} \quad r = 0$$

Como  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}}$  é não degenerada, temos que  $U + X = 0$ . Portanto (4.2.3) é não-degenerada.

- Sejam  $\{U_1, \dots, U_m\}$  e  $\{X_1, \dots, X_n\}$  bases ortonormais de  $b_m$  e  $z_n$ , respectivamente. Então  $\{U_1, \dots, U_m, X_1, \dots, X_n, A\}$  é uma base ortonormal para  $\mathfrak{s}_{m+n+1}$ . Temos que

$$\begin{cases} \langle U_i, U_i \rangle = \langle U_i, U_i \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} = 1, \\ \langle X_j, X_j \rangle = \langle X_j, X_j \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} = 1, \\ \langle A, A \rangle = -1 \end{cases} \quad (4.2.5)$$

Logo, (4.2.3) tem índice 1.

A prova de (4.2.4) é análoga ao caso Riemanniano. □

**Definição 4.2.4.** O grupo de Lie simplesmente conexo associado a  $\mathfrak{s}_{m+n+1}$  dotado da métrica Lorentziana induzida invariante à esquerda é dito *Espaço de Damek-Ricci Lorentziano* e é denotado por  $\mathbb{S}_{m+n+1}^1$ .

**Proposição 4.2.5.** A conexão de Levi-Civita  $\nabla$  de  $\mathbb{S}_{m+n+1}^1$  é dada por

$$\nabla_{V+Y+sA}(U + X + rA) = -\frac{1}{2}\{J_Y U + J_X V + rV + [U, V] + 2rY + \langle U, V \rangle A + 2\langle X, Y \rangle A\}. \quad (4.2.6)$$

*Demonstração.* Usando a equação (4.2.4), resulta que

$$\begin{aligned} I &= \langle [U + X + rA, W + Z + tA], V + Y + sA \rangle \\ &= \langle [U, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{1}{2}rW - \frac{1}{2}tU + rZ - tX, V + Y + sA \rangle \\ &= \langle [U, W]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{1}{2}rW - \frac{1}{2}tU + rZ - tX, V + Y \rangle. \end{aligned}$$

Como  $b_m$  e  $z_n$  são ortogonais temos que

$$I = \langle [U, W], Y \rangle + \langle \frac{1}{2}rW, V \rangle - \langle \frac{1}{2}tU, V \rangle + \langle rZ, Y \rangle - \langle tX, Y \rangle.$$

## 4.2 Primeiro caso Lorentziano

---

Usando (4.2.1) e (4.2.2) segue que

$$\begin{aligned}
 I &= \langle J_Y U, W \rangle + \langle \frac{1}{2} r V, W \rangle - \frac{1}{2} t \langle U, V \rangle + \langle r Y, Z \rangle - t \langle X, Y \rangle \\
 &= \langle J_Y U, W + Z \rangle + \langle \frac{1}{2} r V, W + Z \rangle - \frac{1}{2} t \langle U, V \rangle + \langle r Y, W + Z \rangle - t \langle X, Y \rangle \\
 &= \langle J_Y U + \frac{1}{2} r V + r Y, W + Z \rangle - [\frac{1}{2} t \langle U, V \rangle + t \langle X, Y \rangle]
 \end{aligned}$$

Portanto, de (4.2.3), temos que

$$I = \langle J_Y U + \frac{1}{2} r V + r Y + \frac{1}{2} \langle U, V \rangle A + \langle X, Y \rangle A, W + Z + t A \rangle. \quad (4.2.7)$$

Analogamente, obtemos que

$$II = \langle J_X V + \frac{1}{2} s U + s X + \frac{1}{2} \langle U, V \rangle A + \langle X, Y \rangle A, W + Z + t A \rangle \quad (4.2.8)$$

e

$$III = \langle [U, V]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{1}{2} r V - \frac{1}{2} s U + r Y - s X, W + Z + t A \rangle. \quad (4.2.9)$$

Somando (4.2.7), (4.2.8) e (4.2.9) temos que

$$I + II + III = \langle J_Y U + J_X V + r V + [U, V] + 2r Y + \langle U, V \rangle A + 2\langle X, Y \rangle A, W + Z + t A \rangle.$$

Logo do Teorema de Levi-Civita resulta que

$$\begin{aligned}
 \nabla &= \langle \nabla_{V+Y+sA}(U + X + rA), W + Z + tA \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \{-I - II - III\} \\
 &= -\frac{1}{2} \{ \langle J_Y U + J_X V + r V + [U, V] + 2r Y + \langle U, V \rangle A + 2\langle X, Y \rangle A, W + Z + t A \rangle \}
 \end{aligned}$$

Portanto vale (4.2.6). □

O grupo de Lie  $\mathbb{S}_{m+n+1}^1$  é o produto semi-direto  $\mathbb{H}_{m+n} \times_F \mathbb{R}$ , com

$$\begin{aligned}
 F : \mathbb{R} &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}_{m+n}) \\
 s &\mapsto F_s
 \end{aligned}$$

definida por

$$F_s(\exp_{\mathfrak{h}_{m+n}}(V + Y)) = \exp_{\mathfrak{h}_{m+n}}(e^{\frac{s}{2}} V + e^s Y),$$

onde  $\exp_{\mathfrak{h}_{m+n}}$  é a exponencial de Lie de  $\mathbb{H}_{m+n}$ .

### 4.2.1 O grupo $\mathbb{S}_4^1$

Sejam  $\mathbb{S}_4^1$  o espaço de Damek-Ricci 4-dimensional Lorentziano e  $\{x, y, z, t\}$  coordenadas globais. A métrica Lorentziana invariante à esquerda  $g$  em  $\mathbb{S}_4^1$  é dada por

$$g = e^{-t}dx^2 + e^{-t}dy^2 + e^{-2t}(dz + \frac{c}{2}ydx - \frac{c}{2}xdy)^2 - dt^2,$$

onde  $c \in \mathbb{R}$ . A álgebra de Lie  $\mathfrak{s}_4^1$  de  $\mathbb{S}_4^1$  tem a base ortonormal

$$e_1 = e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{cy}{2}\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad e_2 = e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{cx}{2}\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad e_3 = e^t\frac{\partial}{\partial z}, \quad e_4 = \frac{\partial}{\partial t},$$

onde  $e_1, e_2, e_3$  são tipo-espaços e  $e_4$  tipo-tempo. Calculando os colchetes de Lie obtemos que

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = ce_3, & [e_1, e_3] = 0, & [e_1, e_4] = -\frac{1}{2}e_1, \\ [e_2, e_3] = 0, & [e_2, e_4] = -\frac{1}{2}e_2, & [e_3, e_4] = -e_3. \end{cases}$$

Escrevendo  $e_1 = U$ ,  $e_2 = V$ ,  $e_3 = X$  e  $e_4 = A$  e usando a equação da conexão (4.2.6) obtemos que:

- $\nabla_{e_1}e_1 = \nabla_UU = -\frac{1}{2}\langle U, U \rangle A = -\frac{1}{2}e_4$ ,
- $\nabla_{e_1}e_2 = \nabla_UV = -\frac{1}{2}[V, U] = -\frac{1}{2}[e_2, e_1] = \frac{c}{2}e_3$ ,
- $\nabla_{e_1}e_3 = \nabla_UX = -\frac{1}{2}J_XU = -\frac{c}{2}e_2$ . De fato,

$$\langle J_XU, U \rangle = \langle \beta(U, U), X \rangle = \langle [U, U], X \rangle = 0$$

e

$$\langle J_XU, V \rangle = \langle \beta(U, V), X \rangle = \langle [U, V], X \rangle = \langle ce_3, e_3 \rangle = c.$$

Logo,  $J_XU = ce_2$ .

- $\nabla_{e_1}e_4 = \nabla_UA = -\frac{1}{2}U = -\frac{1}{2}e_1$ ,
- $\nabla_{e_2}e_1 = \nabla_VU = -\frac{1}{2}[U, V] = -\frac{1}{2}[e_1, e_2] = -\frac{c}{2}e_3$ ,
- $\nabla_{e_2}e_2 = \nabla_VV = -\frac{1}{2}\langle V, V \rangle A = -\frac{1}{2}e_4$ ,

## 4.2 Primeiro caso Lorentziano

---

- $\nabla_{e_2} e_3 = \nabla_V X = -\frac{1}{2} J_X V = \frac{c}{2} e_1$ . De fato,

$$\langle J_X V, U \rangle = \langle \beta(V, U), X \rangle = \langle [V, U], X \rangle = \langle -c e_3, e_3 \rangle = -c$$

e

$$\langle J_X V, V \rangle = \langle \beta(V, V), X \rangle = \langle [V, V], X \rangle = 0.$$

Logo,  $J_X U = -c e_1$ .

- $\nabla_{e_2} e_4 = \nabla_V A = -\frac{1}{2} V = -\frac{1}{2} e_2$ ,
- $\nabla_{e_3} e_1 = \nabla_X U = -\frac{1}{2} J_X U = -\frac{c}{2} e_2$ ,
- $\nabla_{e_3} e_2 = \nabla_X V = -\frac{1}{2} J_X V = \frac{c}{2} e_1$ ,
- $\nabla_{e_3} e_3 = \nabla_X X = -\langle X, X \rangle A = -e_4$ ,
- $\nabla_{e_3} e_4 = \nabla_X A = -X = -e_3$ ,
- $\nabla_{e_4} e_1 = \nabla_A U = 0$ ,
- $\nabla_{e_4} e_2 = \nabla_A V = 0$ ,
- $\nabla_{e_4} e_3 = \nabla_A X = 0$ ,
- $\nabla_{e_4} e_4 = \nabla_A A = 0$ .

Por outro lado, temos que

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_1^4 \frac{L_{ij}^k}{2} e_k.$$

Logo,

$$\begin{cases} L_{11}^4 = -1, & L_{12}^3 = c, & L_{13}^2 = -c, & L_{14}^1 = -1, & L_{21}^3 = -c, & L_{22}^4 = -1, \\ L_{23}^1 = c, & L_{24}^2 = -1, & L_{31}^2 = -c, & L_{32}^1 = c, & L_{33}^4 = -2, & L_{34}^3 = -2 \end{cases} \quad (4.2.10)$$

e os outros  $L_{ij}^k$  são nulos. Seja  $\phi = \frac{\partial f}{\partial z}$ . Podemos escrever o campo tangente  $\phi$  tanto em termos de coordenadas locais  $x_1, x_2$  e  $x_3$  como usando os campos invariantes à esquerda. Portanto, temos que

$$\phi = \sum_{i=1}^4 \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^4 \psi_i e_i,$$

#### 4. Representação de Weierstrass para espaços de Damek-Ricci

onde as funções  $\phi_i$  e  $\psi_i$  são funções (para)complexas. Existe uma matriz invertível  $A = (A_{ij})$ , com  $A_{ij} : f(\Omega) \cap U \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\Omega$  é domínio simplesmente conexo em  $\mathbb{K}$  (dado por  $\mathbb{L}$  ou  $\mathbb{C}$ ) tal que

$$\phi_i = \sum_{j=1}^4 A_{ij} \psi_j, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Logo,

$$A = \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{c}{2}e^{\frac{t}{2}}y & \frac{c}{2}e^{\frac{t}{2}}x & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,  $f$  é mínima se, e somente, se vale (3.2.7), ou seja,

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial \bar{z}} + \sum_{i,j=1}^4 \frac{1}{2} L_{ij}^k \bar{\psi}_i \psi_j = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (4.2.11)$$

**Lema 4.2.6.** O sistema (4.2.11) é equivalente a

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \psi_4 + c \operatorname{Re}(\bar{\psi}_2 \psi_3) = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_2 \psi_4 - c \operatorname{Re}(\bar{\psi}_1 \psi_3) = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi}_3 \psi_4 + \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1) = 0, \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2) - \bar{\psi}_3 \psi_3 = 0. \end{cases} \quad (4.2.12)$$

*Demonstração.* Usando (4.2.10) e (4.2.11) temos que

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \psi_4 + \frac{c}{2} (\bar{\psi}_2 \psi_3 + \bar{\psi}_3 \psi_2) = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_2 \psi_4 - \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_3 + \bar{\psi}_3 \psi_1) = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi}_3 \psi_4 + \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1) = 0, \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2) - \bar{\psi}_3 \psi_3 = 0, \end{cases}$$

que é equivalente ao sistema desejado. □

Logo temos o resultado:

## 4.2 Primeiro caso Lorentziano

**Teorema 4.2.7.** Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{K}$  um conjunto aberto dotado de uma coordenada (para)complexa. Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^1$  uma imersão mínima conforme. Então o vetor tangente (para)complexo

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \psi_i e_i, \quad (4.2.13)$$

satisfaz o sistema (4.2.12) e as seguintes condições

- i.  $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2 \neq 0$ ,
- ii.  $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 - \psi_4^2 = 0$ .

Respectivamente, se  $\Omega$  é simplesmente conexo e  $\psi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{K}, i = 1, 2, 3, 4$ , são funções satisfazendo as condições acima, então a aplicação  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^1$  definida por

$$f_i = 2 \operatorname{Re} \left( \int \sum_{j=1}^4 A_{ij} \psi_j dz \right), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (4.2.14)$$

é uma imersão mínima conforme do tipo-tempo (ou do tipo espaço) em  $\mathbb{S}_4^1$ .

### 4.2.2 Exemplos

Vamos fazer alguns exemplos de imersões do tipo tempo mínimas conformes em  $\mathbb{S}_4^1$ .

**Exemplo 4.2.8.** Considere as funções paracomplexas

$$\psi_1 = \frac{\tau}{u}, \quad \psi_2 = \psi_3 = 0 \quad \text{e} \quad \psi_4 = \frac{1}{u}$$

em  $\Omega = \{u + \tau v \in \mathbb{L}; u > 0\}$ , que é um domínio simplesmente conexo. Note que os itens i. e ii. do Teorema 4.2.7 são satisfeitos, isto é,

- i.  $\psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2 + \psi_3 \bar{\psi}_3 - \psi_4 \bar{\psi}_4 = -\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^2} \neq 0$ ,
- ii.  $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 - \psi_4^2 = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^2} = 0$ ,

Além disso,

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} = -\frac{\tau}{2u^2} = \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \psi_4 - c \operatorname{Re}(\bar{\psi}_2 \psi_3), \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} = 0 = \frac{1}{2} \bar{\psi}_2 \psi_4 + c \operatorname{Re}(\bar{\psi}_1 \psi_3), \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} = 0 = \bar{\psi}_3 \psi_4 - \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1), \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2u^2} = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2) + \bar{\psi}_3 \psi_3, \end{cases} \quad (4.2.15)$$

#### 4. Representação de Weierstrass para espaços de Damek-Ricci

---

uma vez que  $\psi_2 = \psi_3 = 0$ . Portanto, pelo Teorema 4.2.7 temos que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^1$  dada por

$$\begin{cases} f_1 = \frac{2(v - v_0)}{u_0}, \\ f_2 = k, \\ f_3 = -\frac{k_1(v - v_0)}{u_0}, \\ f_4 = 2 \ln \left( \frac{u}{u_0} \right), \end{cases} \quad (4.2.16)$$

é uma imersão mínima conforme do tipo tempo em  $\mathbb{S}_4^1$ , com  $z_0 = u_0 + \tau v_0 \in \Omega$ .

**Exemplo 4.2.9.** Analogamente ao exemplo anterior, as funções paracomplexas

$$\psi_1 = \psi_3 = 0, \quad \psi_2 = \frac{\tau}{2} \quad \text{e} \quad \psi_4 = \frac{1}{u}$$

satisfazem as condições do Teorema 4.2.7. Logo,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^1$  dada por

$$\begin{cases} f_1 = k, \\ f_2 = \frac{2(v - v_0)}{u_0}, \\ f_3 = \frac{k_1(v - v_0)}{u_0}, \\ f_4 = 2 \ln \left( \frac{u}{u_0} \right), \end{cases} \quad (4.2.17)$$

é uma imersão mínima conforme do tipo tempo em  $\mathbb{S}_4^1$ , com  $z_0 = u_0 + \tau v_0 \in \Omega$ .

**Exemplo 4.2.10.** Tome as funções paracomplexas

$$\psi_1 = \frac{1}{v}, \quad \psi_2 = \psi_3 = 0 \quad \text{e} \quad \psi_4 = \frac{\tau}{v}$$

em  $\Omega = \{u + \tau v \in \mathbb{L}; v > 0\}$  domínio simplesmente conexo. Temos então que os itens i. e ii. do Teorema 4.2.7 são satisfeitos pois

$$\text{i. } \psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2 + \psi_3 \bar{\psi}_3 - \psi_4 \bar{\psi}_4 = \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^2} \neq 0,$$

$$\text{ii. } \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 - \psi_4^2 = \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^2} = 0.$$

## 4.2 Primeiro caso Lorentziano

---

Além disso,

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} = \frac{\tau}{2v^2} = \frac{1}{2}\bar{\psi}_1\psi_4 - cRe(\bar{\psi}_2\psi_3), \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} = 0 = \frac{1}{2}\bar{\psi}_2\psi_4 + cRe(\bar{\psi}_1\psi_3), \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} = 0 = \bar{\psi}_3\psi_4 - \frac{c}{2}(\bar{\psi}_1\psi_2 - \bar{\psi}_2\psi_1), \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2v^2} = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2) + \bar{\psi}_3\psi_3 \end{cases} \quad (4.2.18)$$

uma vez que  $\psi_2 = \psi_3 = 0$ . Portanto, pelo Teorema 4.2.7 temos que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^1$  dada por

$$\begin{cases} f_1 = \frac{2(u - u_0)}{v_0}, \\ f_2 = k, \\ f_3 = -\frac{k_1(u - u_0)}{v_0}, \\ f_4 = 2 \ln \left( \frac{v}{v_0} \right), \end{cases} \quad (4.2.19)$$

é uma imersão mínima conforme do tipo tempo em  $\mathbb{S}_4^1$ , com  $z_0 = u_0 + \tau v_0 \in \Omega$ .

**Exemplo 4.2.11.** Tomando as funções paracomplexas

$$\psi_1 = \psi_2 = \frac{\tau}{\sqrt{2}u}, \quad \psi_3 = 0 \text{ e } \psi_4 = \frac{1}{u}$$

em  $\Omega = \{u + \tau v \in \mathbb{L}; u > 0\}$  então os itens i. e ii. do Teorema 4.2.7 são satisfeitos, isto é,

$$\text{i. } \psi_1\bar{\psi}_1 + \psi_2\bar{\psi}_2 + \psi_3\bar{\psi}_3 - \psi_4\bar{\psi}_4 = -\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^2} \neq 0,$$

$$\text{ii. } \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 - \psi_4^2 = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^2} = 0.$$

Além disso,

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} = -\frac{\tau}{2\sqrt{2}u^2} = \frac{1}{2}\bar{\psi}_1\psi_4 - cRe(\bar{\psi}_2\psi_3), \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} = -\frac{\tau}{2\sqrt{2}u^2} = \frac{1}{2}\bar{\psi}_2\psi_4 + cRe(\bar{\psi}_1\psi_3), \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} = 0 = \bar{\psi}_3\psi_4 - \frac{c}{2}(\bar{\psi}_1\psi_2 - \bar{\psi}_2\psi_1), \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2u^2} = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2) + \bar{\psi}_3\psi_3, \end{cases} \quad (4.2.20)$$

#### 4. Representação de Weierstrass para espaços de Damek-Ricci

uma vez que  $\psi_3 = 0$  e  $\bar{\psi}_1\psi_2 - \bar{\psi}_2\psi_1 = 0$ . Portanto pelo, Teorema 4.2.7, temos que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^1$  dada por

$$\begin{cases} f_1 = \frac{2(v - v_0)}{u_0}, \\ f_2 = \frac{2(v - v_0)}{u_0}, \\ f_3 = k, \\ f_4 = 2 \ln \left( \frac{u}{u_0} \right), \end{cases} \quad (4.2.21)$$

é uma imersão mínima conforme do tipo-tempo em  $\mathbb{S}_4^1$ , com  $z_0 = u_0 + \tau v_0 \in \Omega$ .

**Exemplo 4.2.12.** As funções paracomplexas

$$\psi_1 = \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = \frac{\tau}{2u} \quad \text{e} \quad \psi_4 = \frac{1}{2u}$$

definidas  $\Omega = \{u + \tau v \in \mathbb{L}; u > 0\}$  satisfazem os ítems i. e ii. do Teorema 4.2.7, isto é,

$$\text{i. } \psi_1\bar{\psi}_1 + \psi_2\bar{\psi}_2 + \psi_3\bar{\psi}_3 - \psi_4\bar{\psi}_4 = -\frac{1}{4u^2} - \frac{1}{4u^2} \neq 0,$$

$$\text{ii. } \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 - \psi_4^2 = \frac{1}{4u^2} - \frac{1}{4u^2} = 0.$$

Além disso,

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi_1}{\partial\bar{z}} = 0 = \frac{1}{2}\bar{\psi}_1\psi_4 - cRe(\bar{\psi}_2\psi_3), \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial\bar{z}} = 0 = \frac{1}{2}\bar{\psi}_2\psi_4 + cRe(\bar{\psi}_1\psi_3), \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial\bar{z}} = -\frac{\tau}{4u^2} = \bar{\psi}_3\psi_4 - \frac{c}{2}(\bar{\psi}_1\psi_2 - \bar{\psi}_2\psi_1), \\ \frac{\partial\psi_4}{\partial\bar{z}} = -\frac{1}{2u^2} = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2) + \bar{\psi}_3\psi_3, \end{cases} \quad (4.2.22)$$

uma vez que  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ . Portanto, pelo Teorema 4.2.7, temos que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^1$  dada por

$$\begin{cases} f_1 = k_1, \\ f_2 = k_2, \\ f_3 = \frac{(v - v_0)}{u_0}, \\ f_4 = \ln \left( \frac{u}{u_0} \right), \end{cases} \quad (4.2.23)$$

é uma imersão mínima conforme do tipo-tempo em  $\mathbb{S}_4^1$ , com  $z_0 = u_0 + \tau v_0 \in \Omega$ .

### 4.3 Segundo caso Lorentziano

Sejam  $b_m$  e  $z_n$  espaços vetoriais reais com produto interno, de dimensão  $m$  e  $n$  respectivamente, e  $\beta : b_m \times b_m \rightarrow z_n$  uma aplicação bilinear anti-simétrica.

Consideremos a soma-direta  $\mathfrak{h}_{m+n} = b_m \oplus z_n$  com o produto interno Lorentziano  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}}$  tal que  $b_m$  e  $z_n$  são perpendiculares e definimos um homomorfismo de  $\mathbb{R}$ -álgebra  $J : z_n \rightarrow \text{End}(b_m)$ , onde  $J(Z) = J_Z$ , por

$$\langle J_Z U, V \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} = \langle \beta(U, V), Z \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}},$$

para todo  $U, V \in b_m$  e  $Z \in z_n$ .

Assim como no caso anterior,  $\mathfrak{h}_{m+n}$  é uma álgebra de Lie com o colchete definido por

$$[U + X, V + Y] = \beta(U, V).$$

**Definição 4.3.1.** A álgebra de Lie  $\mathfrak{h}_{m+n}$  é dita *álgebra generalizada de Heisenberg Lorentziana* se:

$$J_Z^2 = \langle Z, Z \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} \text{id}_{b_m},$$

para todo  $Z \in z_n$  do tipo-tempo e

$$J_Z^2 = -\langle Z, Z \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} \text{id}_{b_m},$$

para todo  $Z \in z_n$  do tipo-espaço. Além disso, como  $\mathfrak{h}_{m+n}$  é uma álgebra de Lie real de dimensão finita existe, um grupo de Lie associado simplesmente conexo, que denotamos por  $\mathbb{H}_{m+n}$ , dotado de uma métrica invariante à esquerda Lorentziana  $g$ , que é chamado de *grupo generalizado de Heisenberg Lorentziano*.

Seja a soma direta  $\mathfrak{s}_{m+n+1} = \mathfrak{h}_{m+n} \oplus \mathfrak{a}$ , onde  $\mathfrak{a}$  é um espaço vetorial unidimensional. Um vetor em  $\mathfrak{s}_{m+n+1}$  é escrito de uma única maneira como  $U + X + sA$ , onde  $U \in b_m, X \in z_n, s \in \mathbb{R}$  e  $A$  um vetor unitário em  $\mathfrak{a}$ .

**Proposição 4.3.2.** Sejam  $U + X + rA, V + Y + sA \in \mathfrak{s}_{m+n+1}$ . Defina

$$\langle U + X + rA, V + Y + sA \rangle = \langle U + X, V + Y \rangle_{\mathfrak{h}_{m+n}} + rs$$

e

$$[U + X + rA, V + Y + sA] = [U, V]_{\mathfrak{h}_{m+n}} + \frac{1}{2}rV - \frac{1}{2}sU + rY - sX.$$

Então  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é um produto escalar Lorentziano e  $[\cdot, \cdot]$  é um colchete de Lie em  $\mathfrak{s}_{m+n+1}$  e, consequentemente,  $\mathfrak{s}_{m+n+1}$  é uma álgebra de Lie com produto escalar Lorentziano.

---

#### 4. Representação de Weierstrass para espaços de Damek-Ricci

**Definição 4.3.3.** O grupo de Lie simplesmente conexo associado a  $\mathfrak{s}_{m+n+1}$  munido de com métrica Lorentziana induzida invariante à esquerda é dito *espaço Lorentziano de Damek-Ricci* e nós denotamos por  $\mathbb{S}_{m+n+1}^{m+n}$ .

**Proposição 4.3.4.** A conexão de Levi-Civita  $\nabla$  de  $\mathbb{S}_{m+n+1}^{m+n}$  é dada por

$$\nabla_{V+Y+sA}(U + X + rA) = -\frac{1}{2}\{J_Y U + J_X V + rV + [U, V] + 2rY - \langle U, V \rangle A - 2\langle X, Y \rangle A\}. \quad (4.3.1)$$

*Demonstração.* A demonstração é análoga ao caso anterior. □

O grupo de Lie  $\mathbb{S}_{m+n+1}^{m+n}$  é o produto semi-direto  $\mathbb{H}_{m+n} \times_F \mathbb{R}$ , com

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}_{m+n}) \\ s &\mapsto F_s \end{aligned}$$

definida por

$$F_s(\exp_{\mathfrak{h}_{m+n}}(V + Y)) = \exp_{\mathfrak{h}_{m+n}}(e^{\frac{s}{2}}V + e^s Y),$$

onde  $\exp_{\mathfrak{h}_{m+n}}$  é a exponencial de Lie de  $\mathbb{H}_{m+n}$ .

#### 4.3.1 O grupo $\mathbb{S}_4^3$

Seja  $\mathbb{S}_4^3$  o espaço de Damek-Ricci 4-dimensional Lorentziano e  $\{x, y, z, t\}$  coordenadas globais. A métrica Lorentziana invariante à esquerda  $g$  em  $\mathbb{S}_4^3$  é dada por

$$g = e^{-t}dx^2 + e^{-t}dy^2 - e^{-2t}(dz + \frac{c}{2}ydx - \frac{c}{2}xdy)^2 + dt^2,$$

onde  $c \in \mathbb{R}$ . A álgebra de Lie  $\mathfrak{s}_4^3$  de  $\mathbb{S}_4^3$  tem a base ortonormal

$$e_1 = e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{cy}{2}\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad e_2 = e^{\frac{t}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{cx}{2}\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad e_3 = e^t\frac{\partial}{\partial z}, \quad e_4 = \frac{\partial}{\partial t},$$

onde  $e_1, e_2, e_4$  são tipo-espaços e  $e_3$  tipo-tempo. Calculando os colchetes de Lie obtemos que

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = ce_3, & [e_1, e_3] = 0, & [e_1, e_4] = -\frac{1}{2}e_1, \\ [e_2, e_3] = 0, & [e_2, e_4] = -\frac{1}{2}e_2, & [e_3, e_4] = -e_3. \end{cases}$$

Escrevendo  $e_1 = U$ ,  $e_2 = V$ ,  $e_3 = X$  e  $e_4 = A$  e usando a equação da conexão (4.3.1) obtemos que:

- $\nabla_{e_1}e_1 = \nabla_U U = \frac{1}{2}\langle U, U \rangle A = \frac{1}{2}e_4,$

### 4.3 Segundo caso Lorentziano

---

- $\nabla_{e_1} e_2 = \nabla_U V = -\frac{1}{2}[V, U] = -\frac{1}{2}[e_2, e_1] = \frac{c}{2}e_3,$
- $\nabla_{e_1} e_3 = \nabla_U X = -\frac{1}{2}J_X U = \frac{c}{2}e_2.$  De fato,

$$\langle J_X U, U \rangle = \langle \beta(U, U), X \rangle = \langle [U, U], X \rangle = 0$$

e

$$\langle J_X U, V \rangle = \langle \beta(U, V), X \rangle = \langle [U, V], X \rangle = \langle ce_3, e_3 \rangle = -c.$$

Logo,  $J_X U = -c e_2.$

- $\nabla_{e_1} e_4 = \nabla_U A = -\frac{1}{2}U = -\frac{1}{2}e_1,$
- $\nabla_{e_2} e_1 = \nabla_V U = -\frac{1}{2}[U, V] = -\frac{1}{2}[e_1, e_2] = -\frac{c}{2}e_3,$
- $\nabla_{e_2} e_2 = \nabla_V V = \frac{1}{2}\langle V, V \rangle A = \frac{1}{2}e_4,$
- $\nabla_{e_2} e_3 = \nabla_V X = -\frac{1}{2}J_X V = -\frac{c}{2}e_1.$  De fato,

$$\langle J_X V, U \rangle = \langle \beta(V, U), X \rangle = \langle [V, U], X \rangle = \langle -ce_3, e_3 \rangle = c$$

e

$$\langle J_X V, V \rangle = \langle \beta(V, V), X \rangle = \langle [V, V], X \rangle = 0.$$

Logo,  $J_X U = c e_1.$

- $\nabla_{e_2} e_4 = \nabla_V A = -\frac{1}{2}V = -\frac{1}{2}e_2,$
- $\nabla_{e_3} e_1 = \nabla_X U = -\frac{1}{2}J_X U = \frac{c}{2}e_2,$
- $\nabla_{e_3} e_2 = \nabla_X V = -\frac{1}{2}J_X V = -\frac{c}{2}e_1,$
- $\nabla_{e_3} e_3 = \nabla_X X = \langle X, X \rangle A = -e_4,$
- $\nabla_{e_3} e_4 = \nabla_X A = -X = -e_3,$
- $\nabla_{e_4} e_1 = \nabla_A U = 0,$
- $\nabla_{e_4} e_2 = \nabla_A V = 0,$
- $\nabla_{e_4} e_3 = \nabla_A X = 0,$

#### 4. Representação de Weierstrass para espaços de Damek-Ricci

- $\nabla_{e_4} e_4 = \nabla_A A = 0.$

Por outro lado temos que

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_1^4 \frac{L_{ij}^k}{2} e_k.$$

Logo,

$$\begin{cases} L_{11}^4 = 1, & L_{12}^3 = c, & L_{13}^2 = c, & L_{14}^1 = -1, & L_{21}^3 = -c, & L_{22}^4 = 1 \\ L_{23}^1 = -c, & L_{24}^2 = -1, & L_{31}^2 = c, & L_{32}^1 = -c, & L_{33}^4 = -2, & L_{34}^3 = -2 \end{cases} \quad (4.3.2)$$

e os outros  $L_{ij}^k$  são nulos.

Seja  $\phi = \frac{\partial f}{\partial z}$ . Podemos escrever o campo tangente  $\phi$  tanto em termos de coordenadas locais  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , como usando os campos invariantes à esquerda. Portanto, temos que

$$\phi = \sum_{i=1}^4 \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^4 \psi_i e_i,$$

onde as funções  $\phi_i$  e  $\psi_i$  são funções (para)complexas. Existe uma matriz invertível  $A = (A_{ij})$ , com  $A_{ij} : f(\Omega) \cap U \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\Omega$  é domínio simplesmente conexo em  $\mathbb{K}$  (dado por  $\mathbb{L}$  ou  $\mathbb{C}$ ) tal que

$$\phi_i = \sum_{j=1}^4 A_{ij} \psi_j, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Logo,

$$A = \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{c}{2} e^{\frac{t}{2}} y & \frac{c}{2} e^{\frac{t}{2}} x & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,  $f$  é mínima se, e somente, se vale (3.2.7), ou seja,

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial \bar{z}} + \sum_{i,j=1}^4 \frac{1}{2} L_{ij}^k \bar{\psi}_i \psi_j = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (4.3.3)$$

**Lema 4.3.5.** O sistema (4.3.3) é equivalente a

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \psi_4 - c \operatorname{Re}(\bar{\psi}_2 \psi_3) = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_2 \psi_4 + c \operatorname{Re}(\bar{\psi}_1 \psi_3) = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi}_3 \psi_4 + \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1) = 0, \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2) - \bar{\psi}_3 \psi_3 = 0. \end{cases} \quad (4.3.4)$$

### 4.3 Segundo caso Lorentziano

*Demonstração.* Usando (4.3.2) e (4.3.3) temos que

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \psi_4 - \frac{c}{2} (\bar{\psi}_2 \psi_3 + \bar{\psi}_3 \psi_2) = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} \bar{\psi}_2 \psi_4 + \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_3 + \bar{\psi}_3 \psi_1) = 0, \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi}_3 \psi_4 + \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1) = 0, \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2) - \bar{\psi}_3 \psi_3 = 0, \end{cases} \quad (4.3.5)$$

que é equivalente ao sistema desejado.  $\square$

Logo temos o resultado:

**Teorema 4.3.6.** Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{K}$  um conjunto aberto dotado de uma coordenada (para)complexa. Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^3$  uma imersão mínima conforme. Então as componentes do vetor tangente (para)complexo

$$\phi = \frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \psi_i e_i, \quad (4.3.6)$$

satisfazem o sistema (4.3.4) e as seguintes condições

- i.  $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 > 0$ ,
- ii.  $\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2 + \psi_4^2 = 0$ .

Respectivamente, se  $\Omega$  é simplesmente conexo e  $\psi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{K}, i = 1, 2, 3, 4$  são funções satisfazendo as condições acima, então a aplicação

$$f_i = 2 \operatorname{Re} \left( \int \sum_{j=1}^4 A_{ij} \psi_j dz \right) \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.3.7)$$

é uma imersão mínima conforme do tipo tempo(ou tipo espaço) em  $\mathbb{S}_4^3$ .

#### 4.3.2 Exemplos

**Exemplo 4.3.7.** Considere as funções complexas

$$\psi_1 = \frac{i}{u}, \quad \psi_2 = \psi_3 = 0 \quad \text{e} \quad \psi_4 = \frac{1}{u}$$

em  $\Omega = \{u + iv \in \mathbb{C}; u > 0\}$ , que é um domínio simplesmente conexo. Note que os itens i. e ii. do Teorema 4.3.6 são satisfeitos, isto é,

#### 4. Representação de Weierstrass para espaços de Damek-Ricci

- i.  $\psi_1\bar{\psi}_1 + \psi_2\bar{\psi}_2 - \psi_3\bar{\psi}_3 + \psi_4\bar{\psi}_4 = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^2} \neq 0$ ,
- ii.  $\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2 + \psi_4^2 = -\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^2} = 0$ ,

Além disso, o sistema abaixo

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi_1}{\partial\bar{z}} = -\frac{i}{2u^2} = \frac{1}{2}\bar{\psi}_1\psi_4 + cRe(\bar{\psi}_2\psi_3), \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial\bar{z}} = 0 = \frac{1}{2}\bar{\psi}_2\psi_4 - cRe(\bar{\psi}_1\psi_3), \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial\bar{z}} = 0 = \bar{\psi}_3\psi_4 - \frac{c}{2}(\bar{\psi}_1\psi_2 - \bar{\psi}_2\psi_1), \\ \frac{\partial\psi_4}{\partial\bar{z}} = -\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2}(\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2) + \bar{\psi}_3\psi_3, \end{cases} \quad (4.3.8)$$

é verificado. Portanto, pelo Teorema 4.3.6, temos que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^3$  dada por

$$\begin{cases} f_1 = -\frac{2(v-v_0)}{u_0}, \\ f_2 = k, \\ f_3 = \frac{k_1(v-v_0)}{u_0}, \\ f_4 = 2\ln\left(\frac{u}{u_0}\right), \end{cases} \quad (4.3.9)$$

é uma imersão mínima conforme do tipo espaço em  $\mathbb{S}_4^3$ , com  $z_0 = u_0 + iv_0 \in \Omega$ .

**Exemplo 4.3.8.** Analogamente, considerando

$$\psi_1 = \psi_3 = 0, \quad \psi_2 = \frac{i}{2} \quad \text{e} \quad \psi_4 = \frac{1}{u}$$

obtemos que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^3$ , dada por

$$\begin{cases} f_1 = k, \\ f_2 = -\frac{2(v-v_0)}{u_0}, \\ f_3 = -\frac{k_1(v-v_0)}{u_0}, \\ f_4 = 2\ln\left(\frac{u}{u_0}\right), \end{cases} \quad (4.3.10)$$

é uma imersão mínima conforme do tipo-espaço em  $\mathbb{S}_4^3$ , com  $z_0 = u_0 + iv_0 \in \Omega$ .

### 4.3 Segundo caso Lorentziano

---

**Exemplo 4.3.9.** Tome as funções complexas

$$\psi_1 = \frac{1}{v}, \quad \psi_2 = \psi_3 = 0 \quad \text{e} \quad \psi_4 = \frac{-i}{v}.$$

em  $\Omega = \{u + iv \in \mathbb{C}; v > 0\}$ . Então

i.  $\psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2 - \psi_3 \bar{\psi}_3 + \psi_4 \bar{\psi}_4 = \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^2} \neq 0,$

ii.  $\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_3^2 + \psi_4^2 = \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^2} = 0,$

Além disso,

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} = \frac{-i}{2v^2} = \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \psi_4 + c \operatorname{Re}(\bar{\psi}_2 \psi_3), \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} = 0 = \frac{1}{2} \bar{\psi}_2 \psi_4 - c \operatorname{Re}(\bar{\psi}_1 \psi_3), \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} = 0 = \bar{\psi}_3 \psi_4 - \frac{c}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_2 - \bar{\psi}_2 \psi_1), \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} = \frac{-1}{2v^2} = -\frac{1}{2} (\bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2) + \bar{\psi}_3 \psi_3, \end{cases} \quad (4.3.11)$$

uma vez que  $\psi_2 = \psi_3 = 0$ . Portanto, pelo Teorema 4.3.6, temos que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^3$  dada por

$$\begin{cases} f_1 = \frac{2(u - u_0)}{v_0}, \\ f_2 = k, \\ f_3 = -\frac{k_1(u - u_0)}{v_0}, \\ f_4 = 2 \ln \left( \frac{v}{v_0} \right) \end{cases} \quad (4.3.12)$$

é uma imersão mínima conforme do tipo-espaço em  $\mathbb{S}_4^3$ , com  $z_0 = u_0 + iv_0 \in \Omega$ .

**Exemplo 4.3.10.** Tomando as funções complexas

$$\psi_1 = \psi_2 = \frac{i}{\sqrt{2}u}, \quad \psi_3 = 0 \quad \text{e} \quad \psi_4 = \frac{1}{u}$$

em  $\Omega = \{u + iv \in \mathbb{C}; u > 0\}$  temos que os itens i. e ii. do Teorema 4.3.6 são satisfeitos, isto é,

i.  $\psi_1 \bar{\psi}_1 + \psi_2 \bar{\psi}_2 - \psi_3 \bar{\psi}_3 + \psi_4 \bar{\psi}_4 = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^2} \neq 0,$

ii.  $\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 - \psi_4^2 = -\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^2} = 0,$

#### 4. Representação de Weierstrass para espaços de Damek-Ricci

Além disso, o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} = -\frac{i}{2\sqrt{2}u^2} = \frac{1}{2}\bar{\psi}_1\psi_4 + cRe(\bar{\psi}_2\psi_3), \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} = -\frac{i}{2\sqrt{2}u^2} = \frac{1}{2}\bar{\psi}_2\psi_4 - cRe(\bar{\psi}_1\psi_3), \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} = 0 = \bar{\psi}_3\psi_4 - \frac{c}{2}(\bar{\psi}_1\psi_2 - \bar{\psi}_2\psi_1), \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2}(\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2) + \bar{\psi}_3\psi_3 \end{cases} \quad (4.3.13)$$

é satisfeito. Portanto, pelo Teorema 4.3.6, temos que  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^1$  dada por

$$\begin{cases} f_1 = -\frac{2(v-v_0)}{u_0}, \\ f_2 = -\frac{2(v-v_0)}{u_0}, \\ f_3 = k, \\ f_4 = 2 \ln\left(\frac{u}{u_0}\right) \end{cases} \quad (4.3.14)$$

é uma imersão mínima conforme do tipo espaço em  $\mathbb{S}_4^3$ , com  $z_0 = u_0 + iv_0 \in \Omega$ .

**Exemplo 4.3.11.** Considere as funções paracomplexas

$$\psi_1 = \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = \frac{\tau}{2u}, \quad \text{e} \quad \psi_4 = \frac{1}{2u}$$

em  $\Omega = \{u + \tau v \in \mathbb{L}; u > 0\}$ . Como as hipóteses i. e ii. do Teorema 4.3.6 são verificados e o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} = 0 = \frac{1}{2}\bar{\psi}_1\psi_4 + cRe(\bar{\psi}_2\psi_3), \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} = 0 = \frac{1}{2}\bar{\psi}_2\psi_4 - cRe(\bar{\psi}_1\psi_3), \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} = -\frac{\tau}{4u^2} = \bar{\psi}_3\psi_4 - \frac{c}{2}(\bar{\psi}_1\psi_2 - \bar{\psi}_2\psi_1), \\ \frac{\partial \psi_4}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2}(\bar{\psi}_1\psi_1 + \bar{\psi}_2\psi_2) + \bar{\psi}_3\psi_3 \end{cases} \quad (4.3.15)$$

vale. Então  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_4^3$ , dada por

$$\begin{cases} f_1 = k_1, \\ f_2 = k_2, \\ f_3 = \frac{(v-v_0)}{u_0}, \\ f_4 = \ln\left(\frac{u}{u_0}\right) \end{cases} \quad (4.3.16)$$

é uma imersão mínima conforme do tipo-tempo em  $\mathbb{S}_4^3$ , com  $z_0 = u_0 + \tau v_0 \in \Omega$ .

# Capítulo 5

## O Problema de Björling

O objetivo desse capítulo é mostrar como a fórmula da Representação de Weierstrass pode ser usada no caso em que o espaço ambiente é um grupo de Lie 3-dimensional Lorentziano para provar a existência e unicidade da solução do Problema Björling. Relembramos que o Problema de Björling clássico foi proposto por Björling (veja [7]) em 1844 e pode ser formulado da seguinte maneira:

Dada uma curva real analítica  $\beta : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$  e um campo de vetores analítico unitário  $V$  ao longo de  $\beta$ , com  $\langle \dot{\beta}, V \rangle = 0$ , determinar uma superfície mínima  $f : I \times (-\epsilon, \epsilon) = \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

- i.  $f(u, 0) = \beta(u)$ ,
- ii.  $N(u, 0) = V(u)$ ,

para todo  $u \in I$ , onde  $N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  é a aplicação normal de Gauss da superfície.

Este problema foi resolvido por Schwarz em 1890 (ver [23]) e algumas extensões desse problema em outros espaços ambientes, como por exemplos grupos de Lie tridimensionais Riemannianos e o espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^3$  foram propostos e resolvidos em [1],[3], [9] e [17].

Neste capítulo primeiramente iremos formular e resolver o problema de Björling para superfícies mínimas em grupos de Lie Lorentzianos 3-dimensionais. No caso de superfícies mínimas do tipo tempo consideraremos dois casos: quando  $\beta$  é uma curva do tipo tempo e chamaremos o problema correspondente de *Problema de Björling do tipo tempo*, e quando  $\beta$  é uma curva do tipo espaço e chamaremos de *Problema de Björling do tipo espaço*. Em seguida nós iremos apresentar alguns exemplos de superfícies mínimas construídas através do Teorema de Björling para o caso em que o espaço ambiente é o grupo de Heisenberg  $\mathbb{H}_3$ , para o espaço de De Sitter  $\mathbb{S}_1^3$  e para o espaço  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , dotados de uma métrica Lorentziana invariante à esquerda (veja [10]).

## 5.1 Problema de Björling em grupos de Lie Lorentzianos 3-dimensionais

Seja  $M$  um grupo de Lie 3-dimensional dotado de uma métrica Lorentziana invariante à esquerda  $g$ . Denotaremos por  $\Omega \subseteq \mathbb{K}$ , onde  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{L}$ , um domínio simplesmente conexo com coordenadas (para)complexas  $z$ .

Seja  $\beta : I \rightarrow M$  uma curva analítica e  $V : I \rightarrow TM$  um campo de vetores do tipo-espaço (respectivamente do tipo-tempo) unitários analíticos ao longo de  $\beta$  e tal que  $g(\dot{\beta}, V) \equiv 0$ . O problema de Björling consiste em determinar uma superfície mínima do tipo-tempo (respectivamente do tipo-espaço)  $f : I \times (-\epsilon, \epsilon) = \Omega \subseteq \mathbb{K} \rightarrow M$  tal que

- i.  $f(u, 0) = \beta(u)$ ,
- ii.  $N(u, 0) = V(u)$ ,

para todo  $u \in I$ , onde  $N : \Omega \rightarrow TM$  é a aplicação normal de Gauss da superfície.

**Lema 5.1.1.** Sejam  $\psi_i : \Omega \subseteq \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $i = 1, 2$ , duas funções diferenciáveis e  $\psi_3^2 = \psi_1^2 + \psi_2^2$ . Suponhamos que  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2$ , satisfazem as duas primeiras equações do item (iii) do Teorema 3.2.11. Então  $\psi_3$  satisfaz a terceira equação.

*Demonstração.* Derivando  $\psi_3^2 = \psi_1^2 + \psi_2^2$  com respeito a  $\bar{z}$  e usando que  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2$ , satisfazem as duas primeiras equações do item (iii) do Teorema 3.2.11 temos que

$$\begin{aligned} \psi_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} &= \psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} + \psi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 [L_{jk}^1 \psi_1 + L_{jk}^2 \psi_2] \bar{\psi}_j \psi_k. \end{aligned}$$

Portanto, para provar o lema, basta mostrar que

$$\sum_{j,k=1}^3 [L_{jk}^1 \psi_1 + L_{jk}^2 \psi_2 - L_{jk}^3 \psi_3] \bar{\psi}_j \psi_k = 0.$$

Podemos escrever a soma acima da seguinte maneira

$$\sum_{i=1}^3 \{L_{i1}^1 \psi_1^2 + L_{i2}^2 \psi_2^2 - L_{i3}^3 \psi_3^2 + (L_{i1}^2 + L_{i2}^1) \psi_1 \psi_2 + (L_{i3}^1 - L_{i1}^3) \psi_1 \psi_3 + (L_{i3}^2 - L_{i2}^3) \psi_3 \psi_2\} \bar{\psi}_i.$$

De (3.2.8) temos que  $L_{ik}^k = L_{i1}^2 + L_{i2}^1 = L_{i3}^1 - L_{i1}^3 = L_{i3}^2 - L_{i2}^3 = 0$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Logo,

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 L_{jk}^3 \bar{\psi}_j \psi_k = 0.$$

□

## 5.1 Problema de Björling em grupos de Lie Lorentzianos 3-dimensionais

Portanto, pelo Lema 5.1.1, basta analisar as duas primeiras equações da condição iii. do Teorema 3.2.11.

### 5.1.1 Para superfícies do tipo tempo

Observe que se  $f$  é uma imersão mínima conforme do tipo tempo as duas primeiras equações da condição iii. do Teorema 3.2.11 é equivalentemente ao sistema de equações diferenciáveis parciais de primeira ordem:

$$\begin{cases} \frac{\partial \operatorname{Re} \psi_1}{\partial u} - \frac{\partial \operatorname{Im} \psi_1}{\partial v} + \sum_{j,k=1}^3 L_{jk}^1 [\operatorname{Re} \psi_j \operatorname{Re} \psi_k - \operatorname{Im} \psi_j \operatorname{Im} \psi_k] = 0, \\ \frac{\partial \operatorname{Im} \psi_1}{\partial u} - \frac{\partial \operatorname{Re} \psi_1}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial \operatorname{Re} \psi_2}{\partial u} - \frac{\partial \operatorname{Im} \psi_2}{\partial v} + \sum_{j,k=1}^3 L_{jk}^2 [\operatorname{Re} \psi_j \operatorname{Re} \psi_k - \operatorname{Im} \psi_j \operatorname{Im} \psi_k] = 0, \\ \frac{\partial \operatorname{Im} \psi_2}{\partial u} - \frac{\partial \operatorname{Re} \psi_2}{\partial v} = 0, \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Logo, o problema de Björling pode ser interpretado como um problema de existência e unicidade de soluções do problema de Cauchy envolvendo as equações diferenciáveis parciais quasilineares (5.1.1), com dado iniciais:

$$\psi(u, 0) = A^{-1}(\beta(u)) \phi(u, 0),$$

onde

$$\phi(u, 0) = \frac{1}{2} (\dot{\beta}(u) \pm \tau V(u) \times \dot{\beta}(u)). \quad (5.1.2)$$

Sejam  $u_1 = \operatorname{Re} \psi_1$ ,  $u_2 = \operatorname{Im} \psi_1$ ,  $u_3 = \operatorname{Re} \psi_2$  e  $u_4 = \operatorname{Im} \psi_2$ . Então o sistema acima é escrito na forma

$$\begin{cases} F(u, v, (\partial^\alpha U)|_{|\alpha| \leq 1}) = 0, \\ u_1(u, 0) = \operatorname{Re} \left[ \left( A^{-1}(\beta(u)) \phi(u, 0) \right)_1 \right], \\ u_2(u, 0) = \operatorname{Im} \left[ \left( A^{-1}(\beta(u)) \phi(u, 0) \right)_1 \right], \\ u_3(u, 0) = \operatorname{Re} \left[ \left( A^{-1}(\beta(u)) \phi(u, 0) \right)_2 \right], \\ u_4(u, 0) = \operatorname{Im} \left[ \left( A^{-1}(\beta(u)) \phi(u, 0) \right)_2 \right], \end{cases} \quad (5.1.3)$$

onde  $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ . Agora como a curva  $\beta(u)$  e o campo de vetores são analíticos, para verificar que o sistema pode ser transformado em do tipo Cauchy-Kovalevskaya, temos que mostrar que  $F = (F_1, F_2, F_3, F_4)$  é analítica e tomar os dados iniciais sobre curvas não características analíticas.

Claramente  $F$  é analítica pois o sistema possui coeficientes constantes.

Seja  $\gamma(s) = (u(s), v(s))$  uma curva característica em  $\Omega$ , então

$$\det \begin{bmatrix} u'(s) & -v'(s) & 0 & 0 \\ -v'(s) & u'(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u'(s) & -v'(s) \\ 0 & 0 & -v'(s) & u'(s) \end{bmatrix} = 0$$

isto é,  $u'(s)^2 - v'(s)^2 = 0$ . Logo,  $\gamma(s)$  são retas paralelas a  $u = \pm v$  em  $\Omega$ .

Essas retas correspondem as curvas do tipo-luz. De fato, como  $\beta(u) = f(u, \pm u)$ , então  $\dot{\beta}(u) = f_u(u, \pm u) \pm f_v(u, \pm u)$ . Uma vez que  $f$  é conforme temos que

$$g\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) = -g\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) \text{ e } g\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0.$$

Logo,

$$g(\dot{\beta}(u), \dot{\beta}(u)) = g(f_u \pm f_v, f_u \pm f_v) = g(f_u, f_u) \pm 2g(f_u, f_v) + g(f_v, f_v) = 0.$$

Portanto  $\beta(u)$  é uma curva do tipo-luz.

É conhecido que o problema de Cauchy pode não ter solução única, ou não ter solução, se os dados iniciais são sobre as curvas características (veja [6], [12] e [22]) e o Problema de Björling pode não ter solução única ou nem ter solução.

Por causa disso, dividiremos o problema em dois casos e usaremos a nomenclatura definida em [9]. Se  $\beta$  uma curva do tipo-tempo, chamaremos o correspondente problema de **problema de Björling do tipo-tempo** e se  $\beta$  for do tipo-espaço, chamaremos de **problema de Björling do tipo-espaço**.

**Teorema 5.1.2 (Problema de Björling do tipo-tempo).** Seja  $\beta : I \rightarrow M$  uma curva analítica regular do tipo-tempo e  $V : I \rightarrow TM$  um campo de vetores unitários do tipo-espaço tal que  $g(\dot{\beta}, V) \equiv 0$ . Então, existe uma única superfície mínima conforme do tipo-tempo

$$f : I \times (-\epsilon, \epsilon) = \Omega \subseteq \mathbb{L} \rightarrow M,$$

tal que

- i.  $f(u, 0) = \beta(u)$ ,
- ii  $N(u, 0) = V(u)$ ,

para todo  $u \in I$ , onde  $N : \Omega \rightarrow TM$  é a aplicação de Gauss da superfície.

## 5.1 Problema de Björling em grupos de Lie Lorentzianos 3-dimensionais

---

*Demonstração.* Considere o sistema de equações abaixo

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 L_{jk}^1 \bar{\psi}_j \psi_k = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 L_{jk}^2 \bar{\psi}_j \psi_k = 0, \end{cases} \quad (5.1.4)$$

onde  $\psi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{L}$  e  $\psi_3^2 = \psi_1^2 + \psi_2^2$ . Como  $\beta(u)$  é não característica temos que esse sistema é do tipo Cauchy-Kovaleskaya então, fixando os dados iniciais pelo Teorema de Cauchy-Kovaleskaya B.0.10, o sistema tem uma única solução localmente. Portanto temos que fixar a condição inicial. Se  $f$  é solução do problema de Björling temos que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, 0) = \dot{\beta}(u). \quad (5.1.5)$$

Como  $f$  é conforme temos que

$$g\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) = -g\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = -\lambda \quad \text{e} \quad g\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0,$$

com  $\lambda > 0$ . Assim obtemos que

$$g\left(\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \lambda^2.$$

Logo,

$$N(u, v) = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

e, portanto,

$$V(u) = N(u, 0) = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial f}{\partial u}(u, 0) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u, 0) \right) = \frac{1}{\lambda} \left( \dot{\beta}(u) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u, 0) \right).$$

Usando o item (ii) do Lema 1.2.1 temos que

$$V(u) \times \dot{\beta}(u) = \frac{1}{\lambda} \left( \dot{\beta}(u) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u, 0) \right) \times \dot{\beta}(u) = \frac{\partial f}{\partial v}(u, 0).$$

Consequentemente,

$$\phi(u, 0) = \frac{1}{2} \left( \dot{\beta}(u) + \tau V(u) \times \dot{\beta}(u) \right). \quad (5.1.6)$$

Portanto, o dado inicial para o sistema é

$$\psi(u, 0) = A^{-1}(\beta(u)) \phi(u, 0).$$

Observe que pelo Lema 5.1.1 temos que as funções  $\psi_i$  satisfazem a equação (iii) do Teorema da representação de Weierstrass 3.2.11. Além disso, de (5.1.6), resulta que

$$\langle\langle\phi(u, 0), \phi(u, 0)\rangle\rangle = \frac{1}{4}[g(\dot{\beta}, \dot{\beta}) - g(V \times \dot{\beta}, V \times \dot{\beta})] < 0,$$

pois usando o Lema 1.2.1 temos  $g(V \times \dot{\beta}, V \times \dot{\beta}) = -g(\dot{\beta}, \dot{\beta})$  e  $\beta$  é uma curva do tipo tempo.

Podemos assumir, a menos de restringir o domínio, que  $\langle\langle\phi(u, v), \phi(u, v)\rangle\rangle < 0$  em  $\Omega$ . Logo, como  $A$  é uma matriz Jacobiana da translação à esquerda de  $G$  que é invariante, temos então que

$$|\psi_1(u, v)|^2 + |\psi_2(u, v)|^2 - |\psi_3(u, v)|^2 = \langle\langle\phi(u, v), \phi(u, v)\rangle\rangle < 0, \quad (u, v) \in \Omega.$$

Portanto as funções  $\psi_i$  satisfazem as condições do Teorema da Representação Weierstrass 3.2.11. Logo existe uma imersão mínima conforme do tipo-tempo. Do Teorema de Cauchy-Kovaleskaya, pela condição  $\psi_3^2 = \psi_1^2 + \psi_2^2$  e ainda pela condição inicial temos uma única escolha para  $\psi_3$ , o que garante a unicidade. Portanto temos a existência de solução local.

Podemos considerar  $I$  como sendo compacto. Se  $\beta(I)$  está contido em uma vizinhança coordenada temos existência e unicidade de solução, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, pois localmente a solução é única e  $I$  é compacto. Se não estiver, como  $I$  é compacto podemos cobri-lo com um número finito de imagens inversas de vizinhanças coordenadas através de  $\beta(u)$  e, usando novamente a unicidade local da solução do problema, temos a solução global.  $\square$

**Teorema 5.1.3 (Problema de Björling do tipo-espaço).** Seja  $\beta : I \rightarrow M$  uma curva regular analítica do tipo-espaço e  $V : I \rightarrow TM$  um campo de vetores unitários do tipo-espaço tal que  $g(\dot{\beta}, V) \equiv 0$ . Então existe uma única superfície mínima conforme do tipo-tempo

$$f : I \times (-\epsilon, \epsilon) = \Omega \subseteq \mathbb{L} \rightarrow M$$

tal que:

- i.  $f(u, 0) = \beta(u)$ ,
- ii  $N(u, 0) = V(u)$ ,

para todo  $u \in I$ , onde  $N : \Omega \rightarrow TM$  é a aplicação de Gauss da superfície.

*Demonstração.* A demonstração segue analogamente ao caso do Problema de Björling do tipo-tempo, tomando o cuidado que

$$g\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) = -g\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \lambda \quad \text{e} \quad g\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0,$$

com  $\lambda > 0$ . Assim

$$\phi(u, 0) = \frac{1}{2}(\dot{\beta}(u) - \tau V(u) \times \dot{\beta}(u)).$$

$\square$

### 5.1.2 Para superfícies do tipo espaço

Neste caso as duas primeiras equações da condição *iii*) do Teorema 3.2.11 é equivalente ao sistema de equações diferenciáveis parciais de primeira ordem: (veja [6], [12] e [22]):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \operatorname{Re} \psi_1}{\partial u} - \frac{\partial \operatorname{Im} \psi_1}{\partial v} + \sum_{j,k=1}^3 L_{jk}^1 \bar{\psi}_j \psi_k = 0, \\ \frac{\partial \operatorname{Im} \psi_1}{\partial u} + \frac{\partial \operatorname{Re} \psi_1}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial \operatorname{Re} \psi_2}{\partial u} - \frac{\partial \operatorname{Im} \psi_2}{\partial v} + \sum_{j,k=1}^3 L_{jk}^2 \bar{\psi}_j \psi_k = 0, \\ \frac{\partial \operatorname{Im} \psi_2}{\partial u} + \frac{\partial \operatorname{Re} \psi_2}{\partial v} = 0. \end{array} \right. \quad (5.1.7)$$

Logo, o problema de Björling pode ser interpretado como um problema de existência e unicidade de soluções do problema de Cauchy envolvendo as equações diferenciáveis parciais quase lineares (5.1.7), com dado inicial:

$$\psi(u, 0) = A^{-1}(\beta(u)) \phi(u, 0),$$

onde

$$\phi(u, 0) = \frac{1}{2}(\dot{\beta}(u) + iV(u) \times \dot{\beta}(u)).$$

Seja  $\gamma(s) = (u(s), v(s))$  uma curva característica em  $\Omega$ , então

$$\det \begin{bmatrix} u'(s) & -v'(s) & 0 & 0 \\ v'(s) & u'(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u'(s) & -v'(s) \\ 0 & 0 & v'(s) & u'(s) \end{bmatrix} = 0$$

isto é,  $u'(s)^2 + v'(s)^2 = 0$ . Logo o sistema não possui curvas características. Portanto podemos usar novamente o Teorema Cauchy-Kovalevskaya para mostrar que o problema possui uma única solução e a demonstração é análoga ao caso de superfícies do tipo tempo.

**Teorema 5.1.1 (Problema de Björling).** Seja,  $\beta : I \rightarrow M$  uma curva regular analítica do tipo espaço em  $M$  e  $V : I \rightarrow TM$  um campo de vetores analíticos unitários do tipo tempo ao longo de  $\beta$ , tais que  $g(\dot{\beta}, V) \equiv 0$ . Então existe uma única superfície mínima conforme do tipo espaço

$$f : I \times (-\epsilon, \epsilon) = \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow M$$

tal que:

- i.  $f(u, 0) = \beta(u)$ ,
- ii  $N(u, 0) = V(u)$ ,

para todo  $u \in I$ , onde  $N : \Omega \rightarrow TM$  é a aplicação de Gauss da superfície.

## 5.2 Grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3$

O grupo de Heisenberg  $\mathbb{H}_3$  é um grupo de Lie nilpotente de grau 2 representado por

$$\mathbb{H}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & z + \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

A álgebra de Lie  $\mathfrak{h}_3$  de  $\mathbb{H}_3$  é representada pelas matrizes da forma

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Seja  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{H}_3$  a aplicação dada por

$$\varphi(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & x & z + \frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O grupo de Heisenberg é isomorfo a  $\mathbb{R}^3$  com o produto

$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1y_2 - y_1x_2)),$$

onde esse isomorfismo é dado por  $\varphi$ . Considere a métrica Lorentziana invariante à esquerda

$$g = dx^2 + dy^2 - \left( \frac{1}{2}ydx - \frac{1}{2}xdy + dz \right)^2.$$

Uma base ortonormal de campos invariantes à esquerda é dada por

$$E_1(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad E_2(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{e} \quad E_3(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z},$$

com  $\{E_1, E_2\}$  tipo-espaço e  $E_3$  tipo-tempo. Logo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{y}{2} & \frac{x}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

## 5.2 Grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3$

---

assim

$$\begin{cases} f_1 = 2 \operatorname{Re}(\int \psi_1 dz), \\ f_2 = 2 \operatorname{Re}(\int \psi_2 dz), \\ f_3 = 2 \operatorname{Re} \int \left( -\frac{f_2}{2}\psi_1 + \frac{f_1}{2}\psi_2 + \psi_3 \right) dz. \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Temos que os únicos  $L_{ij}^k$  não nulos são

$$L_{12}^3 = L_{13}^2 = L_{31}^2 = \frac{1}{2} \text{ e } L_{21}^3 = L_{32}^1 = L_{23}^1 = -\frac{1}{2}.$$

O sistema (5.1.4) se escreve como:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \operatorname{Re}(\bar{\psi}_3 \psi_2) = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} + \operatorname{Re}(\bar{\psi}_3 \psi_1) = 0. \end{cases} \quad (5.2.2)$$

**Exemplo 5.2.1.** [Plano vertical do tipo tempo  $y = c$  - caso tipo-tempo] Sejam

$$\beta(u) = (\cosh u, c, -\frac{c}{2} \cosh u + \sinh u)$$

e  $V(u) = E_2$ , com  $I = (a, b)$ . Como

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(u) &= (\sinh u, 0, -\frac{c}{2} \sinh u + \cosh u) \\ &= \sinh u (1, 0, -c/2) + \cosh u (0, 0, 1) \\ &= \sinh u E_1 + \cosh u E_3 \end{aligned}$$

então  $g(\dot{\beta}(u), \dot{\beta}(u)) = -1$ . Além disso,  $g(V(u), V(u)) = 1$  e  $g(\dot{\beta}(u), V(u)) = 0$ . Portanto temos um problema de Björling do tipo-tempo. Como

$$E_2 \times E_1 = E_3 \quad \text{e} \quad E_2 \times E_3 = E_1,$$

então  $V(u) \times \dot{\beta}(u) = \sinh u E_3 + \cosh u E_1$ . Portanto, obtemos que

$$\phi(u, 0) = \frac{1}{2}(\dot{\beta}(u) + \tau V \times \dot{\beta}(u)) = \frac{1}{2}[(\sinh u + \tau \cosh u)E_1 + (\cosh u + \tau \sinh u)E_2].$$

Logo,

$$\begin{cases} \phi_1(u, 0) = \frac{1}{2}(\sinh u + \tau \cosh u), \\ \phi_2(u, 0) = 0, \\ \phi_3(u, 0) = \frac{c}{2}(\sinh u + \tau \cosh u) + \frac{1}{2}(\cosh u + \tau \sinh u). \end{cases}$$

Portanto,

$$\psi(u, 0) = A^{-1}(\beta(u))\phi(u, 0) = \frac{1}{2}(\sinh u + \tau \cosh u, 0, \cosh u + \tau \sinh u). \quad (5.2.3)$$

A solução de (5.2.2) que satisfaz (5.2.3) é

$$\begin{cases} \psi_1(u, v) = \frac{1}{2}(\sinh u + \tau \cosh u) \exp v, \\ \psi_2(u, v) = 0, \\ \psi_3(u, v) = \frac{1}{2}(\cosh u + \tau \sinh u) \exp v. \end{cases} \quad (5.2.4)$$

Além disso (5.2.4) satisfaz as condições do Teorema 5.1.2. Portanto, integrando (5.2.1), temos que

$$f(u, v) = (\cosh u \exp v, c, (-\frac{c}{2} \cosh u + \sinh u) \exp v)$$

é a imersão mínima conforme desejada.

**Exemplo 5.2.2. [Plano vertical do tipo tempo  $y = c$  - caso tipo espaço]** Sejam

$$\beta(u) = (\sinh u, c, -\frac{c}{2} \sinh u + \cosh u)$$

e  $V(u) = E_2$ , com  $I = (a, b)$ . Como

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(u) &= (\cosh u, 0, -\frac{c}{2} \cosh u + \sinh u) \\ &= \cosh u(1, 0, -c/2) + \sinh u(0, 0, 1) \\ &= \cosh u E_1 + \sinh u E_3, \end{aligned}$$

então  $g(\dot{\beta}(u), \dot{\beta}(u)) = 1$ . Além disso,  $g(V(u), V(u)) = 1$  e  $g(\dot{\beta}(u), V(u)) = 0$ . Portanto temos um *problema de Björling do tipo-espaço*. Como

$$E_2 \times E_1 = E_3 \quad \text{e} \quad E_2 \times E_3 = E_1.$$

então  $V(u) \times \dot{\beta}(u) = \cosh u E_3 + \sinh u E_1$ . Portanto, obtemos que

$$\phi(u, 0) = \frac{1}{2}(\dot{\beta}(u) - \tau V(u) \times \dot{\beta}(u)) = \frac{1}{2}[(\cosh u - \tau \sinh u)E_1 + (\sinh u - \tau \cosh u)E_2].$$

Logo,

$$\begin{cases} \phi_1(u, 0) = \frac{1}{2}(\cosh u - \tau \sinh u), \\ \phi_2(u, 0) = 0, \\ \phi_3(u, 0) = \frac{c}{2}(\cosh u - \tau \sinh u) + \frac{1}{2}(\sinh u - \tau \cosh u) \end{cases} \quad (5.2.5)$$

## 5.2 Grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3$

e

$$\psi(u, 0) = A^{-1}(\beta(u))\phi(u, 0) = \frac{1}{2}(\cosh u - \tau \sinh u, 0, \sinh u - \tau \cosh u). \quad (5.2.6)$$

A solução de (5.2.2) que satisfaz (5.2.6) é dada por:

$$\begin{cases} \psi_1(u, v) = \frac{1}{2}(\cosh u - \tau \sinh u) \exp(-v), \\ \psi_2(u, v) = 0, \\ \psi_3(u, v) = \frac{1}{2}(\sinh u - \tau \cosh u) \exp(-v). \end{cases} \quad (5.2.7)$$

Além disso (5.2.7) satisfaz as condições do Teorema 5.1.3. Portanto, integrando (5.2.1), temos que:

$$f(u, v) = (\sinh u \exp(-v), c, (-\frac{c}{2} \sinh u + \cosh u) \exp(-v))$$

é a imersão mínima conforme desejada.

**Exemplo 5.2.3. [Helicóides]** Sejam  $\beta(u) = (\rho(u), 0, b)$  definida em  $I = [a, d]$  e

$$V(u) = \frac{\rho^2(u) - 2c}{2\rho'(u)}E_2 - \frac{\rho(u)}{\rho'(u)}E_3$$

onde  $b, c \in \mathbb{R}$  e  $\rho$  é uma função diferenciável real que satisfaz

$$\sqrt{\rho'(u)^2 + \rho^2(u)} = \frac{\rho^2(u)}{2} - c.$$

Como  $\dot{\beta}(u) = \rho'(u)E_1$ , então  $g(\dot{\beta}(u), \dot{\beta}(u)) = \rho^2(u)$ . Assim temos um problema de Björling do tipo-espaço. Além disso,  $g(V(u), V(u)) = 1$  e  $g(\dot{\beta}(u), V(u)) = 0$ . Como  $E_2 \times E_1 = E_3$  e  $E_3 \times E_1 = E_2$ , obtemos que

$$V(u) \times \dot{\beta}(u) = \frac{\rho^2(u) - 2c}{2}E_3 - \rho(u)E_2 = -\rho(u)\frac{\partial}{\partial y} - c\frac{\partial}{\partial z}.$$

Logo,

$$\phi(u, 0) = \left( \frac{\rho'(u)}{2}, \frac{\rho(u)\tau}{2}, \frac{c\tau}{2} \right).$$

Portanto,

$$\psi(u, 0) = \left( \frac{\rho'(u)}{2}, \frac{\rho(u)\tau}{2}, -\frac{\tau(\rho(u)^2 - 2c)}{4} \right). \quad (5.2.8)$$

A solução de (5.2.2) que satisfaz (5.2.8) é

$$\begin{cases} \psi_1(u, v) = \frac{1}{2}(\rho'(u) \cos v - \tau \rho(u) \sin v), \\ \psi_2(u, v) = \frac{1}{2}(\rho'(u) \sin v + \tau \rho(u) \cos v), \\ \psi_3(u, v) = -\frac{\tau}{4}(\rho^2(u) - 2c). \end{cases} \quad (5.2.9)$$

Além disso (5.2.9) satisfaz as condições do Teorema 5.1.3. Portanto, integrando (5.2.1), temos que

$$f(u, v) = (\rho(u) \cos v, \rho(u) \sin v, cv + b)$$

é a imersão mínima conforme desejada.

**Exemplo 5.2.4. [Superfície tipo-sela]** Sejam  $\beta(u) = (4cu, -4Q(0), -8cuQ(0))$  uma curva diferenciável em  $I = [a, b]$  e

$$V(u) = -\frac{4cQ(0)}{Q'(0)}E_1 + \frac{c}{Q'(0)}E_3,$$

onde  $c \in \mathbb{R}$  e  $Q(v)$  é uma função diferenciável real que satisfaz

$$4cQ(v) = \sqrt{Q'(v)^2 + c^2}$$

e  $Q'(v) \neq 0$  para todo  $v \in \mathbb{R}$ . Como  $\dot{\beta}(u) = 4cE_1 - 16cQ(0)E_3$ , então  $g(\dot{\beta}(u), \dot{\beta}(u)) = -16Q'(0)^2$ . Assim temos um problema de Björling do tipo-tempo. Além disso,  $g(V(u), V(u)) = 1$  e  $g(\dot{\beta}(u), V(u)) = 0$ . Resulta que

$$V(u) \times \dot{\beta}(u) = -4Q'(0)E_2.$$

Logo,

$$\phi(u, 0) = (2c, -2Q'(0)\tau, -4cQ(0) - 4aQ'(0)\tau).$$

Portanto,

$$\psi(u, 0) = (2c, -2Q'(0), -8cuQ(0)). \quad (5.2.10)$$

A solução do sistema (5.2.2) que satisfaz (5.2.10) é

$$\begin{cases} \psi_1(u, v) = 2c, \\ \psi_2(u, v) = -2Q'(v), \tau \\ \psi_3(u, v) = -8cQ(v). \end{cases} \quad (5.2.11)$$

Além disso (5.2.11) satisfaz as condições do Teorema 5.1.2. Portanto, integrando (5.2.1), temos que

$$f(u, v) = (4cu, -4Q(v), -8cuQ(v))$$

é a imersão mínima conforme desejada.

A imagem da imersão está contida no gráfico da função  $z = \frac{1}{2}xy$  e é uma superfície do tipo sela.

## 5.3 O espaço de De Sitter $\mathbb{S}_1^3$

O espaço de De Sitter  $\mathbb{S}_1^3$  pode ser modelado com o semi-espaço

$$\mathbb{R}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$$

dotado com a métrica Lorentziana invariante à esquerda dada por

$$g = \frac{1}{x_3^2}(dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2).$$

Uma base ortonormal de campos invariantes à esquerda é dada por

$$E_1 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad E_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{e} \quad E_3 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

com  $\{E_1, E_2\}$  do tipo-espaço e  $E_3$  do tipo-tempo. Logo,

$$A = \begin{bmatrix} x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{cases} f_1 = 2 \operatorname{Re} \left( \int f_3 \psi_1 dz \right), \\ f_2 = 2 \operatorname{Re} \left( \int f_3 \psi_2 dz \right), \\ f_3 = \exp \left( 2 \operatorname{Re} \int \psi_3 dz \right). \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Temos que os únicos  $L_{ij}^k$  não nulos são  $L_{13}^1 = L_{23}^2 = L_{11}^3 = L_{22}^3 = -1$ . Assim (5.1.4) se escreve como:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi}_1 \psi_3 = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} - \bar{\psi}_2 \psi_3 = 0. \end{cases} \quad (5.3.2)$$

**Exemplo 5.3.1. [Plano vertical  $y = c$  do tipo-tempo]** Sejam  $\beta(u) = (\sinh u, c, \cosh u)$ , com  $I = (a, b)$  e  $V(u) = E_2$ . Como

$$\dot{\beta}(u) = E_1 + \frac{\sinh u}{\cosh u} E_3,$$

então

$$g(\dot{\beta}(u), \dot{\beta}(u)) = \frac{1}{\cosh^2(u)} > 0.$$

Assim temos um *problema de Björling do tipo-espaço*. Além disso,  $g(V(u), V(u)) = 1$  e  $g(\dot{\beta}(u), V(u)) = 0$ . Dado que

$$V(u) \times \dot{\beta}(u) = E_3 + \frac{\sinh u}{\cosh u} E_1 = (\sinh u, 0, \cosh u)$$

então

$$\phi(u, 0) = \frac{1}{2}(\dot{\beta}(u) - \tau V(u) \times \dot{\beta}(u)) = \frac{1}{2}(\cosh u - \tau \sinh u, 0, \sinh u - \tau \cosh u).$$

Logo,

$$\psi(u, 0) = A^{-1}(\beta(u))\phi(u, 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cosh u - \tau \sinh u}{\cosh u}, 0, \frac{\sinh u - \tau \cosh u}{\cosh u}\right).$$

Como  $\psi(u, 0)$  é solução de (5.3.2) e a solução é única, temos que  $\psi(u, v) = \psi(u, 0)$ . Portanto integrando (5.3.1) temos que

$$f(u, v) = (\sinh u \exp(-v), c, \cosh u \exp(-v))$$

é a imersão mínima conforme desejada.

**Exemplo 5.3.2.** Sejam  $\beta(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh u, \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh u, \cosh u\right)$ , com  $I = (a, b)$  e  $V(u) = -\frac{1}{\sqrt{2}}E_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}E_2$ . Como

$$\dot{\beta}(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}E_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}E_2 + \frac{\sinh u}{\cosh u}E_3,$$

então

$$g(\dot{\beta}(u), \dot{\beta}(u)) = \frac{1}{\cosh^2 u} > 0.$$

Assim temos um *problema de Björling do tipo-espaço*. Além disso,

$$g(V(u), V(u)) = 1 \quad \text{e} \quad g(\dot{\beta}(u), V(u)) = 0.$$

Dado que

$$V(u) \times \dot{\beta}(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sinh u}{\cosh u} E_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sinh u}{\cosh u} E_2 + E_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh u, \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh u, \cosh u\right),$$

então

$$\phi(u, 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\cosh u - \tau \sinh u), \frac{1}{\sqrt{2}}(\cosh u - \tau \sinh u), 1 \sinh u - \tau \cosh u\right).$$

Logo,

$$\psi(u, 0) = A^{-1}(\beta(u))\phi(u, 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cosh u - \tau \sinh u}{\sqrt{2} \cosh u}, \frac{\cosh u - \tau \sinh u}{\sqrt{2} \cosh u}, \frac{\sinh u - \tau \cosh u}{\cosh u}\right).$$

Como  $\psi(u, 0)$  é solução de (5.3.2) e a solução é única, temos que  $\psi(u, v) = \psi(u, 0)$ . Portanto integrando (5.3.1) temos que

$$f(u, v) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sinh u \exp(-v), \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh u \exp(-v), \cosh u \exp(-v)\right)$$

é a imersão mínima conforme desejada.

## 5.4 O grupo produto $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Consideraremos o modelo do semi-plano superior para o plano hiperbólico dado por  $\mathbb{H}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$  e seja  $x_3$  o parâmetro natural em  $\mathbb{R}$ . O espaço  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  é um grupo de Lie Lorentziano com a estrutura de produto e munido da métrica invariante à esquerda Lorentziana dada por:

$$g = \frac{1}{x_2^2}(dx_1^2 + dx_2^2) - dx_3^2.$$

Com respeito à métrica  $g$ , uma base ortonormal de campos vetores invariantes à esquerda é dada por:

$$E_1 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad E_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \text{e} \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Assim a matriz definida em (3.2.6) é dada por

$$d(L_g)_h = \begin{bmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Além disso, as únicas constantes de estruturas da álgebra de Lie não nulas são  $C_{12}^1 = -1$  e  $C_{21}^1 = 1$ . Logo  $L_{12}^1 = -2$  e  $L_{11}^2 = 2$  e os outros  $L_{ij}^k$  são nulos. Assim o item iii) do Teorema 3.2.11 fica

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{z}} - \psi_1 \bar{\psi}_2 = 0, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \bar{z}} + \bar{\psi}_1 \psi_1 = 0. \end{cases} \quad (5.4.1)$$

Portanto a imersão mínima conforme  $f$  é dada por:

$$\begin{cases} f_1(u, v) = 2 \operatorname{Re} \left( \int f_2(u, v) \psi_1(u, v) dz \right), \\ f_2(u, v) = \exp(2 \operatorname{Re} \int \psi_2 dz), \\ f_3(u, v) = 2 \operatorname{Re} \left( \int \psi_3(u, v) dz \right). \end{cases}$$

**Exemplo 5.4.1.** [Plano horizontal do tipo espaço  $z = c$ ] Considere

$$\beta(u) = (\cos u, \sin u, c), \quad u \in (0, \pi)$$

e  $V(u) = E_3$ . Temos que

$$\dot{\beta}(u) = -E_1 + \frac{\cos u}{\sin u} E_2, \quad g(\dot{\beta}(u), \dot{\beta}(u)) = \frac{1}{\sin^2(u)} > 0.$$

Além disso,  $g(V, V) = -1$  e  $g(\dot{\beta}, V) = 0$ . Portanto o par  $(\beta, V)$  produz um Problema de Björling para superfícies do tipo tempo. Como

$$V(u) \times \dot{\beta}(u) = -E_2 - \frac{\cos u}{\sin u} E_1 = (-\cos u, -\sin u, 0),$$

então

$$\phi(u, 0) = \frac{1}{2}(\dot{\beta}(u) + iV(u) \times \dot{\beta}(u)) = \frac{1}{2}(-\sin u - i \cos u, \cos u - i \sin u, 0).$$

Portanto

$$\psi(u, 0) = A^{-1}(\beta(u))\phi(u, 0) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\sin u + i \cos u}{\sin u}, \frac{\cos u - i \sin u}{\sin u}, 0\right).$$

Uma vez que  $\psi(u, 0)$  é solução de (5.4.1), a unicidade implica que  $\psi(u, v) = \psi(u, 0)$ . Portanto a imersão mínima conforme do tipo espaço que contém  $\beta(u)$  é dada por:

$$f(u, v) = (e^v \cos u, e^v \sin u, c).$$

# Apêndice A

## Diferenciação paracomplexa

Neste apêndice vamos relembrar alguns fatos sobre a álgebra dos números paracomplexos (ou de Lorentz). Para mais detalhes veja [9], [15] e [16]. A álgebra dos números paracomplexos é a álgebra  $\mathbb{L} = \{a + \tau b : a, b \in \mathbb{R}\}$ , onde  $\tau$  é uma unidade imaginária que satisfaz  $\tau^2 = 1$ , com as seguintes operações:

$$(u_1 + \tau u_2) + (v_1 + \tau v_2) := (u_1 + v_1) + \tau(u_2 + v_2),$$

$$(u_1 + \tau u_2) \cdot (v_1 + \tau v_2) := (u_1 v_1 + u_2 v_2) + \tau(u_1 v_2 + u_2 v_1).$$

Temos duas representações interessantes para esta álgebra:

- $\mathbb{L}$  é isomorfa a  $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  (com a multiplicação de coordenadas) via a aplicação

$$\rho : \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \quad \rho(a + \tau b) = (a + b, a - b).$$

- $\mathbb{L}$  é isomorfa a álgebra

$$A = \left\{ M \in M(2, \mathbb{R}) : M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \right\}$$

via a aplicação

$$\rho(a + \tau b) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

A conjugação em  $\mathbb{L}$  é definida como no caso complexo, isto é,

$$\overline{a + \tau b} := a - \tau b$$

e a  $\mathbb{L}$ -norma de  $z = a + \tau b \in \mathbb{L}$  é definida como

$$|z| = |z\bar{z}|^{\frac{1}{2}} = |a^2 - b^2|^{\frac{1}{2}}.$$

Podemos também definir a norma Euclideana  $\|z\|^2 = a^2 + b^2$  e a topologia relativa.

Na álgebra  $\mathbb{L}$  temos o conjunto dos divisores de zero  $\mathbb{K} = \{z \in \mathbb{L} : |z| = 0\}$ . Observe que se  $z \notin \mathbb{K}$ , então  $z$  é inversível e o inverso é dado por  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$ .

**Definição A.0.2.** Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{L}$  um conjunto aberto e  $z_0 \in \Omega$ . A  $\mathbb{L}$ -derivada de uma função  $f : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$  em  $z_0$  é definida por

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0, z \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{K}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad (\text{A.0.1})$$

se o limite existe. Se  $f'(z_0)$  existe, dizemos que  $f$  é  $\mathbb{L}$ -diferenciável em  $z_0$ .

**Observação A.0.3.** Observemos que (A.0.1) é equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \notin \mathbb{K}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

A condição de  $\mathbb{L}$ -diferenciabilidade é muito menos restritiva que a diferenciabilidade complexa usual. Por exemplo, a  $\mathbb{L}$ -diferenciabilidade em  $z_0$  não implica na continuidade de  $f$  em  $z_0$ .

**Proposição A.0.4.** A  $\mathbb{L}$ -diferenciabilidade em um conjunto aberto  $\Omega \subseteq \mathbb{L}$  implica na diferenciabilidade usual em  $\Omega$  e  $df(z_0)(z) = f'(z_0)z$ ,  $\forall z \in \Omega$ .

*Demonstração.* Da Observação A.0.3 temos que (A.0.1) é equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - hf'(z_0)}{h} = 0. \quad (\text{A.0.2})$$

Colocando-se  $o(h) = f(z_0 + h) - f(z_0) - hf'(z_0)$ , vemos que (A.0.2) é equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{|h|} \cdot \frac{o(h)}{h} = 0,$$

onde  $h \notin \mathbb{K}$ . Escrevendo  $f = a + \tau b$ ,  $o = o_1 + \tau o_2$ ,  $h = h_1 + \tau h_2$ ,  $z_0 = u_0 + \tau v_0$  e  $f'(z_0) = c + \tau d$  temos que:

$$\begin{cases} f(z_0) + hf'(z_0) + o(h) = a(u_0, v_0) + (h_1c + h_2d) + o_1(h) + \tau[b(u_0, v_0) + (h_1d + h_2c) + o_2(h)], \\ f(z_0 + h) = a(u_0 + h_1, v_0 + h_2) + \tau b(u_0 + h_1, u_0 + h_2). \end{cases}$$

Como  $f(z_0 + h) = f(z_0) + hf'(z_0) + o(h)$ , resulta que:

$$\begin{cases} a(u_0 + h_1, v_0 + h_2) = a(u_0, v_0) + (h_1c + h_2d) + o_1(h), \\ b(u_0 + h_1, u_0 + h_2) = b(u_0, v_0) + (h_1d + h_2c) + o_2(h), \end{cases}$$

## A. Diferenciação paracomplexa

---

onde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o_1(h)}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o_2(h)}{|h|} = 0.$$

Portanto,  $a(u, v)$  e  $b(u, v)$  são diferenciáveis em  $z_0$ . Além disto,

$$df(z_0)(h_1 + \tau h_2) = (h_1 c + h_2 d) + \tau(h_1 d + h_2 c) = (c + \tau d)(h_1 + \tau h_2) = f'(z_0)(h_1 + \tau h_2).$$

Portanto,  $df(z_0)$  é a transformação linear de  $\mathbb{L}$  dada por  $z \mapsto f'(z_0)z$ .  $\square$

Observe, também, que existem funções  $\mathbb{L}$ -diferenciáveis de qualquer classe de diferenciabilidade (real).

Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{L}$  uma função diferenciável, no sentido usual. Então, pela Proposição A.0.4  $f$  é  $\mathbb{L}$ -diferenciável em  $z_0 \in \Omega$  se, e somente se a matriz de  $df(z_0)$  é da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad (\text{A.0.3})$$

onde  $f'(z_0) = a + \tau b$ . Portanto, se  $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ , temos que  $f$  é  $\mathbb{L}$ -diferenciável se, e somente se, valem

$$u_x = v_y, \quad u_y = v_x.$$

Essas equações são as análogas das equações de Cauchy-Riemann do caso complexo. Derivando estas equações temos a condição de integrabilidade

$$u_{xx} - u_{yy} = 0.$$

Analogamente ao caso complexo, temos uma interpretação geométrica da  $\mathbb{L}$ -diferenciabilidade. Consideramos  $\mathbb{L}$  com a métrica Lorentziana se  $df(z_0) \neq 0$  então  $df(z_0)$  é uma aplicação conforme, em relação à métrica Lorentziana, com coeficiente de conformidade positivo se  $df(z_0)$  preserva a orientação, e negativo caso contrário.

Análogo ao caso complexo, podemos definir os operadores paracomplexos

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + \tau \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - \tau \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

onde  $z = u + \tau v$ . Esses são os campos de vetores duais das 1-formas em  $\mathbb{L}$

$$dz := du + \tau dv, \quad d\bar{z} := du - \tau dv.$$

**Teorema A.0.5.** Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{L}$  tal que  $f(u + \tau v) = a(u, v) + \tau b(u, v)$ , onde  $a, b$  são de classe  $C^1$ . Então  $f$  é  $\mathbb{L}$ -diferenciável se, e somente se  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ .

*Demonstração.* Como  $f$  é  $\mathbb{L}$ -diferenciável se, e somente, se  $df(x)$  é uma matriz da forma (A.0.3) então  $f$  é  $\mathbb{L}$ -diferenciável se, e somente, se

$$\begin{cases} \frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v}, \\ \frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial b}{\partial u}. \end{cases} \quad (\text{A.0.4})$$

Desde que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} - \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial a}{\partial u} + \tau \frac{\partial b}{\partial u} \right) - \tau \left( \frac{\partial a}{\partial v} + \tau \frac{\partial b}{\partial v} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial b}{\partial v} \right) + \tau \left( \frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial v} \right) \right], \end{aligned}$$

resulta que  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  se, e somente, se valem as equações (A.0.4). Logo temos o desejado.  $\square$

**Observação A.0.6.** Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{L}$  tal que  $f(u + \tau b) = a(u, v) + \tau b(u, v)$ , onde  $a, b$  são de classe  $C^1$ . Se  $f$  é  $\mathbb{L}$ -diferenciável, usando (A.0.4) temos que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \tau \frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial v} \right) + \tau \left( \frac{\partial b}{\partial u} + \frac{\partial a}{\partial v} \right) \right] = \frac{\partial a}{\partial u} + \tau \frac{\partial b}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v} + \tau \frac{\partial a}{\partial v}. \quad (\text{A.0.5})$$

**Proposição A.0.7.** Seja  $\gamma$  uma curva em  $\mathbb{L}$ . Se  $f$  é uma função  $\mathbb{L}$ -diferenciável com  $\frac{\partial f}{\partial z}$  contínua, então

$$\int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z} dz = f(z)|_{\gamma}.$$

Além disso, a integral não depende do caminho escolhido.

*Demonstração.* Como  $f$  é  $\mathbb{L}$ -diferenciável, de (A.0.5) temos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z} dz &= \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z} (du + \tau dv) = \int_{\gamma} (a_u + \tau b_u) du + \tau (b_v + \tau a_v) dv \\ &= \int_{\gamma} (a_u du + a_v dv) + \tau (b_u du + b_v dv) = \int_{\gamma} d(a + \tau b) = (a + \tau b)|_{\gamma} = f(z)|_{\gamma}. \end{aligned}$$

$\square$

**Proposição A.0.8.** Se  $f = a + \tau b$  é  $\mathbb{L}$ -diferenciável, então existe uma função  $\mathbb{L}$ -diferenciável  $g : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$  tal que  $\frac{\partial g}{\partial z} = f$ .

## A. Diferenciação paracomplexa

---

*Demonstração.* Como  $f$  é  $\mathbb{L}$ -diferenciável, então  $f$  satisfaz (A.0.4). Logo, as formas diferenciáveis

$$b \, du + a \, dv \quad \text{e} \quad a \, du + b \, dv$$

são exatas. Portanto, existem funções diferenciáveis  $\alpha, \beta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\partial \beta}{\partial v} = a, \\ \frac{\partial \beta}{\partial u} = \frac{\partial \alpha}{\partial v} = b. \end{cases}$$

Defina  $g : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$  por  $g = \alpha + \tau\beta$ . Temos que  $g$  é  $\mathbb{L}$ -diferenciável pois

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial u} = a = \frac{\partial \beta}{\partial v}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial v} = b = \frac{\partial \beta}{\partial u}. \end{cases}$$

Portanto,

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial \alpha}{\partial u} + \tau \frac{\partial \beta}{\partial u} = \frac{\partial \beta}{\partial v} + \tau \frac{\partial \alpha}{\partial v} = a + \tau b = f. \quad (\text{A.0.6})$$

□

Das Proposições A.0.7 e A.0.8, resulta que toda integral de linha de uma função  $\mathbb{L}$ -diferenciável é independente do caminho.

### A.0.1 Raízes quadrada de números paracomplexos

Queremos definir a função raiz quadrada diferenciável de um número paracomplexo. Seja  $w \in \mathbb{L}$  tal que  $w = \sqrt{z}$ . Logo,  $z = w^2$ . Se  $w = a + \tau b$  então

$$z = (a^2 + b^2) + 2ab\tau.$$

Além disso, para a função da raiz seja diferenciável temos  $z \neq 0$ . Assim

$$z\bar{z} = (a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 - b^2)^2 > 0.$$

Logo,  $z$  pertence ao cone espacial  $I$ .

Portanto, a raiz quadrada de  $z$  está definida somente se  $z$  pertence ao cone espacial  $I$ .

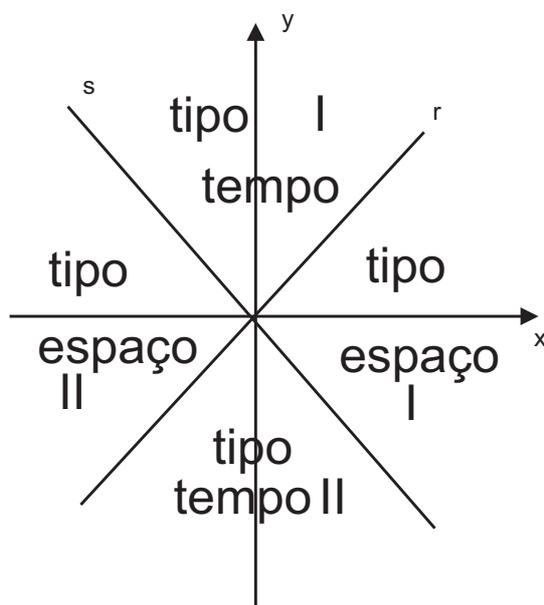
Agora iremos encontrar que são as raízes de  $z$ .

Como  $z$  pertence ao cone espacial  $I$ , podemos escrever  $z$  da forma

$$z = \rho(\cosh u + \tau \sinh u),$$

onde  $z = a + \tau$  e  $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Agora observe que se  $w$  é raiz quadrada de  $z$  pode estar em algum dos quatro cones:



1) Se  $w$  está no cone espacial  $I$ . Então  $w$  pode ser escrito como

$$w = \rho_1(\cosh u_1 + \tau \sinh u_2).$$

Agora  $w^2 = z$ . Logo,

$$(\rho_1)^2(\cosh 2u_1 + \tau \sinh 2u_2) = z = \rho(\cosh u + \tau \sinh u).$$

Então,

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{\rho}, \\ \cosh 2u_1 &= \cosh u, \\ \sinh 2u_1 &= \sinh u. \end{aligned} \tag{A.0.7}$$

Assim  $u_1 = \frac{u}{2}$ . Portanto, a raiz é

$$w = \sqrt{\rho}(\cosh \frac{u}{2} + \tau \sinh \frac{u}{2}).$$

2) Agora se  $w$  está no cone espacial  $II$  temos que  $w = a + \tau b$  tal que  $a < 0$  e  $a^2 - b^2 > 0$ . Logo  $-w$  pertence ao cone espacial  $I$  e  $(-w)^2 = z$ . Assim  $-w$  é uma raiz no cone espacial  $I$ , então pelo item 1) temos que

$$-w = \sqrt{\rho}(\cosh \frac{u}{2} + \tau \sinh \frac{u}{2}).$$

Portanto,

$$w = -\sqrt{\rho}(\cosh \frac{u}{2} + \tau \sinh \frac{u}{2}).$$

## A. Diferenciação paracomplexa

---

- 3) Agora se  $w$  está no cone temporal  $I$  temos que  $w = a + \tau b$  tal que  $b > 0$  e  $a^2 - b^2 < 0$ . Logo  $\tau w = b + \tau a$  pertence ao cone espacial  $I$  e  $(\tau w)^2 = z$ . Assim  $\tau w$  é uma raiz no cone espacial  $I$ , então pelo item 1) temos que

$$\tau w = \sqrt{\rho}(\cosh \frac{u}{2} + \tau \sinh \frac{u}{2}).$$

Portanto,

$$w = \sqrt{\rho}(\sinh \frac{u}{2} + \tau \cosh \frac{u}{2}).$$

- 4) Agora se  $w$  está no cone temporal  $II$  temos que  $w = a + \tau b$  tal que  $b < 0$  e  $a^2 - b^2 < 0$ . Logo  $-\tau w = b + \tau a$  pertence ao cone espacial  $I$  e  $(-\tau w)^2 = z$ . Assim  $-\tau w$  é uma raiz no cone espacial  $I$ , então pelo item 1) temos que

$$-\tau w = \sqrt{\rho}(\cosh \frac{u}{2} + \tau \sinh \frac{u}{2}).$$

Portanto,

$$w = -\sqrt{\rho}(\sinh \frac{u}{2} + \tau \cosh \frac{u}{2}).$$

Portanto, temos quatro raízes distintas, uma para cada cone.

**Observação A.0.9.** Como  $\mathbb{L}$  não é um corpo, podemos possuir mais de duas raízes.



# Apêndice B

## O Teorema de Cauchy-Kovalevskaya

O Teorema de Cauchy-Kovalevskaya aplica-se a sistemas de equações diferenciais parciais analíticas, com dados analíticos (reais ou complexos) que, por mudança de variáveis adequadas podem, ser reescritos de forma a ser aplicado o seguinte teorema (veja [6], [12] e [22], por exemplo).

**Teorema B.0.10 (Cauchy-Kovalevskaya).** Seja  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  e considere o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^{n-1} B_j(u, x') \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(u, x'), & \text{para } |x| < r, \\ u = 0, & \text{para } |x'| < r \text{ e } x_n = 0, \end{cases} \quad (\text{B.0.1})$$

onde  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ ,  $B_j : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow M^{m \times n}(\mathbb{R})$ ,  $j = 1, \dots, n-1$  e  $c : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$  são analíticas. Então, existe  $r > 0$  e uma única função analítica  $u(x) = (u_1(x), \dots, u_m(x))$  da forma

$$u(x) = \sum_{\alpha} u_{\alpha} x^{\alpha}, \quad (\text{B.0.2})$$

onde  $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  e  $u_{\alpha} = \frac{D^{\alpha} u(0)}{\alpha!}$  tal que  $u$  é solução de (B.0.1).

Vamos escrever para um sistema de primeira ordem as condições que permitem reduzir o sistema à forma (B.0.1). Considere o seguinte problema: achar  $u$  (localmente) tal que

$$\begin{cases} F(x, (\partial^{\alpha} u)|_{|\alpha| \leq 1}) = 0, \\ u|_S = \Phi, \end{cases} \quad (\text{B.0.3})$$

onde  $F = (F_1, \dots, F_m)$  é analítica,  $S$  é uma hipersuperfície analítica em  $\mathbb{R}^n$  e  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$  é analítica definida em  $S$ . Suponhamos que  $(S, \Phi)$  é **não característica**, isto é,

$$\begin{cases} F(x, (\partial^{\alpha} \Phi(x))|_{|\alpha| \leq 1}) = 0, & x \in S, \\ \det [\nabla_{z_{1n}, \dots, z_{mn}} F(x, (\partial^{\alpha} \Phi(x))|_{|\alpha| \leq 1})] \neq 0, & x \in S, \end{cases} \quad (\text{B.0.4})$$

---

## B. O Teorema de Cauchy-Kovalevskaya

onde  $\nabla_{z_{1n}, \dots, z_{mn}} F$  denota a matriz Jacobiana de  $F$  com respeito às variáveis  $z_{jn}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , correspondentes a  $\frac{\partial u_j}{\partial x_n}$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Quando escrevemos  $F$  como

$$F(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_m}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial u_m}{\partial x_n}) = 0, \quad (\text{B.0.5})$$

temos que (B.0.4) são exatamente as condições para podermos aplicar o Teorema da função Implícita (na versão analítica) e, então, localmente (B.0.3) é equivalente a:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_n} = G(x, (\frac{\partial u}{\partial x_j})_{j=1}^{n-1}), \\ u|_{\bar{S}} = \Phi(\bar{x}), \bar{x} \in \bar{S} \subset S, \end{cases} \quad (\text{B.0.6})$$

onde  $G = (G_1, \dots, G_m)$  é analítica.

**Observação B.0.11.** Temos que

1. As condições para que  $(S, \Phi)$  seja não característica estão escritas de forma a explicitar  $\frac{\partial u_j}{\partial x_n}$ . Condições análogas permitiriam explicitar outras derivadas.
2. É possível generalizar a condição (B.0.4) pela condição de que  $\nabla_z F$  tem posto  $m$ , onde  $z = (z_{11}, \dots, z_{m1}, z_{1n}, \dots, z_{mn})$  e  $z_{jk}$  corresponde a  $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}$  em (B.0.5).

A partir de (B.0.6) usando mudança de variáveis e a introdução de variáveis dependentes auxiliares, de forma trabalhosa é possível reduzir ao caso de (B.0.1).

# Referências Bibliográficas

- [1] L.J. Alías, R.M.B. Chaves and P. Mira. Björling problem for maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space. *Math. Proc. Cam. Phil. Soc.*, 134(2): 289–316, 2003.
- [2] H. Anciaux. *Minimal submanifolds in pseudo-Riemannian geometry*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2011.
- [3] A. Asperti and J.M. Vilhena. Björling problem for spacelike, zero mean curvature surfaces in  $\mathbb{L}^4$ . *J. Geom. Phys.*, 56(2): 196–213, 2006.
- [4] J. L. M. Barbosa and A. G. Colares. *Minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$* . Lecture Notes in Mathematics, 1195, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [5] J. Berndt, F. Tricerri and L. Vanhecke. *Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces*. Lecture Notes in Mathematics, 1598, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [6] R. J. Biezuner. *Notas de aula: Equações Diferenciais Parciais I e II*. Instituto de Ciências Exatas, UFMG, 2010.
- [7] E. G. Björling. In integrazionem aequationis derivatarum partialum superfici cujus in puncto uniuoque principales ambos radii curvedinis aequales sunt sngoque contrario. *Arch. Math. Phys.*, 4(1): 290–315, 1844.
- [8] M. S. Caja and M. A. Javaloyes. An introduction to Lorentzian geometry and its applications. Technical report, Julho 2010.
- [9] R. M. B. Chaves, M. P. Dussan and M. Magid. Björling problem for timelike surfaces in the Lorentz-Minkowski space. *J. Math. Anal. Appl.*, 377(2): 481–494, 2011.
- [10] A. A. Cintra, F. Mercuri and Irene I. Onnis. The Björling problem for minimal surfaces in a Lorentzian three-dimensional Lie group. *arXiv:1404.0416*, submetido à publicação, 2014.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [11] M. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro, IMPA, 2008.
- [12] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [13] O. Kobayashi. Maximal surfaces in 3-dimensional Lorentz space  $\mathbb{L}^3$ . *Tokyo J. Math.*, (6): 297–309, 1983.
- [14] M. Kokubu. Weierstrass representation for minimal surfaces in hyperbolic space. *Tôhoku Math. J.*, 49: 367–377, 1997.
- [15] J. Konderak. A Weierstrass representation theorem for Lorentz surfaces. *Complex Var. Theory Appl.*, 50(5): 319–332, 2005.
- [16] J. H. Lira, M. Melo and F. Mercuri. A Weierstrass representation for minimal surfaces in 3-dimensional manifolds. *Results. Math.*, 60: 311–32, 2011.
- [17] F. Mercuri and I.I. Onnis. On the Björling problem in a 3-dimensional Lie group. *Illinois J. Math*, 53(2): 431–440, 2009.
- [18] F. Mercuri, S. Montaldo and P. Piu. Weierstrass representation formula for minimal surfaces in  $\mathbb{H}_3$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ . *Acta Math. Sinica (English series)*, 22(6): 1603–1612, 2006.
- [19] T. Milnor. A conformal analog of Bernstein’s theorem for timelike surfaces in Minkowski 3-spaces. *Contemp. Math.*, 64: 123–130, 1987.
- [20] T. K. Milnor. Harmonic maps and classical surface theory in Minkowski 3-space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 280(1): 161–185, 1983.
- [21] B. O’Neill. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. Academic Press, 1983.
- [22] I.G. Petrovsky. *Lectures on Partial Differential Equations*. Interscience Publishers, New York, 1954.
- [23] H. A. Schwarz. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Springer-Verlag, Berlin, 1890.
- [24] W. P. Thurston. The geometry and topology of 3-manifold. *Mimeographed notes, Princeton University, Princeton*, 1978.
- [25] W. P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology*, volume 1. Princeton University press, 1997.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [26] J. W. Vick. *Homology theory: An introduction to algebraic topology*, volume 145. Springer, 1994.
- [27] T. Weinstein. *An Introduction to Lorentz Surfaces*. Walter de Gruiter, Berlin, New York, 1996.



# Índice Remissivo

- ℒ-derivada, 110
- Álgebra
  - Generalizada de Heisenberg, 64, 75
  - Generalizada de Heisenberg Lorentziana, 85
- Álgebra dos números paracomplexos, 109
- Índice
  - do produto escalar, 5
- Ìndice
  - da métrica, 8
- Aplicação Harmônica, 50
- Base ortonormal, 4
- Campo
  - de Tensão, 50
  - Normal, 28
  - Varacional, 20
- Catenóide Hiperbólico Lorentziano, 44
- Cone Temporal, 5
- Coordenadas Nulas, 14
- Curva
  - do tipo espaço, 9
  - do tipo luz, 9
  - do tipo tempo, 9
- Curvatura
  - Assinatura da, 10
  - de Ricci, 10
  - Escalar, 10
  - Guassiana, 28
- Média, 28
- Seccional, 10
- Tensor, 9
- Domínio
  - h-estável, 31
  - h-instável, 31
- Equação das superfícies mínimas do tipo tempo
  - do tipo 1, 35
  - do tipo 2, 39
- Equações de Codazzi-Mainardi, 51
- Espaço
  - de Damek-Ricci, 66
  - de Damek-Ricci Lorentziano - Caso 1, 76
  - de Damek-Ricci Lorentziano - Caso 2, 86
  - de De Sitter  $\mathbb{S}_1^3$ , 60, 104
  - de Lorentz-Minkowski, 6
  - Lorentziano, 5
- Forma fundamental
  - norma ao quadrado da segunda, 18
  - Primeira, 28
  - Segunda, 18, 28
- Função
  - Energia, 51
- Grupo
  - $\mathbb{S}_4$ , 67
  - $\mathbb{S}_4^1$ , 77

- $\mathbb{S}_4^3$ , 86  
 de Heisenberg  $\mathbb{H}_3$ , 58, 100  
 Generalizado de Heisenberg, 64, 75  
 Generalizado de Heisenberg Lorentziano, 85  
 produto  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , 57  
 produto  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , 106
- Helicóide, 37  
   Lorentziano, 33
- Identidade de Bianchi  
   Primeira, 9  
   Segunda, 9
- Imersão  
   Conforme, 51  
   do tipo-espaço, 27  
   do tipo-tempo, 27  
   Isométrica, 51  
   Mínima, 51
- Isometria, 4
- Isomorfismos musicais, 3
- Métrica  
   de energia 1, 51  
   equiareal, 51  
   Euclideana, 5  
   Lorentziana, 5  
   semi-Riemanniana, 7
- Operador de Laplace-Beltrami, 19, 28  
   no fibrado normal, 25
- Orientação Temporal, 5, 11
- Problema de Björling, 99  
   do tipo-espaço, 98  
   do tipo-tempo, 96
- Produto  
   escalar, 3  
   Vetorial de Minkowski, 6
- Representação de Weierstrass, 47  
   para imersões do tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$ , 48  
   para imersões do tipo tempo em  $\mathbb{L}^3$ , 49  
   para o espaço de Damek-Ricci, 70  
   para o espaço de Damek-Ricci Lorentziano-  
     caso 1, 80  
   para o espaço de Damek-Ricci Lorentziano-  
     caso 2, 89  
   superfícies mínimas em Grupos de Lie Lo-  
     rentziano, 56  
   superfícies mínimas em variedades Lorentzi-  
     anas, 55
- Subvariedade Mínima, 19
- Superfície  
   do tipo Scherk, 35  
   do tipo Scherk 2, 40  
   Lorentz, 16  
   Riemann, 14
- Teorema  
   de Cauchy-Kovalevskaya, 117  
   h-estabilidade, 32
- Variação da área  
   Primeira, 21  
   Segunda, 26
- Variação diferenciável, 20
- Variedade  
   Lorentziana, 8  
   Riemanniana, 8  
   semi-Riemanniana, 8  
   t-orientável, 11

## ÍNDICE REMISSIVO

---

### Vetor

Curvatura média, 19

Curvatura Média-h, 50

do tipo espaço, 4

do tipo luz, 4

do tipo tempo, 4

Vetores ortogonais, 4