Funzioni continue di una variabile reale che per nessun valore di quest'ultima ammettono derivata

(Letto alla Reale Accademia delle Scienze il 18 luglio 1872)

Fino ai tempi più recenti si è generalmente ritenuto che una funzione univoca e continua di una variabile reale avesse anche una derivata il cui valore poteva essere indefinito o infinitamente grande soltanto in singoli punti. Anche negli scritti di *Gauss, Cauchy, Dirichlet* non si trova per quanto ne so alcun commento dal quale si possa evincere in modo inequivocabile che questi matematici, che nella loro scienza erano abituati ad esercitare sempre il massimo rigore, fossero di diverso avviso. Stando a quanto ho appreso da alcuni suoi allievi, fu Riemann il primo ad affermare con precisione che la suddetta tesi non è condivisibile, e per esempio non è verificata dalla funzione rappresentata tramite la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2\, x)}{n^2}.$$

Purtroppo la dimostrazione non è stata pubblicata da Riemann, né sembra reperibile nelle sue carte o tramite comunicazioni orali. Ciò è particolarmente spiacevole in quanto non ho mai potuto scoprire con sicurezza come Riemann si sia spiegato davanti ai suoi allievi. I matematici che, dopo che l'affermazione di Riemann si era diffusa in altri ambienti, si sono occupati del problema, sembrano (almeno per la maggior parte) essere stati dell'avviso che bastasse dimostrare l'esistenza di funzioni che in ogni intorno arbitrariamente piccolo del loro argomento non fossero derivabili in qualche punto. La dimostrazione che la suddetta serie trigonometrica sia di questo tipo mi sembra tuttavia piuttosto difficile; ma si possono facilmente costruire funzioni di una variabile reale per le quali si può dimostrare con metodi semplicissimi che non ammettono derivata per nessun valore della x.

Ciò si può fare ad esempio come segue.

Sia x una variabile reale, a un *intero dispari*, b una costante *positiva, minore* di 1, e

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n\, x\, \pi);$$

allora $f(x)$ è una funzione continua della quale si può dimostrare che, se il valore del prodotto ab supera una determinata soglia, *non è derivabile in nessun punto.*

Sia x_0 un valore fissato di x, ed m un intero positivo arbitrario; allora esiste un opportuno intero positivo α_m per il quale la differenza

$$a^m\, x_0 - \alpha_m,$$

che sarà indicata con x_m, è $> -\frac{1}{2}$ ma $\leq \frac{1}{2}$.

Posto allora

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a^m}, \quad x'' = \frac{\alpha_m + 1}{a^m},$$

si ha

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{a^m}, \quad x'' - x_0 = \frac{1 - x_{m+1}}{a^m};$$

risulta quindi

$$x' < x_0 < x''.$$

Si può inoltre prendere m così grande che x', x'' si avvicinano entrambi a x_0 tanto quanto si vuole.

Ora risulta

$$\begin{aligned}\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(b^n\, \frac{\cos(a^n\, x'\, \pi) - \cos(a^n\, x_0\, \pi)}{x' - x_0}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \left((ab)^n\, \frac{\cos(a^n\, x'\, \pi) - \cos(a^n\, x_0\, \pi)}{a^n\, (x' - x_0)}\right) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \left(b^{m+n}\, \frac{\cos(a^{m+n}\, x'\, \pi) - \cos(a^{m+n}\, x_0\, \pi)}{x' - x_0}\right)\end{aligned}$$

Il primo termine di questa espressione, siccome

$$\frac{\cos(a^n\, x'\, \pi) - \cos(a^n\, x_0\, \pi)}{a^n\, (x' - x_0)} = -\pi \operatorname{sen}\left(a^n\, \tfrac{x'+x_0}{2}\, \pi\right) \frac{\sin\left(a^n\, \tfrac{x'+x_0}{2}\, \pi\right)}{a^n\, \tfrac{x'+x_0}{2}\, \pi}$$

e il valore di

$$\frac{\sin\left(a^n\, \tfrac{x'+x_0}{2}\, \pi\right)}{a^n\, \tfrac{x'+x_0}{2}\, \pi}$$

sta ovviamente fra -1 e 1, è in valore assoluto più piccolo di

$$\pi \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n$$

e quindi di

$$\frac{\pi}{ab - 1}\, (ab)^m.$$

Si ha inoltre, essendo a un intero dispari:

$$\cos(a^{m+n}\,x'\,\pi) = \cos(a^n\,(\alpha_m - 1)\,\pi) = -(-1)^{\alpha_m},$$
$$\cos(a^{m+n}\,x_0\,\pi) = \cos(a^n\,\alpha_m\,\pi + a^n\,x_{m+1}\,\pi) = (-1)^{\alpha_m}\,\cos(a^n\,x_{m+1}\,\pi),$$

e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(b^{m+n}\,\frac{\cos(a^{m+n}\,x'\,\pi) - \cos(a^{m+n}\,x_0\,\pi)}{x' - x_0}\Big)$$
$$= (-1)^{\alpha_m}\,(ab)^m \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+\cos(a^n\,x_{m+1}\,\pi)}{1+x_{m+1}}\,b^n.$$

Tutti i termini della somma

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+\cos(a^n\,x_{m+1}\,\pi)}{1+x_{m+1}}\,b^n$$

sono positivi[1], ed il primo, siccome $\cos(x_{m+1}\,\pi)$ è non negativo, ma $1+x_{m+1}$ sta fra $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$, non è più piccolo di $\frac{2}{3}$.

Di conseguenza si ha

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = (-1)^{\alpha_m}\,(ab)^m\,\eta\left(\frac{2}{3} + \varepsilon\,\frac{\pi}{ab-1}\right),$$

dove η denota[2] una quantità positiva > 1, mentre ε è compreso fra -1 e 1.

Similmente risulta

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = -(-1)^{\alpha_m}\,(ab)^m\,\eta_1\left(\frac{2}{3} + \varepsilon_1\,\frac{\pi}{ab-1}\right),$$

dove η_1, come η, è positiva e > 1, mentre ε_1 è compreso fra -1 e 1.

Presi ora a, b tali che $ab > 1 + \frac{3}{2}\,\pi$, e quindi

$$\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab-1},$$

le quantità

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}, \qquad \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0}$$

che sono ovviamente *discordi*, diventano tuttavia infinitamente grandi quando m tende all'infinito.

Da qui segue immediatamente che il limite del rapporto incrementale di $f(x)$ nel punto $x = x_0$ non ammette limite, né finito né infinito.

[1] N.d.T.: mi sembra che nel punto $x_0 = \frac{1}{2}$, prendendo $a = 7$ e $n = m = 1$, si abbia $x_{m+1} = \frac{1}{2}$ e $\cos(a^n\,x_{m+1}\,\pi) = -1$, dunque si può dire che i termini della serie sono *non negativi*.

[2] N.d.T.: sia η che η_1, introdotta poco dopo, dipendono da m e si sarebbero potute meglio denotare con η'_m e η''_m. Si riconosce subito che sono ≥ 1 per ogni m, e ciò è sufficiente per la conclusione.

Titolo orig. *Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzeren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen.* In: Mathematische Werke von Karl Weierstrass, vol. 2, pagg. 71–77. Mayer & Müller, 1895 (cfr. Internet Archive). Trad. it. A. Greco, Università di Cagliari, 22-5-2019.