COMPORTAMENTO ELASTOPLASTICO DI TRAVI

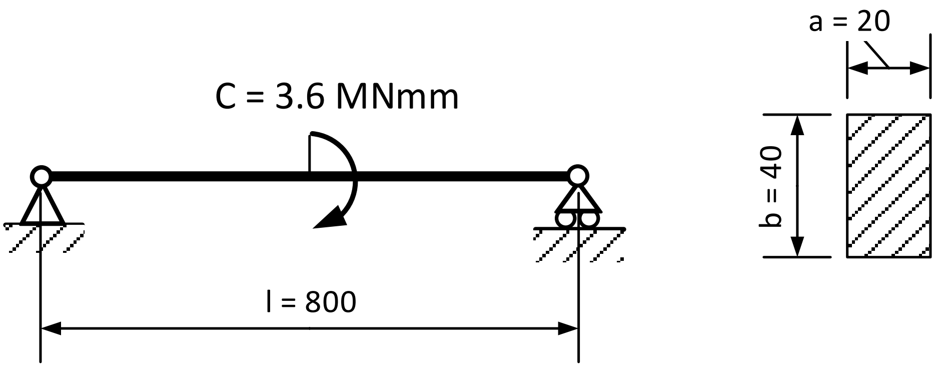
ESERCIZIO 1

La trave di sezione rettangolare di figura è caricata in mezzeria da una coppia flettente C e successivamente scaricata completamente.

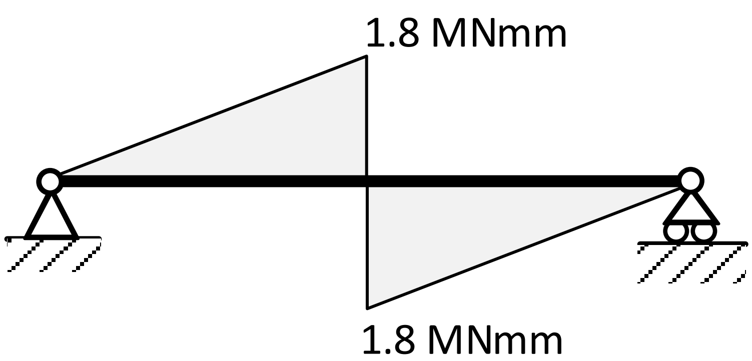
Calcolare:

1) La distribuzione ed i valori degli sforzi residui nella sezione di mezzeria;
2) la rotazione residua α_{res} della linea d'asse in mezzeria

Materiale: Alluminio; σ_{sn} = 240 MPa; E = 70 GPa



Il diagramma dei momenti (riportato dalla parte delle fibre tese) della struttura caricata dalla coppia C è il seguente



Per la sezione rettangolare in esame i momenti di prima plasticizzazione *M*' e di plasticizzazione totale *M*'' valgono rispettivamente

$$M' = \sigma_{sn} W_f = \sigma_{sn} \frac{ab^2}{6} = 1.28 \cdot 10^6 \, Nmm$$
$$M'' = \sigma_{sn} \frac{ab^2}{4} = 1.92 \cdot 10^6 \, Nmm$$

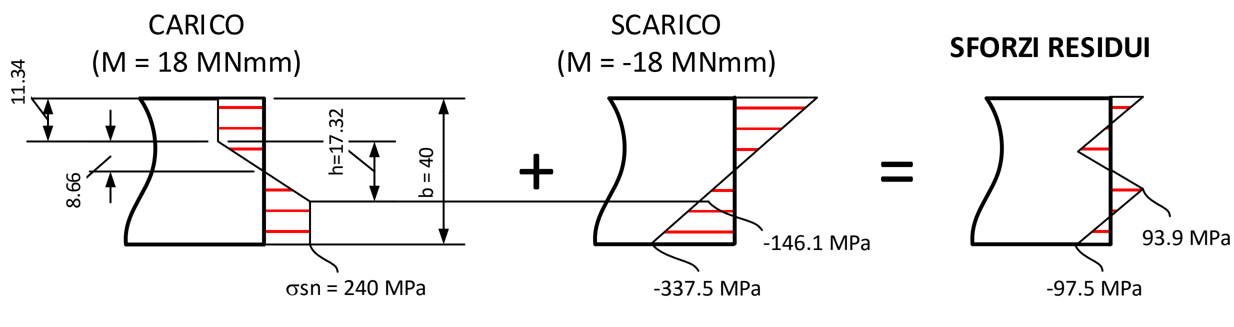
Il momento agente nella sezione di mezzeria (M= 1.8 10^6 Nmm) è dunque più elevato di quello di prima plasticizzazione (e più piccolo di quello di plasticizzazione totale).

Gli sforzi residui nella sezione di mezzeria con momento positivo (lato destro) sono dati dalla differenza tra gli sforzi prodotti dal momento M= 1.8 10^6 Nmm (in presenza del carico applicato) e quelli generati da un momento di valore opposto (fase di scarico; M = -1.8 MNmm) e calcolati nell'ipotesi di comporamento del materiale perfettamente elastico.

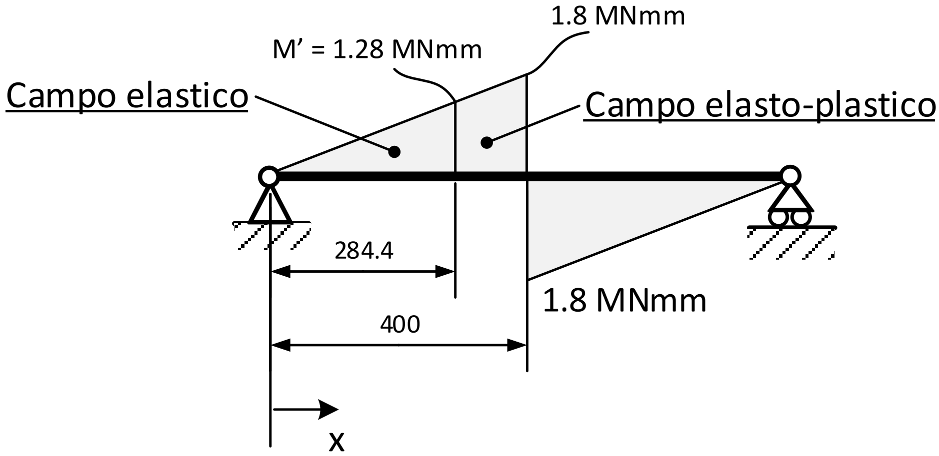
La dimensione della zona elastica centrale (h) per il momento applicato M= 1.8 10^6 Nmm vale

$$h = b\sqrt{3\left(1 - \frac{M}{M''}\right)} = b\sqrt{3(1 - \frac{1.8 \cdot 10^6}{1.92 \cdot 10^6})} = 17.32 \text{ mm}$$

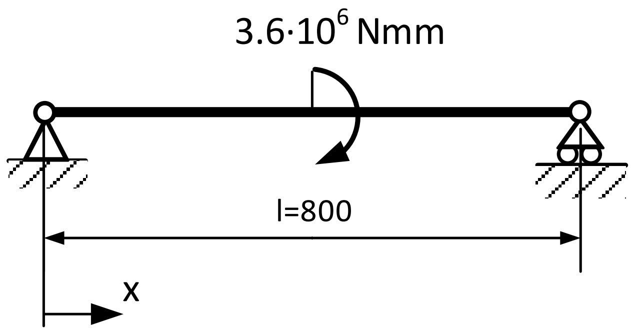
La distribuzione degli sforzi residui si ottiene pertanto dallo schema seguente



Per calcolare la rotazione angolare residua utilizziamo il PLV. E' necessario preliminarmente individuare i tratti della trave in campo elastico ed in campo elasto-plastico. E' sufficiente analizzare metà struttura, in quanto le azioni interne dell'altra metà saranno uguali ma di segno contrario (carico antisimmetrico).



SISTEMA DI SPOSTAMENTI



(E' sufficiente scrivere le equazioni per la metà struttura di sinistra)

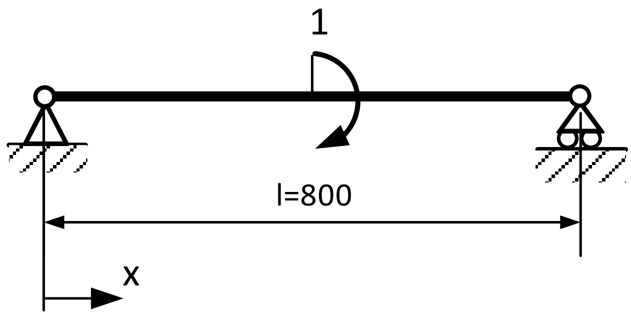
$0 < x < 284.4 \quad (\text{campo elastico})$

$$\mathrm{M} = -4500\,\mathrm{x} \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}\varphi = \frac{M}{EJ}dx = \frac{-4500x}{70000\cdot\dfrac{20\cdot 40^3}{12}}dx$$

$284.4 < x < 400 \quad (\text{campo elasto - plastico})$

$$\mathrm{M} = -4500\,\mathrm{x} \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}\varphi_{ep} = -\frac{2\varepsilon_{sn}}{b\sqrt{3\left(1-\dfrac{M}{M''}\right)}}dx = -\frac{2\dfrac{240}{70000}}{40\sqrt{3\left(1-\dfrac{4500x}{1.92\cdot 10^6}\right)}}dx$$

SISTEMA DI FORZE



$0 < x < 400$

$M' = -0.00125 \cdot x$

Equazione del PLV – Calcolo della rotazione α alla fine della fase di carico

$L_{est} = 1 \cdot \alpha$

$$L_{\text{int}} = 2\left[\int_0^{284.4} -0.00125x \frac{-4500x}{70000 \cdot \frac{20 \cdot 40^3}{12}} dx + \int_{284.4}^{400} -0.00125x \left(-\frac{2\frac{240}{70000}}{40\sqrt{3\left(1-\frac{4500x}{1.92 \cdot 10^6}\right)}} \right) dx \right]$$

da cui, sviluppando i calcoli,

$\alpha = 0.0357$ rad

Equazione del PLV – Calcolo della rotazione α_{el} durante la fase di scarico

Nella fase di scarico, il comportamento del materiale è perfettamente elastico, per cui si ha

$$L_{est} = 1 \cdot \alpha_{el}$$

$$L_{\text{int}} = 2\left[\int_0^{400} -0.00125x \frac{-4500x}{70000 \cdot \frac{20 \cdot 40^3}{12}} dx \right]$$

da cui

$$\alpha_{el} = 0.0161 \,\text{rad}$$

La rotazione residua $\boldsymbol{\alpha_{res}}$ è pertanto

$$\alpha_{res} = \alpha - \alpha_{el} = 0.0196 \,\text{rad}$$

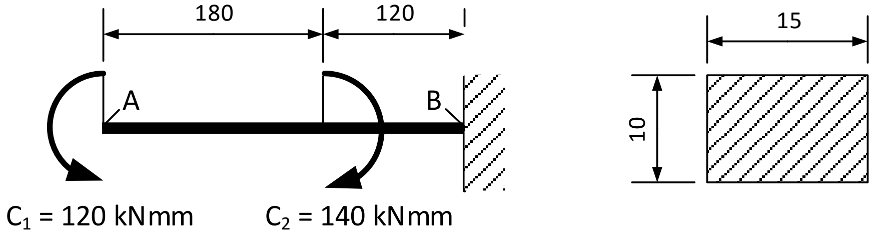
ESERCIZIO 2

(Prova scritta 25 gennaio 2016)

La trave di figura è caricata dalle due coppie flettenti C_1 e C_2 e successivamente scaricata completamente. Calcolare:

a) la rotazione residua della linea d'asse della trave all'estremo A;
b) la distribuzione degli sforzi residui, con i relativi valori, nelle sezioni A (estremità) e B (incastro) della trave.

Materiale: Acciaio; σ_{sn} =380 MPa; E =210 GPa



Il diagramma dei momenti (riportato dalla parte delle fibre tese) della struttura caricata dalla coppie C_1 e C_2 è riportato in fig. 1.

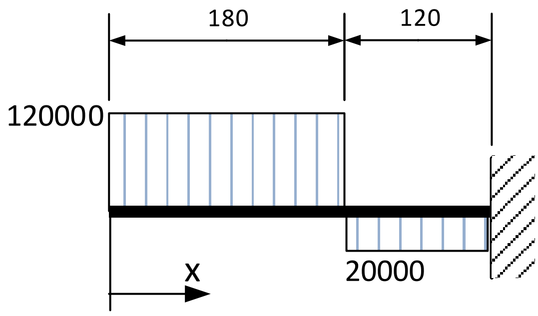


Fig. 1

Per la sezione rettangolare in esame i momenti di prima plasticizzazione *M*' e di plasticizzazione totale *M*'' valgono rispettivamente

$$M' = \sigma_{sn} W_f = \sigma_{sn} \frac{ab^2}{6} = 380 \frac{15 \cdot 10^2}{6} = 95 \,\text{kNmm}$$

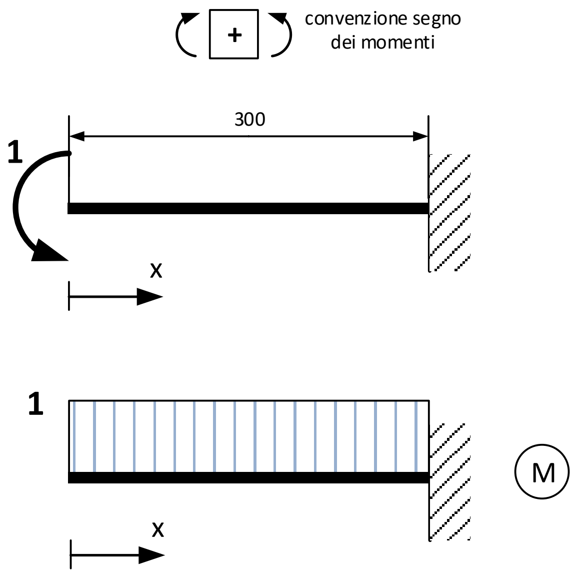
$$M'' = \sigma_{sn} \frac{ab^2}{4} = 380 \frac{15 \cdot 10^2}{4} = 142.5 \,\text{kNmm}$$

Il momento agente nel tratto di sinistra (lunghezza = 180 mm) è dunque più elevato di quello di prima plasticizzazione *M’* e più piccolo di quello di plasticizzazione totale *M’’*. In questo tratto il materiale si trova in campo elasto-plastico.

Il momento agente nel tratto di destra (lunghezza = 120 mm) è più piccolo del momento di prima plasticizzazione *M’*. In questo tratto il materiale si trova in campo elastico.

Per calcolare la rotazione angolare residua utilizziamo il PLV.

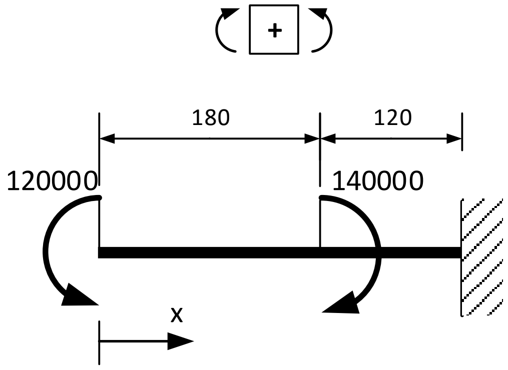
SISTEMA DI FORZE

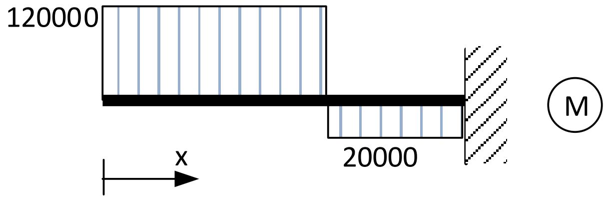


$0 < x < 300$

$M' = -1$

SISTEMA DI SPOSTAMENTI





$$0 < x < 180 \quad (\text{materiale in campo elasto - plastico})$$

$$\mathrm{M} = -120000 \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}\varphi_{ep} = -\frac{2\varepsilon_{sn}}{b\sqrt{3\left(1-\dfrac{M}{M''}\right)}}dx = -\frac{2\dfrac{380}{210000}}{10\sqrt{3\left(1-\dfrac{120000}{142500}\right)}}dx$$

$$180 < x < 300 \quad (\text{materiale in campo elastico})$$

$$\mathrm{M} = 20000 \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}\varphi = \frac{M}{EJ}dx = \frac{20000}{210000\cdot\dfrac{15\cdot 10^3}{12}}dx$$

Si noti che il segno di $\mathrm{d}\varphi_{ep}$ nel tratto elasto-plastico è negativo in quanto il momento in tale tratto è negativo, poiché la convenzione scelta considera positivi i momenti che tendono le fibre inferiori.

Equazione del PLV – Calcolo della rotazione α alla fine della fase di carico

$$L_{est} = 1 \cdot \alpha$$

$$L_{\text{int}} = \int_0^{180} -1 \cdot \left(- \frac{2\,\frac{380}{210000}}{10\sqrt{3\left(1 - \frac{120000}{142500}\right)}} \right) dx + \int_{180}^{300} -1 \cdot \frac{20000}{210000 \cdot \frac{15 \cdot 10^3}{12}}\, dx$$

da cui, sviluppando i calcoli,

$$\alpha = 0.09465 - 0.0091 = 0.0855\,\text{rad} = 4.90°$$

Poiché il valore ottenuto per α è positivo, la rotazione α è concorde con il momento unitario applicato nel sistema di forze ed è quindi antioraria.

Equazione del PLV – Calcolo della rotazione α_{el} durante la fase di scarico

Nella fase di scarico, il comportamento del materiale è perfettamente elastico, per cui si ha

$$L_{est} = 1 \cdot \alpha_{el}$$

$$L_{\text{int}} = \int_0^{180} 1 \cdot \frac{120000}{210000 \cdot \frac{15 \cdot 10^3}{12}}\, dx + \int_{180}^{300} 1 \cdot \frac{-20000}{210000 \cdot \frac{15 \cdot 10^3}{12}}\, dx$$

da cui

$$\alpha_{el} = 0.0823 - 0.0091 = 0.073\,\text{rad} = 4.19°$$

La rotazione α_{el} ha verso opposto (e quindi orario) rispetto alla rotazione elasto-plastica α (avente verso antiorario).

La rotazione residua α_{res} è pertanto

$$\alpha_{res} = \alpha - \alpha_{el} = 4.90 - 4.19 = 0.71°$$

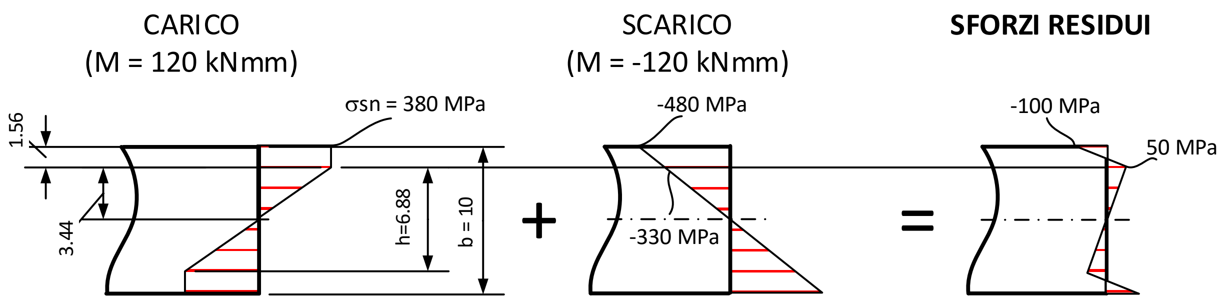
CALCOLO DEGLI SFORZI RESIDUI

Gli sforzi residui nella sezione in A sono dati dalla differenza tra gli sforzi prodotti dal momento M= 120 kNmm (in presenza del carico applicato) e quelli generati da un momento di valore opposto (fase di scarico; M = -120 kNmm) e calcolati nell'ipotesi di comportamento del materiale perfettamente elastico.

La dimensione della zona elastica centrale (h) per il momento applicato M = 120 kNmm vale

$$h = b\sqrt{3\left(1-\frac{M}{M''}\right)} = 10\sqrt{3(1-\frac{120000}{142500})} = 6.88 \text{ mm}$$

La distribuzione degli sforzi residui si ottiene pertanto dallo schema seguente:

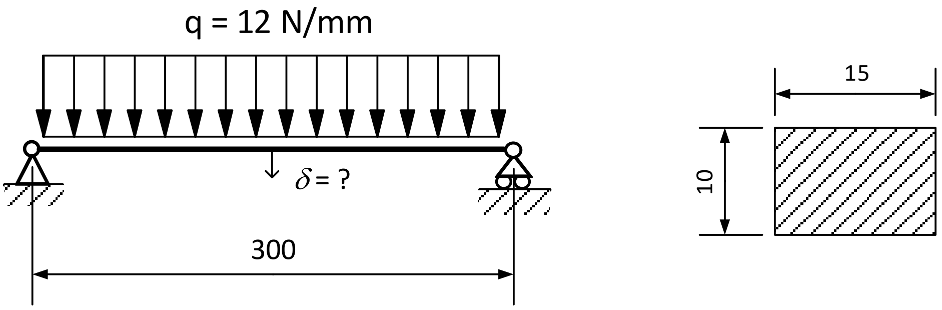


Gli sforzi residui nella sezione in B sono nulli in quanto la sezione sia nella case di carico che in quella di scarico rimane in campo elastico.

ESERCIZIO 3

La trave di figura è soggetta ad una carico distribuito di valore pari a q = 12 N/mm. Calcolare lo spostamento verticale δ della sezione di mezzeria della trave.

Materiale: Acciaio; σ_{sn} =380 MPa; E =210 GPa



I momenti di prima plasticizzazione *M*' e di plasticizzazione totale *M*'' della sezione valgono rispettivamente:

$$M' = \sigma_{sn} W_f = \sigma_{sn} \frac{ab^2}{6} = 380 \frac{15 \cdot 10^2}{6} = 95 \,\text{kNmm}$$

$$M'' = \sigma_{sn} \frac{ab^2}{4} = 380 \frac{15 \cdot 10^2}{4} = 142.5 \,\text{kNmm}$$

L'equazione del momento, scegliendo un sistema di rfierimento avente origine nella cerniera di sinistra vale

$$M = 1800x - \frac{12x^2}{2}$$

Il diagramma dei momenti della struttura (riportato dalla parte delle fibre tese) è illustrato in fig. 1. Si nota come il momento massimo sia maggiore di quello di prima plasticizzazione *M'* e minore di quello di plasticizzazione totale *M''*. Nel tratto centrale della trave la sezione si trova dunque in campo elasto-plastico.

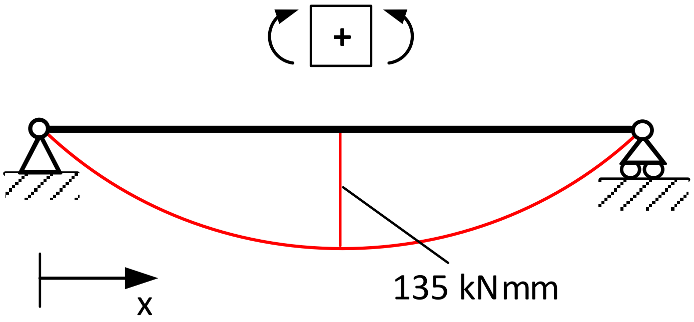


Fig. 1

Imponendo la condizione *M* = *M'* si ricavano i valori della coordinata *x* che individuano le zone della trave in campo elastico ed elastoplastico.

$$1800x - \frac{12x^2}{2} = 95000 \;\rightarrow\; x = \begin{matrix} 68.35 \\ 231.65 \end{matrix}$$

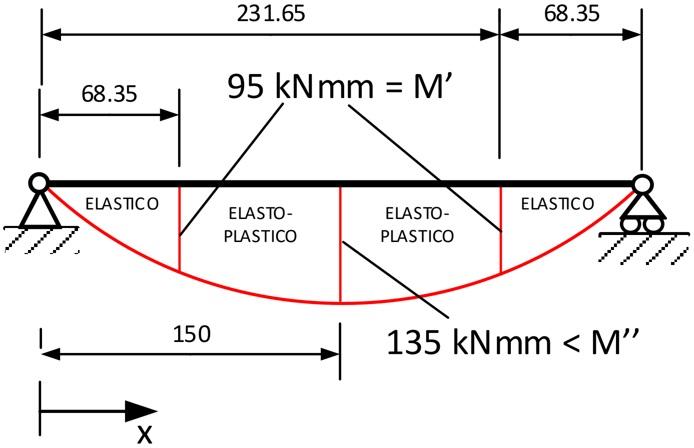
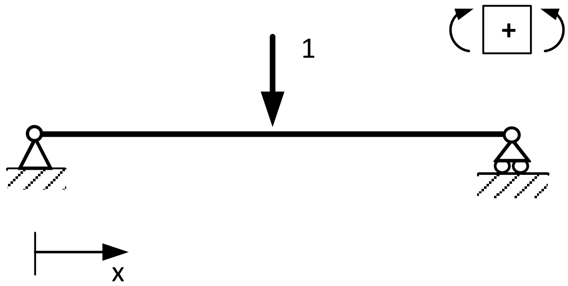


Fig. 1

Utilizziamo il PLV per calcolare lo spostamento verticale della trave in mezzeria. Poiché le azioni interne di entrambi i sistemi sono simmetriche rispetto alla mezzeria è sufficiente analizzare metà struttura (0 < *x* < 150).

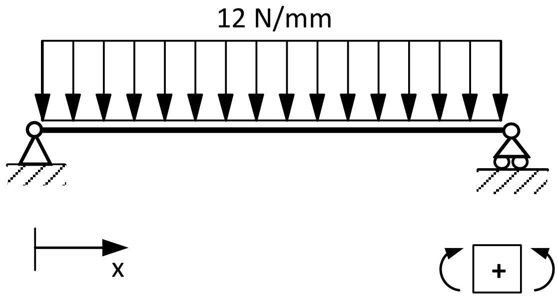
SISTEMA DI FORZE



$$0 < x < 150 \qquad M = \frac{1}{2}x$$

$$150 < x < 300 \qquad M = \frac{1}{2}x - 1(x - 150)$$

SISTEMA DI SPOSTAMENTI



$$0 < x < 300 \quad M = 1800x - \frac{12x^2}{2} = 1800x - 6x^2$$

Le espressioni di $d\varphi$ nei diversi campi sono pertanto le seguenti:

$0 < x < 68.35$ (materiale in campo elastico) → $d\varphi = \dfrac{M}{EJ}dx$

$$d\varphi = \frac{1800x - 6x^2}{210000 \cdot \frac{15 \cdot 10^3}{12}}dx$$

$68.35 < x < 150$ (materiale in campo elasto-plastico) → $d\varphi = \dfrac{2\varepsilon_{sn}}{b\sqrt{3\left(1 - \frac{M}{M''}\right)}}dx$

$$d\varphi = \frac{2\frac{380}{210000}}{10\sqrt{3\left(1 - \frac{|1800x - 6x^2|}{142500}\right)}}dx$$

Equazione del PLV – Calcolo dello spostamento δ

$$L_{est} = 1 \cdot \delta$$

$$L_{int} = 2\left[\int_{0}^{68.35} \frac{1}{2}x \cdot \frac{1800x - 6x^2}{210000 \cdot \frac{15 \cdot 10^3}{12}}\,dx + \int_{68.35}^{150} \frac{1}{2}x \cdot \frac{2 \cdot \frac{380}{210000}}{10\sqrt{3\left(1 - \frac{|1800x - 6x^2|}{142500}\right)}}\,dx\right]$$

da cui, effettuando le integrazioni,

$$\delta = 0.61 + 5.88 = 6.5 \text{ mm}$$