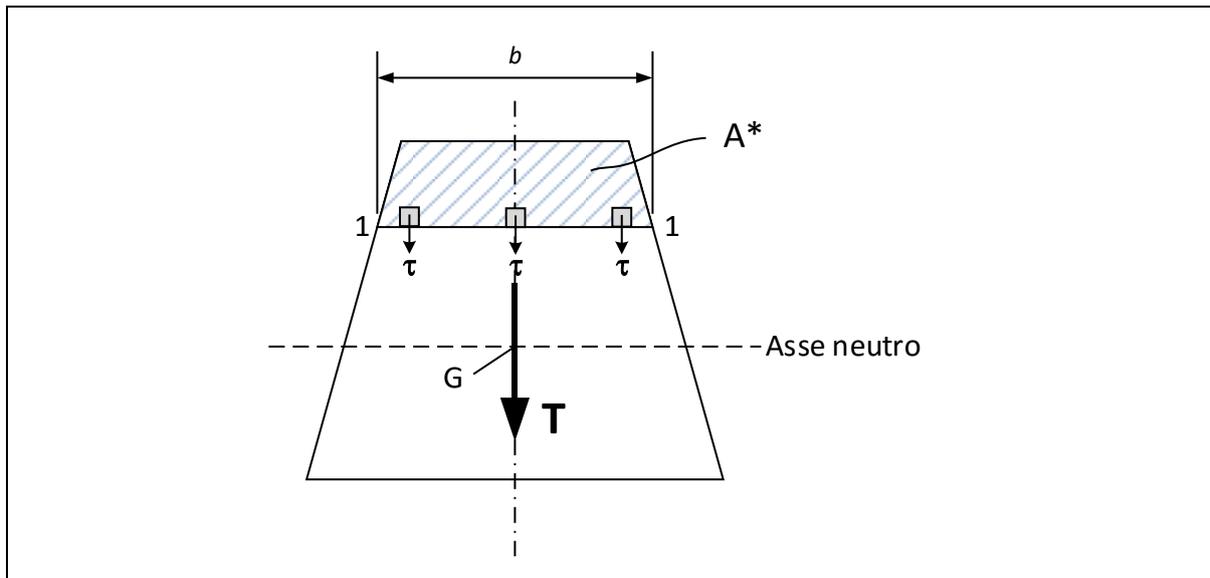


SEZIONI A PARETE SOTTILE SFORZI TANGENZIALI E CENTRO DI TAGLIO

La relazione di Jourawski che lega l'azione di taglio T agente nella sezione di una trave con le sollecitazioni tangenziali medie τ agenti su una corda della sezione è spesso utilizzata considerando una corda parallela all'asse neutro della sezione (fig. 1)



$$\tau = \frac{T \cdot S}{b \cdot J} \quad (\text{Formula di Jourawski})$$

dove

τ = componente dello sforzo tangenziale medio agente lungo la corda 1-1 in direzione verticale

T = azione di taglio agente sulla sezione

S = momento statico rispetto all'asse neutro dell'area A^* individuata dalla corda 1-1

b = lunghezza della corda 1-1

J = momento d'inerzia dell'area della sezione completa rispetto all'asse neutro

Figura 1: Sforzi tangenziali medi su una corda in una sezione soggetta ad azione di taglio T

In realtà la relazione può essere utilizzata considerando qualunque corda interna alla sezione della trave (non necessariamente parallela all'asse neutro), a patto che divida in due parti la sezione stessa.

Consideriamo in particolare il calcolo degli sforzi tangenziali in sezioni a pareti sottili, nelle quali cioè lo spessore delle pareti è piccolo rispetto alla lunghezza della linea media della sezione.

SEZIONE A C (CHANNEL SECTION)

La sezione a C di fig. 2 ha un asse di simmetria orizzontale; gli assi principali d'inerzia sono quindi l'asse di simmetria e l'asse ortogonale ad esso. Se il carico agente è verticale, come in fig. 2, l'asse neutro di flessione coincide con l'asse principale d'inerzia orizzontale.

Poiché le pareti della sezione sono sottili, il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro può essere calcolato in maniera semplificata, senza commettere grossi errori, ragionando sulla linea media della sezione:

$$J = \frac{h \cdot c^3}{12} + 2 \cdot (a \cdot h) \cdot \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

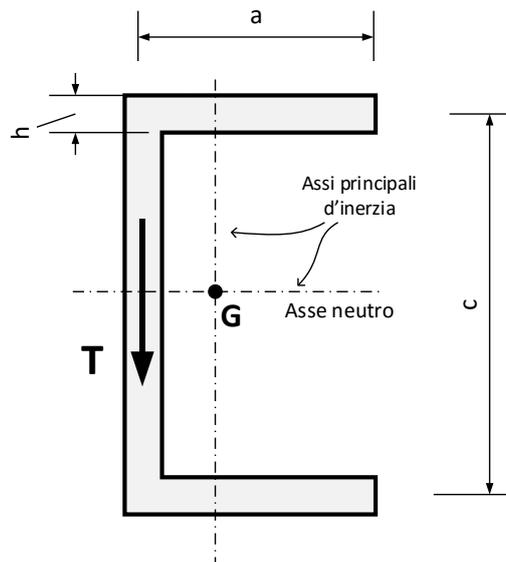


Figura 2: Sezione a C soggetta ad un'azione di taglio verticale

SFORZI TANGENZIALI NELLE ALI

Se effettuiamo un taglio della sezione (fig. 3a) in corrispondenza di una corda generica in un'ala (corda 1-1), possiamo calcolare lo sforzo tangenziale medio lungo la corda utilizzando la formula di Jourawski:

$$\tau = \frac{T \cdot S}{b \cdot J} = \frac{T \cdot (\eta h) \cdot \frac{c}{2}}{h \cdot J} \quad (1)$$

Lo sforzo tangenziale τ ha direzione parallela alla linea d'asse dell'ala. La relazione (1) indica che lo sforzo τ varia linearmente al variare dell'ascissa η .

Lo sforzo τ è nullo all'estremo dell'ala e vale $\tau = \frac{T \cdot \frac{ac}{2}}{J}$ all'incrocio dell'ala con l'anima.

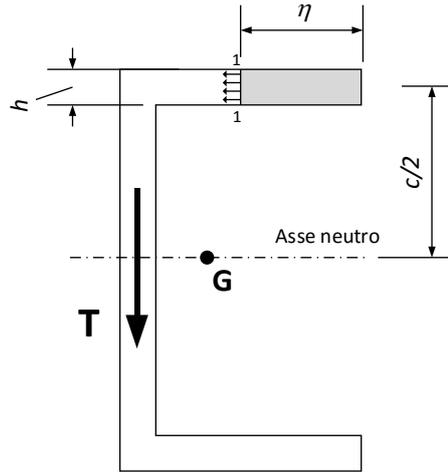


Figura 3a: Calcolo degli sforzi tangenziali in un'ala in una sezione a C

SFORZI TANGENZIALI NELL'ANIMA

Se consideriamo (fig. 3b) la corda generica nell'anima (corda 2-2), possiamo calcolare lo sforzo tangenziale medio lungo la corda 2-2 come:

$$\tau = \frac{T \cdot S}{b \cdot J} = \frac{T \cdot \left[(ah) \cdot \frac{c}{2} + (\eta h) \cdot \left(\frac{c}{2} - \frac{\eta}{2} \right) \right]}{h \cdot J} \quad (2)$$

Lo sforzo tangenziale τ ha direzione parallela alla linea media dell'anima. La relazione (2) indica che lo sforzo τ varia con legge parabolica al variare dell'ascissa η .

Lo sforzo τ vale $\tau = \frac{T \cdot a \cdot c}{J}$ all'estremo superiore dell'anima e raggiunge il valore massimo $\tau = \frac{T \cdot \left(\frac{ac}{2} + \frac{c^2}{8} \right)}{J}$ all'asse neutro.

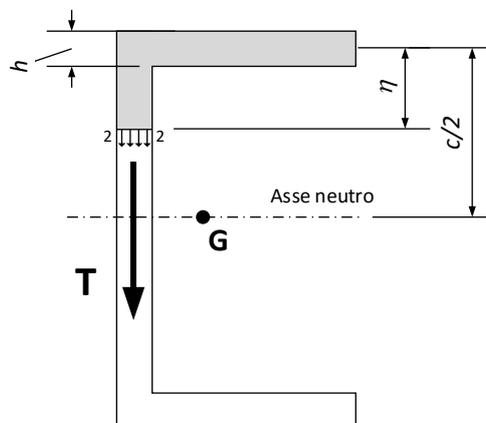


Figura 3b: Calcolo degli sforzi tangenziali in un'ala in una sezione a C

L'andamento degli sforzi τ nella sezione è illustrato in fig. 4

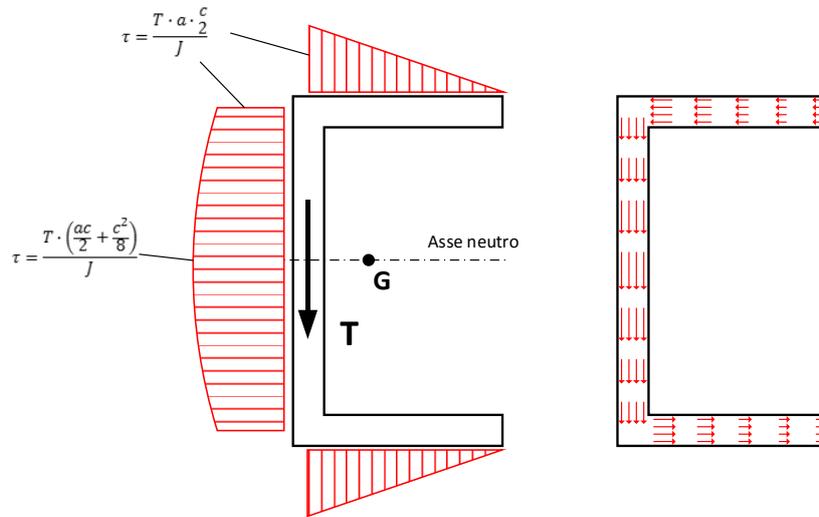


Figura 4: Andamento degli sforzi tangenziali in una sezione a C

Calcoliamo ora le forze F_1 ed F_2 risultanti degli sforzi agenti rispettivamente nella ali e nell'anima (fig. 5)

$$F_1 = \int_0^a \tau(\eta) \cdot h \cdot d\eta = \int_0^a \frac{T \eta c}{J} \cdot h \cdot d\eta = \frac{T}{J} \cdot \frac{c}{4} \cdot h \cdot a^2$$

$$F_2 = 2 \int_0^{\frac{c}{2}} \tau(\eta) \cdot h \cdot d\eta = \int_0^{\frac{c}{2}} \frac{T}{J} \left[a \frac{c}{2} + \eta \left(\frac{c}{2} - \frac{\eta}{2} \right) \right] \cdot h \cdot d\eta = \dots = T$$

Come illustrato in fig. 5, si può notare come le forze F_1 ed F_2 agenti sulle ali e sull'anima (fig. 5a) siano equivalenti staticamente ad un sistema composto da una forza verticale di valore T ed una coppia torcente di valore $F_1 c$ (fig. 5b). Tale sistema è a sua volta equivalente staticamente ad un sistema costituito da una sola forza T (fig. 5c) agente in un particolare punto C, detto CENTRO DI TAGLIO.

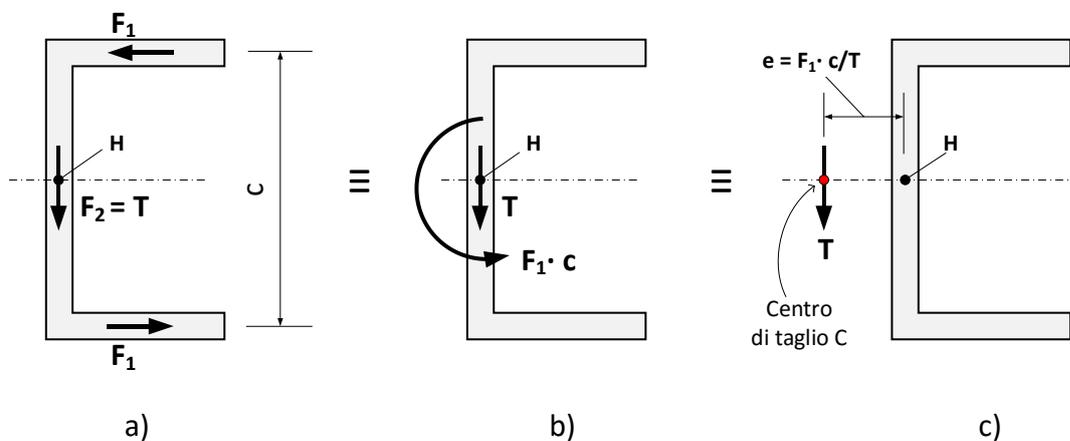


Fig. 5: Sistemi equivalenti di forze e centro di taglio

Il centro di taglio è quindi quel particolare punto della sezione tale che, se il carico applicato alla sezione passa per quel punto, non si genera un momento torcente spurio e la trave si inflette senza torcersi. Al contrario, se il carico non passa per il centro di taglio, gli sforzi tangenziali generati dall'azione di taglio producono un momento torcente spurio e la trave è sottoposta a torsione oltre che a flessione.

Per calcolare la posizione del centro di taglio possiamo imporre che i sistemi equivalenti (cioè il sistema costituito dalla forza F_1 più la coppia di forze F_2 ed il sistema costituito dalla sola forza T) abbiano lo stesso momento rispetto ad un punto scelto a piacere.

Nel caso specifico possiamo ad esempio scegliere il punto H ed imporre l'uguaglianza dei momenti dei due sistemi rispetto a tale punto:

$$F_1 \cdot c = T \cdot e$$

da cui

$$e = \frac{F_1 \cdot c}{T}$$

Il centro di taglio si trova quindi sull'asse di simmetria orizzontale ad una distanza dal punto H pari ad e .

La posizione del centro di torsione di sezioni a parete sottile di forma diversa può essere ottenuta operando in maniera analoga.

Valgono le seguenti **regole per la posizione del centro di taglio**:

- Il centro di taglio appartiene necessariamente agli assi di simmetria della sezione. Pertanto:
 - Se la sezione ha un asse di simmetria (fig. 6a), il centro di taglio appartiene all'asse di simmetria
 - Se la sezione ha due assi di simmetria (fig. 6b) il centro di taglio appartiene all'intersezione dei due assi di simmetria (e quindi coincide con il baricentro della sezione)
- Se la sezione è a simmetria polare (fig. 6c), il centro di taglio coincide il polo della simmetria polare.
- Se la sezione è costituita da due o più rettangoli che convergono in uno stesso punto (fig. 6d), tale punto è il centro di taglio

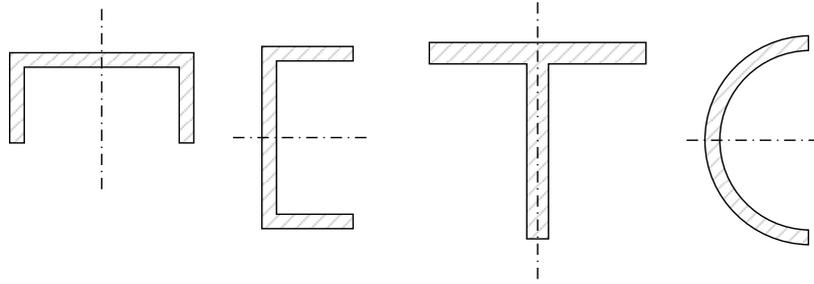


Fig. 6a: Sezioni con un asse di simmetria

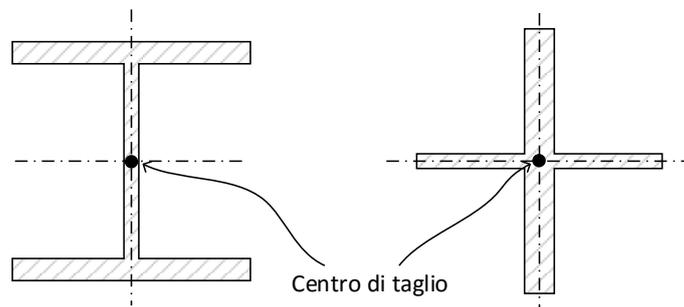


Fig. 6b: Sezioni con due assi di simmetria

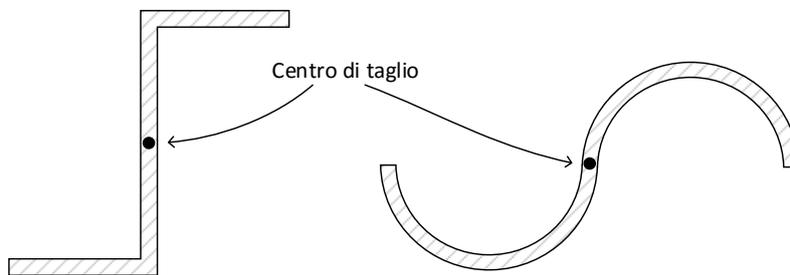


Fig. 6c: Sezioni a simmetria polare

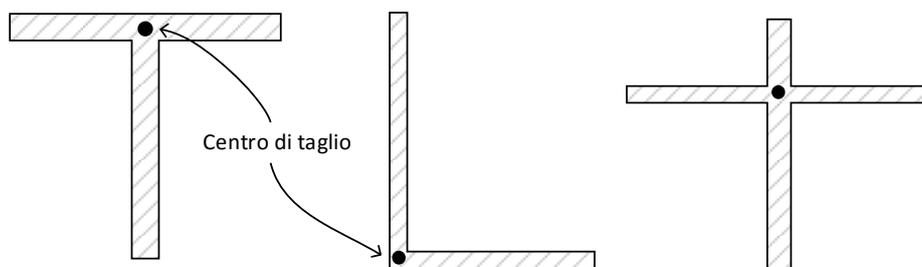


Fig. 6d: Sezioni composte da rettangoli che convergono in un unico punto

SEZIONE ANGOLARE

La sezione angolare di fig. 7 ha un solo asse di simmetria; tale asse e l'asse ad esso ortogonale (verticale) passanti per il baricentro G sono pertanto gli assi principali d'inerzia. Se il carico ha direzione verticale, la sua direzione coincide con quella dell'asse principale d'inerzia verticale e l'asse neutro coincide con l'asse principale d'inerzia orizzontale.

Poiché la sezione è costituita da due rettangoli che convergono in un unico punto, tale punto è il centro di taglio della sezione.

Il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro può essere calcolato considerando la linea media della sezione, e vale, ricordando che il momento d'inerzia di un rettangolo rispetto alla base è uguale a $\frac{base \cdot altezza^3}{3}$,

$$J = 2 \cdot \frac{h}{\sin\beta} \cdot \frac{[a \cdot \sin\beta]^3}{3} = \frac{2}{3} \cdot h \cdot a^3 \cdot (\sin\beta)^2$$

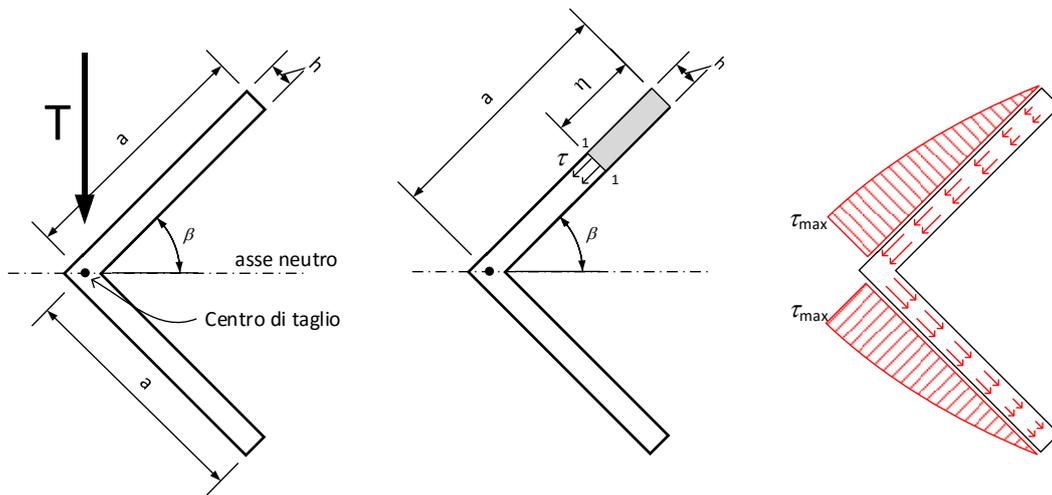


Fig. 7: Sforzi di taglio in una sezione angolare soggetta ad un'azione di taglio verticale

SFORZI TANGENZIALI

Se consideriamo la corda generica 1-1 (fig. 7), possiamo calcolare lo sforzo tangenziale medio lungo la corda come:

$$\tau = \frac{T \cdot S}{b \cdot J} = \frac{T \cdot h \cdot \eta \cdot \left(a - \frac{\eta}{2}\right) \cdot \sin\beta}{h \cdot J}$$

Lo sforzo tangenziale massimo si ha quindi all'asse neutro ($\eta = a$) e vale

$$\tau_{max} = \frac{T \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \sin\beta}{J}$$

SEZIONE SEMICIRCOLARE

La sezione (fig. 8) ha un solo asse di simmetria (orizzontale); tale asse e l'asse ad esso ortogonale (verticale) passanti per il baricentro G sono pertanto gli assi principali d'inerzia. Se il carico ha direzione verticale, la sua direzione coincide con quella dell'asse principale d'inerzia verticale e l'asse neutro coincide con l'asse principale d'inerzia orizzontale.

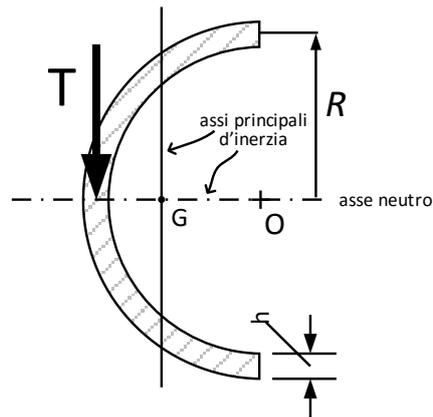


Fig. 8: Sezione a parete sottile semicircolare soggetta ad un'azione di taglio verticale

Calcoliamo gli sforzi tangenziali utilizzando la formula di Jourawski $\tau = \frac{T \cdot S}{b \cdot J}$.

Il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro, considerando lo spessore h molto più piccolo della lunghezza l della linea media, vale (vedi fig. 9):

$$J = \int_A y^2 dA = \int_0^\pi (R \cdot \cos\alpha)^2 \cdot (h \cdot R d\alpha) = R^3 \cdot h \int_0^\pi (\cos\alpha)^2 \cdot d\alpha =$$

$$= R^3 \cdot h \cdot \left[\frac{1}{2}(\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha) \right]_0^\pi = \frac{R^3 \cdot h}{2} \cdot \pi$$

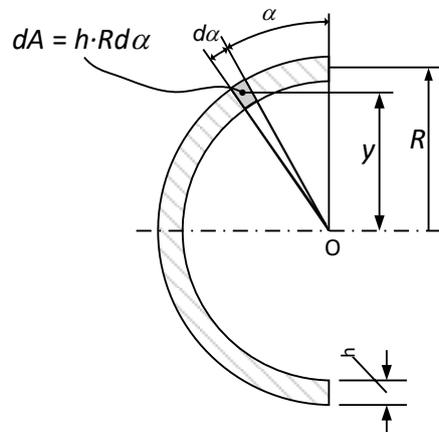


Fig. 9: Sezione a parete sottile semicircolare: calcolo di J

Se consideriamo la corda generica in posizione angolare ϑ , (fig. 10) possiamo inoltre calcolare il momento statico dell'area A^* individuata dalla corda 1-1 come somma dei contributi delle aree infinitesime $hRd\alpha$ integrati tra 0 e ϑ :

$$S = \int_{A^*} y \, dA = \int_0^{\vartheta} R \cdot \cos\alpha \cdot (h \cdot R \cdot d\alpha) = R^2 h \int_0^{\vartheta} \cos\alpha \cdot d\alpha = R^2 h \sin\vartheta$$

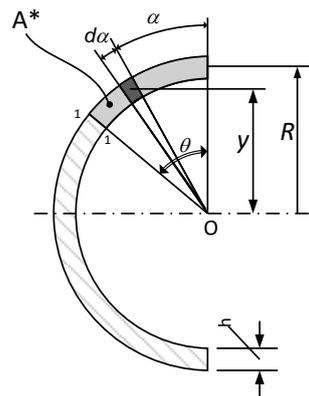


Fig. 10: Sezione a parete sottile semicircolare: calcolo di S

Lo sforzo tangenziale in corrispondenza della corda con coordinata angolare ϑ varrà pertanto

$$\tau = \frac{T \cdot S}{b \cdot J} = \frac{T \cdot R^2 h \sin\vartheta}{h \cdot \frac{R^3 h}{2} \cdot \pi} = 2 \cdot \frac{T \cdot \sin\vartheta}{h R \pi}$$

Lo sforzo tangenziale (fig. 11) varia dunque dal valore nullo per $\vartheta=0$ e $\vartheta=\pi$, al valore massimo $\tau = 2 \frac{T}{h R \pi}$ per $\vartheta=\pi/2$, cioè in corrispondenza dell'asse neutro.

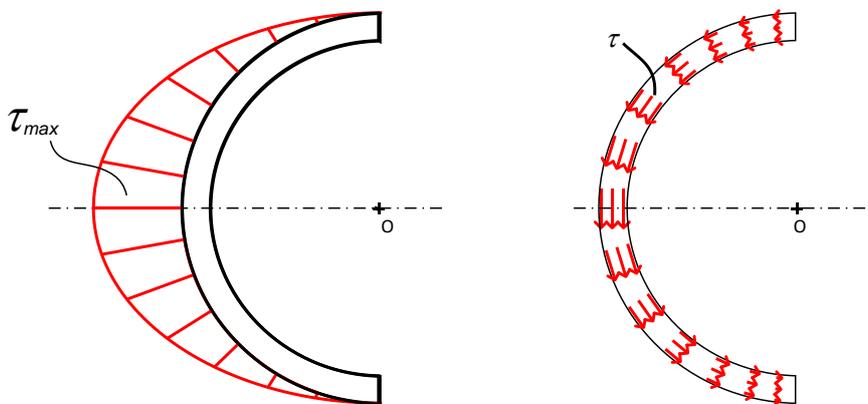


Fig. 11: Sforzi tangenziali dovuti al taglio in una sezione a parete sottile semicircolare

Per determinare la posizione del centro di taglio, che necessariamente appartiene all'asse di simmetria (coincidente in questo caso con l'asse neutro), calcoliamo il momento torcente prodotto dagli sforzi tangenziali rispetto ad un polo a piacere. La scelta più conveniente per il polo è quella del centro O della circonferenza media, poiché in tal caso il braccio delle forze prodotte dagli sforzi τ rimane costante, e pari ad R, al variare dell'angolo ϑ .

$$M_t = \int_0^\pi \tau \cdot h \cdot R d\vartheta \cdot R = R^2 h \int_0^\pi \tau \cdot d\vartheta = R^2 h \int_0^\pi 2 \frac{T \cdot \sin\vartheta}{h R \pi} \cdot d\vartheta = 2T \frac{R}{\pi} \int_0^\pi \sin\vartheta \cdot d\vartheta = \frac{4TR}{\pi}$$

La distanza del centro di taglio dal centro O del cerchio si ricava uguagliando il momento M_t appena calcolato con il momento generato rispetto allo stesso punto O dalla sola forza T (fig. 12).

$$T \cdot e = \frac{4TR}{\pi}$$

da cui

$$e = \frac{4R}{\pi} \cong 1.27 R$$

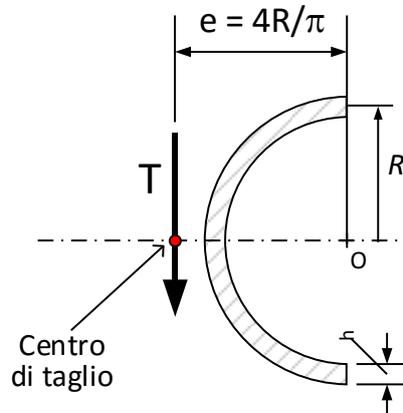


Fig. 12: Posizione del centro di taglio in una sezione a parete sottile semicircolare

SEZIONE A Z : CALCOLO DEGLI SFORZI τ DOVUTI AL TAGLIO

La sezione a Z di fig. 13, avente spessore costante pari ad $h = 2.5$ mm, è soggetta ad un'azione di taglio verticale di 3 kN passante per la linea d'asse dell'anima.

Poiché la sezione ha simmetria polare rispetto al punto P, il baricentro G ed il centro di taglio D coincidono con tale punto.

La sezione non ha assi di simmetria, ed è pertanto necessario determinare la direzione degli assi principali d'inerzia.

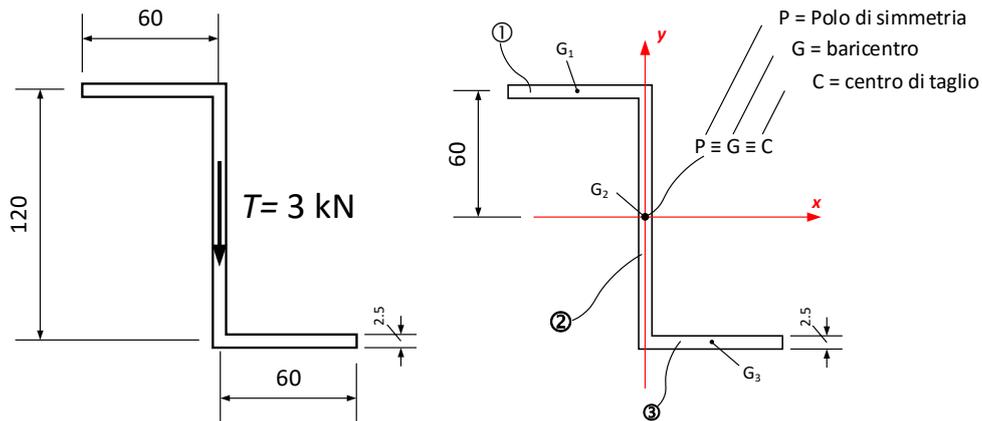


Fig. 13: Sezione a Z soggetta ad un'azione di taglio verticale

Calcolo dei momenti d'inerzia rispetto agli assi x ed y :

$$J_x = 2 \cdot (60 \cdot 2.5) \cdot 60^2 + \frac{2.5 \cdot 120^3}{12} = 1.440E6 \text{ mm}^4$$

$$J_y = 2 \cdot \frac{2.5 \cdot 60^3}{3} + 0 = 0.360E6 \text{ mm}^4$$

Per il calcolo del momento d'inerzia centrifugo J_{xy} utilizziamo la regola del momento di trasporto considerando separatamente i tre rettangoli ①, ② e ③ e le coordinate dei loro baricentri rispetto agli assi x ed y (fig. 14):

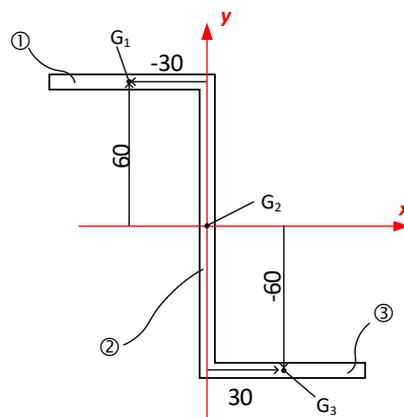


Fig. 14: Calcolo del momento centrifugo J_{xy}

$$J_{xy} = (2.5 \cdot 60) \cdot 60 \cdot (-30) + 0 + (2.5 \cdot 60) \cdot (-60) \cdot 30 = -0.540E6 \text{ mm}^4$$

Noti J_x , J_y e J_{xy} , possiamo calcolare le orientazioni ϑ degli assi principali d'inerzia rispetto al sistema x - y tramite la relazione:

$$\tan(2\vartheta) = -\frac{J_{xy}}{\frac{J_x - J_y}{2}} = -\frac{-0.540E6}{\frac{1.440E6 - 0.360E6}{2}} = 1$$

da cui

$$2\vartheta = \begin{matrix} 45^\circ \\ -135^\circ \end{matrix} \rightarrow \vartheta = \begin{matrix} 22.5^\circ \\ -67.5^\circ \end{matrix}$$

Gli assi principali x' ed y' sono riportati in fig. 15a.

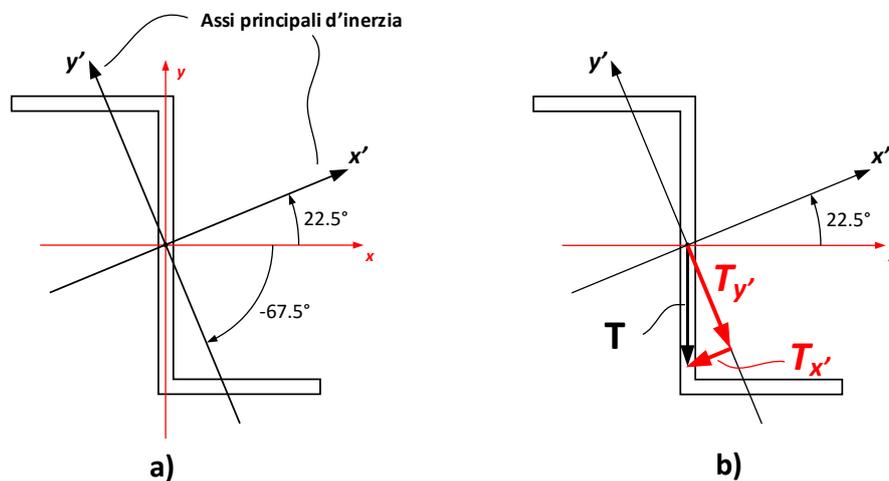


Fig. 15: Assi principali d'inerzia x' ed y' e componenti dell'azione di taglio $T_{x'}$ e $T_{y'}$.

I momenti d'inerzia rispetto agli assi principali d'inerzia possono essere calcolati con la relazione:

$$\begin{matrix} J_{x'} \\ J_{y'} \end{matrix} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$

$$\begin{matrix} J_{x'} \\ J_{y'} \end{matrix} = \frac{1.440E6 + 0.360E6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1.440E6 - 0.360E6}{2}\right)^2 + (-0.540E6)^2} = \begin{cases} 1.664E6 \\ 0.136E6 \end{cases}$$

Osservando l'orientazione degli assi principali d'inerzia rispetto alla sezione, risulta evidente come il momento d'inerzia massimo sia quello rispetto all'asse x' ; si ha pertanto:

$$J_{x'} = 1.664E6 \text{ mm}^4$$

$$J_{y'} = 0.136E6 \text{ mm}^4$$

Dobbiamo ora considerare separatamente le componenti di T nelle direzioni principali x' ed y' (fig. 15b):

$$T_{x'} = T \cdot \sin(22.5^\circ) = 1148 \text{ N}$$

$$T_{y'} = T \cdot \cos(22.5^\circ) = 2772 \text{ N}$$

Possiamo quindi calcolare gli sforzi tangenziali dovuti alle due componenti in alcuni punti caratteristici della sezione, come indicato in fig. 15.

Sforzi tangenziali τ dovuti a $T_{y'}$

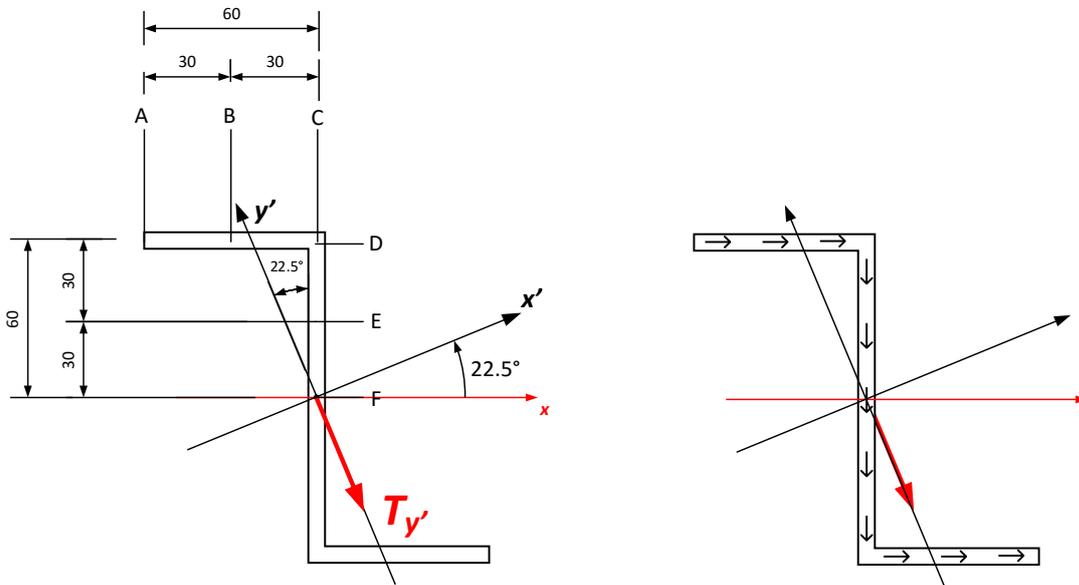


Fig. 16: Sforzi tangenziali τ dovuti a $T_{y'}$

$$\tau_A = 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_B = \frac{T_{y'}}{h \cdot J_{x'}} \cdot S = \frac{2772}{2.5 \cdot 1.664E6} \cdot [(2.5 \cdot 30) \cdot (60 \cdot \cos(22.5^\circ) + 45 \cdot \sin(22.5^\circ))] = 3.63 \text{ MPa}$$

$$\tau_C = \tau_D = \frac{2772}{2.5 \cdot 1.664E6} \cdot [(2.5 \cdot 60) \cdot (60 \cdot \cos(22.5^\circ) + 30 \cdot \sin(22.5^\circ))] = 6.69 \text{ MPa}$$

$$\tau_E = \frac{2772}{2.5 \cdot 1.664E6} \cdot [(2.5 \cdot 60) \cdot (60 \cdot \cos(22.5^\circ) + 30 \cdot \sin(22.5^\circ)) + (2.5 \cdot 30) \cdot 45 \cdot \cos(22.5^\circ)] = 8.77 \text{ MPa}$$

$$\tau_F = \frac{2772}{2.5 \cdot 1.664E6} \cdot [(2.5 \cdot 60) \cdot (60 \cdot \cos(22.5^\circ) + 30 \cdot \sin(22.5^\circ)) + (2.5 \cdot 60) \cdot 30 \cdot \cos(22.5^\circ)] = 9.45 \text{ MPa}$$

Sforzi tangenziali τ dovuti a $T_{x'}$

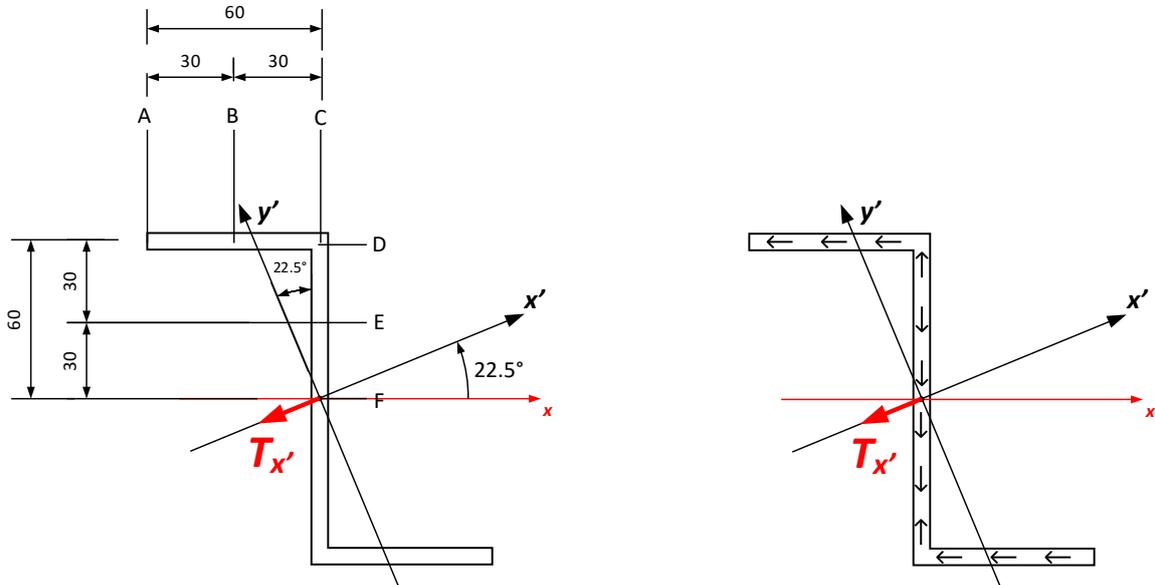


Fig. 17: Sforzi tangenziali τ dovuti a $T_{x'}$

$$\tau_A = 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_B = \frac{T_{x'}}{h \cdot J_{y'}} \cdot S = -\frac{1115}{2.5 \cdot 0.136E6} \cdot [(2.5 \cdot 30) \cdot (-45 \cdot \cos(22.5^\circ) + 60 \cdot \sin(22.5^\circ))] = -4.58 \text{ MPa}$$

$$\tau_C = \tau_D = -\frac{1115}{2.5 \cdot 0.136E6} \cdot [(2.5 \cdot 60) \cdot (-30 \cdot \cos(22.5^\circ) + 60 \cdot \sin(22.5^\circ))] = -2.34 \text{ MPa}$$

$$\tau_E = -\frac{1115}{2.5 \cdot 0.136E6} \cdot [(2.5 \cdot 60) \cdot (-30 \cdot \cos(22.5^\circ) + 60 \cdot \sin(22.5^\circ)) + (2.5 \cdot 30) \cdot 45 \cdot \sin(22.5^\circ)] = 1.89 \text{ MPa}$$

$$\tau_F = -\frac{1115}{2.5 \cdot 0.136E6} \cdot [(2.5 \cdot 60) \cdot (-30 \cdot \cos(22.5^\circ) + 60 \cdot \sin(22.5^\circ)) + (2.5 \cdot 60) \cdot 30 \cdot \sin(22.5^\circ)] = 3.31 \text{ MPa}$$

Gli sforzi tangenziali τ generati dalle componenti $T_{y'}$ e $T_{x'}$ vanno infine sommati algebricamente (cioè considerandone il verso)

Punto	A	B	C \equiv D	E	F
τ (MPa)	0	-0.95	4.35	10.7	12.8