

# TORSIONE DI TRAVI A SEZIONE GENERICA

## TEORIA DI PRANDTL

Consideriamo una trave con una sezione trasversale di forma generica e soggetta alle estremità a due coppie torcenti  $M_t$  opposte (fig. 1a).

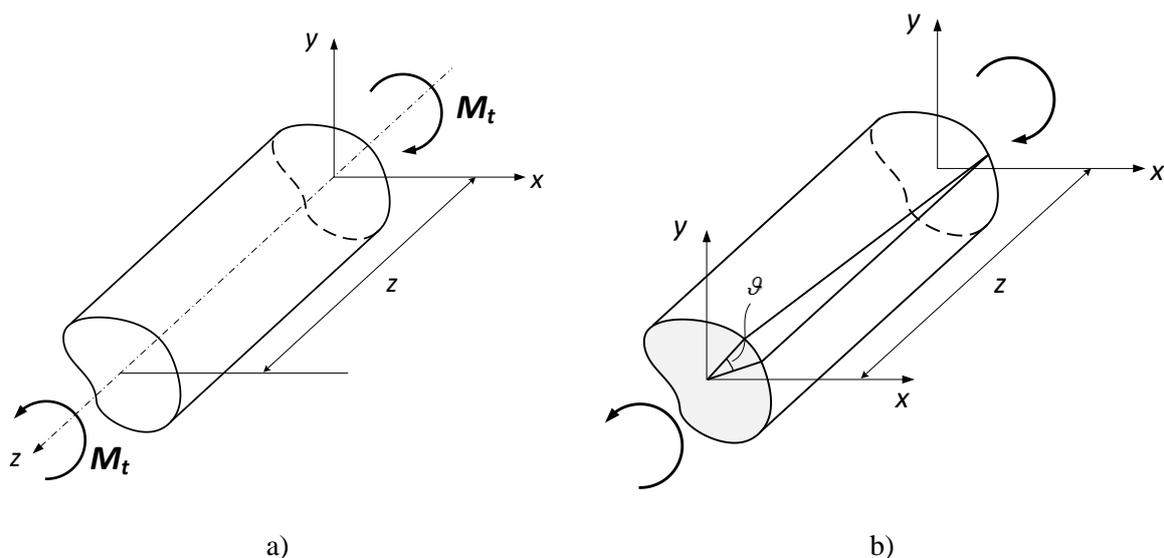


Fig. 1: Trave soggetta a torsione (a) ed angolo di rotazione torsionale  $\vartheta$  (b)

Poniamo l'origine del sistema di coordinate  $x$ - $y$  nel punto attorno al quale ruota la sezione (centro di torsione). Gli spostamenti  $u$  (in direzione  $x$ ) e  $v$  (in direzione  $y$ ) saranno pertanto nulli per tutti i punti appartenenti all'asse  $z$ .

Chiamiamo  $\vartheta$  l'angolo di rotazione torsionale tra due sezioni poste a distanza  $z$  (fig. 1b).

L'angolo  $\bar{\vartheta}$  di rotazione torsionale tra due sezioni a distanza unitaria varrà pertanto

$$\bar{\vartheta} = \frac{\vartheta}{z}$$

Durante la deformazione a torsione le sezioni trasversali non rimangono piane, ma si "ingobbano". Per studiare la rotazione torsionale della generica sezione trasversale, possiamo tuttavia considerare le proiezioni dei punti della sezione sul piano  $x$ - $y$ .

Consideriamo ora lo spostamento subito dal punto generico  $P$  appartenente alla sezione trasversale di coordinata  $z$  (fig. 2); se le coordinate di tale punto nel sistema di riferimento polare sono  $r$  e  $\beta$ , nel sistema di riferimento cartesiano le sue coordinate  $x$  ed  $y$  varranno:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos\beta \\ y &= r \cdot \sin\beta \end{aligned} \tag{1}$$

Supponendo che la sezione trasversale di coordinata  $z = 0$  sia fissa, lo spostamento del punto P (per piccole rotazioni) avrà modulo  $\overline{PP'} = r \cdot \vartheta$  e componenti in direzione  $x$  ed  $y$  pari a (vedi fig. 2):

$$u = -\overline{PP'} \cdot \sin\beta = -r \cdot \vartheta \cdot \sin\beta$$

$$v = \overline{PP'} \cdot \cos\beta = r \cdot \vartheta \cdot \cos\beta$$

Ricordando le relazioni (1), gli spostamenti del punto P nelle direzioni  $x$  ed  $y$  valgono quindi, rispettivamente:

$$u = -y \cdot \vartheta = -y \cdot \bar{\vartheta} \cdot z$$

$$v = x \cdot \vartheta = x \cdot \bar{\vartheta} \cdot z$$

Gli spostamenti  $w$  in direzione  $z$  si assumono uguali per ogni sezione, e quindi non dipendenti da  $z$ :

$$w = w(x, y)$$

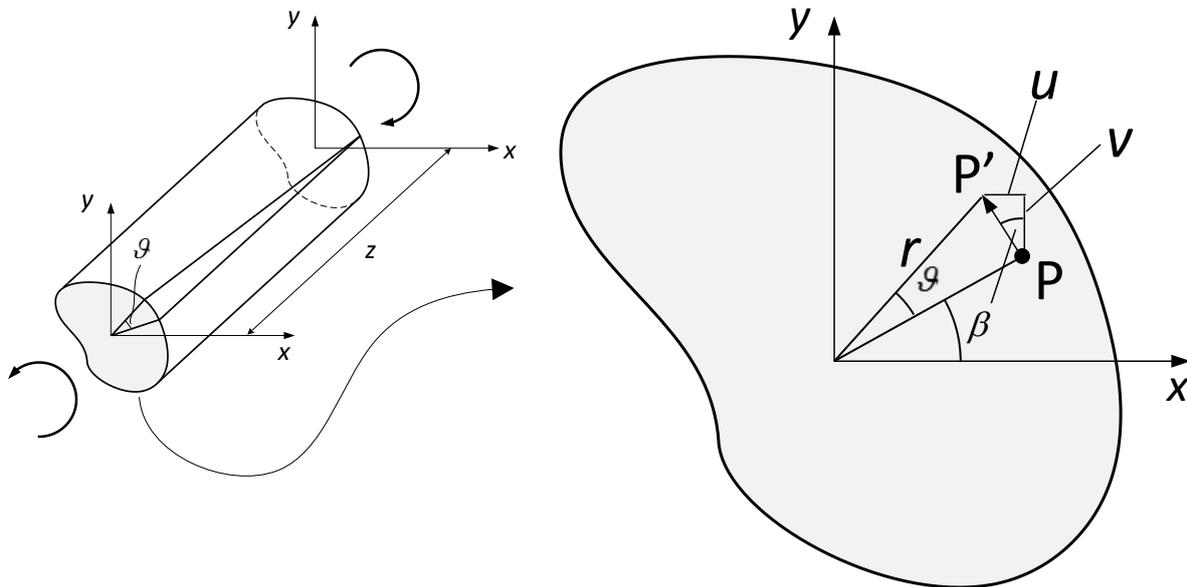


Fig. 2 : Rotazione della sezione trasversale di una trave soggetta a momento torcente

Note le espressioni degli spostamenti  $u$ ,  $v$  e  $w$ , possiamo calcolare le deformazioni nel punto P:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\bar{\vartheta} \cdot z + \bar{\vartheta} \cdot z = 0 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -y \cdot \bar{\vartheta} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u}{\partial z} = 0 & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = x \cdot \bar{\vartheta} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

Lo stato di deformazione si riduce dunque alle sole  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ , e, di conseguenza, lo stato di sforzo consiste nelle sole componenti:

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}$$

Ricordando le equazioni di equilibrio alla traslazione in direzione  $z$  di un elementino infinitesimo

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

ed essendo  $\sigma_z = 0$ , si ha

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Tale equazione di equilibrio è soddisfatta da  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  esprimibili nella seguente forma

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{aligned} \quad (4)$$

dove  $\Phi(x,y)$  è la cosiddetta funzione di sforzo (o funzione di Prandtl).

Se sostituiamo le relazioni (4) nell'equazione (3), risulta infatti

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0$$

e l'equazione (3) è quindi soddisfatta dalle relazioni (4).

Se è nota la funzione di sforzo  $\Phi(x,y)$  è possibile determinare gli sforzi tangenziali  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  utilizzando le relazioni (4).

Possiamo ora scrivere gli sforzi tangenziali  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  in funzione delle deformazioni  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ , espresse a loro volta dalle equazioni (2):

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} = G \left( -y \cdot \bar{\vartheta} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = G \gamma_{yz} = G \left( x \cdot \bar{\vartheta} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Derivando  $\tau_{xz}$  rispetto ad  $y$  e  $\tau_{yz}$  rispetto ad  $x$  si ottiene

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = G \left( -\bar{\vartheta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = G \left( \bar{\vartheta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

Sottraendo membro a membro si può scrivere

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -2G\bar{\vartheta}$$

Infine, esprimendo  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  in funzione della funzione di sforzo  $\Phi(x,y)$  tramite le relazioni (4), si giunge all'equazione:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -2G\bar{\vartheta} \quad (5)$$

Poiché la superficie laterale della trave è scarica, sul contorno della sezione non può esistere una componente di sforzo tangenziale ortogonale al contorno; la risultante degli sforzi tangenziali  $\vec{\tau}_z$  (somma vettoriale degli sforzi  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ ) deve quindi essere tangente al contorno (fig. 3).

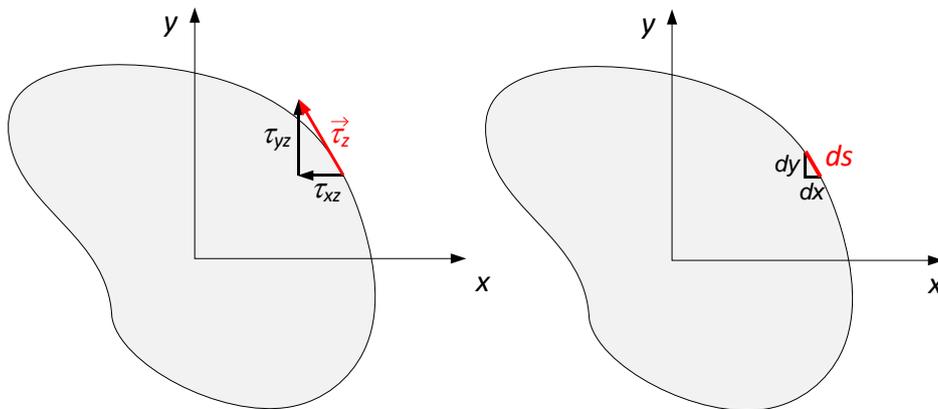


Fig. 3: Direzioni degli sforzi tangenziali al contorno della sezione

Sul contorno della sezione deve cioè valere la relazione (fig. 3)

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{yz}} = \frac{dx}{dy}$$

da cui

$$\tau_{xz} \cdot dy = \tau_{yz} \cdot dx$$

e, esprimendo le  $\tau$  in funzione di  $\Phi$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot dy = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot dx$$

e cioè

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot dx = 0$$

Il differenziale  $d\Phi$  della funzione  $\Phi(x,y)$  lungo il contorno della sezione deve quindi essere nullo; ciò significa che la funzione  $\Phi(x,y)$  è costante al contorno della sezione.

Ai fini pratici, il valore di  $\Phi$  sul contorno esterno può essere scelto pari a zero, in quanto gli sforzi tangenziali vengono calcolati, tramite le equazioni (4), effettuando la derivata della funzione  $\Phi$  e la presenza di un termine costante non influisce sul risultato finale.

Possiamo a questo punto scrivere l'equazione di equilibrio alla rotazione della sezione, imponendo che il momento torcente agente sulla sezione sia equivalente a quello generato dalle sollecitazioni tangenziali  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  (fig. 4). Il contributo al momento torcente fornito dagli sforzi tangenziali agenti sull'area infinitesima  $dA=dx dy$  vale:

$$dM_t = \tau_{yz} \cdot dx dy \cdot x - \tau_{xz} \cdot dx dy \cdot y$$

Il momento torcente complessivo è pertanto esprimibile come

$$M_t = \int_A dM_t = \int_A (\tau_{yz} \cdot x - \tau_{xz} \cdot y) dx dy$$

Sostituendo le espressioni di  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  (equazioni (4)), dopo alcuni passaggi si ottiene

$$M_t = 2 \int_A \Phi dA = 2V_t$$

dove  $V_t$  è il volume sotteso dalla superficie rappresentata dalla funzione di sforzo  $\Phi(x,y)$ .

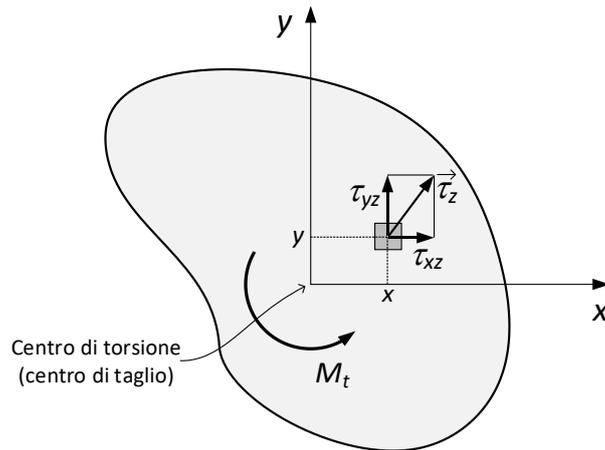


Fig. 4: Sforzi tangenziali nella sezione della trave

Possiamo quindi riassumere nei seguenti passi la procedura per lo studio della torsione elastica in travi con sezione generica:

- 1) Risolvere l'equazione differenziale  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -2G\bar{\vartheta}$  con le condizioni  $\Phi=0$  sul contorno della sezione, per ricavare l'equazione della funzione di sforzo  $\Phi(x,y)$ .
- 2) Nota la funzione  $\Phi(x,y)$ , ricavare la relazione tra  $M_t$  e  $\bar{\vartheta}$  dall'equazione  $M_t = 2 \int_A \Phi dA$
- 3) Ricavare gli sforzi tangenziali  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  dalle relazioni  $\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  e  $\tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$
- 4) Ricavare (se richiesto)  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  dalle relazioni  $\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$  e  $\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$

E' utile osservare come il problema descritto al passo 1 (ricerca della funzione  $\Phi(x,y)$  che soddisfa l'equazione (5) con la condizioni al contorno  $\Phi=0$ ) sia identico, dal punto di vista matematico, a quello che permette di ottenere la configurazione di una membrana elastica sottile appoggiata al contorno della sezione e posta in tensione con una pressione interna uniforme (Analogia della membrana).

La funzione  $\Phi(x,y)$  può pertanto essere individuata sperimentalmente, utilizzando acqua saponata o membrane perfettamente flessibili tese su di un foro avente la stessa forma del contorno della sezione ed applicando una pressione interna.

L'analogia della membrana aiuta inoltre a visualizzare, almeno in maniera qualitativa, la forma della possibile funzione di sforzo  $\Phi(x,y)$  del problema della torsione, anche in sezioni di forma non regolare.

## ESEMPI APPLICATIVI

### 1. TRAVE A SEZIONE CIRCOLARE

Scegliendo l'origine del sistema di riferimento  $x$ - $y$  coincidente con il centro della sezione (fig. 5a), il contorno della sezione ha equazione  $x^2 + y^2 = a^2$ , dove  $a$  è il raggio della sezione circolare.

#### 1. Determinazione della funzione di sforzo $\Phi$

Possiamo scegliere la seguente funzione di sforzo  $\Phi$ , che soddisfa la condizione  $\Phi=0$  al contorno della sezione (fig. 5b):

$$\Phi = C \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 \right)$$

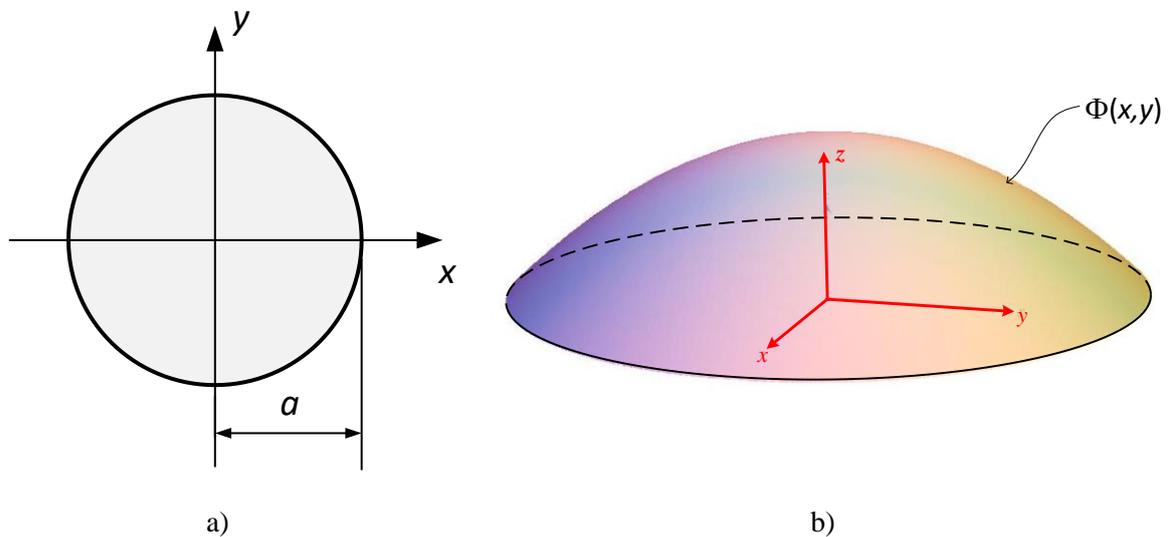


Fig. 5: Sezione circolare (a) e funzione di sforzo  $\Phi(x,y)$  (b)

La funzione di sforzo  $\Phi(x,y)$  è definita a meno di una costante  $C$ , il cui valore deve essere tale che la funzione  $\Phi$  soddisfi l'equazione differenziale  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -2G\bar{\vartheta}$ .

Per determinare la costante  $C$ , sostituiamo quindi l'espressione di  $\Phi$  nell'equazione differenziale (5); si ottiene

$$C \left( \frac{2}{a^2} + \frac{2}{a^2} \right) = -2G\bar{\vartheta}$$

da cui

$$C = -\frac{1}{2} a^2 G \bar{\vartheta}$$

La funzione di sforzo  $\Phi$  è quindi

$$\Phi = -\frac{1}{2}a^2 G \bar{\vartheta} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 \right)$$

## 2. Determinazione della relazione tra $M_t$ e $\bar{\vartheta}$

Sostituiamo l'espressione di  $\Phi(x, y)$  nell'equazione  $M_t = 2 \int_A \Phi dA$ :

$$\begin{aligned} M_t &= 2 \int_A -\frac{1}{2} a^2 G \bar{\vartheta} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 \right) dA = -a^2 G \bar{\vartheta} \int_A \left( \frac{x^2 + y^2}{a^2} - 1 \right) dA = \\ &= -a^2 G \bar{\vartheta} \int_A \left( \frac{r^2}{a^2} - 1 \right) dA = -a^2 G \bar{\vartheta} \left( \frac{1}{a^2} \int_A r^2 dA - A \right) = -a^2 G \bar{\vartheta} \left( \frac{J_p}{a^2} - A \right) \end{aligned}$$

dove

$$J_p = \int_A r^2 dA = \frac{\pi \cdot a^4}{2}$$

è il momento d'inerzia polare della sezione, e

$$A = \int_A dA = \pi \cdot a^2$$

è l'area della sezione.

Si ha quindi

$$M_t = -G \bar{\vartheta} \left( \frac{\pi \cdot a^4}{2} - \pi \cdot a^4 \right) = -G \bar{\vartheta} \left( -\frac{\pi \cdot a^4}{2} \right) = G \bar{\vartheta} J_p$$

e

$$\bar{\vartheta} = \frac{M_t}{G J_p}$$

## 3. Determinazione degli sforzi tangenziali $\tau_{xz}$ e $\tau_{yz}$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{1}{2} a^2 G \bar{\vartheta} \left( \frac{2y}{a^2} \right) = -G \bar{\vartheta} y$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{2} a^2 G \bar{\vartheta} \left( \frac{2x}{a^2} \right) = G \bar{\vartheta} x$$

Se calcoliamo ad esempio lo sforzo tangenziale sul contorno della sezione per  $x = a$  ed  $y = 0$ , otteniamo

$$\tau_{yz} = G \bar{\vartheta} a = \frac{M_t}{J_p} a$$

## 2. TRAVE A SEZIONE ELLITTICA

Scegliendo l'origine del sistema di riferimento  $x$ - $y$  coincidente con il centro dell'ellisse (fig. 6a), il contorno della sezione ha equazione  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , dove  $a$  e  $b$  sono i semiassi dell'ellisse.

### 1. Determinazione della funzione di sforzo $\Phi$

Possiamo scegliere la seguente funzione di sforzo  $\Phi$ , che soddisfa la condizione  $\Phi=0$  al contorno della sezione (fig. 6b):

$$\Phi = C \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

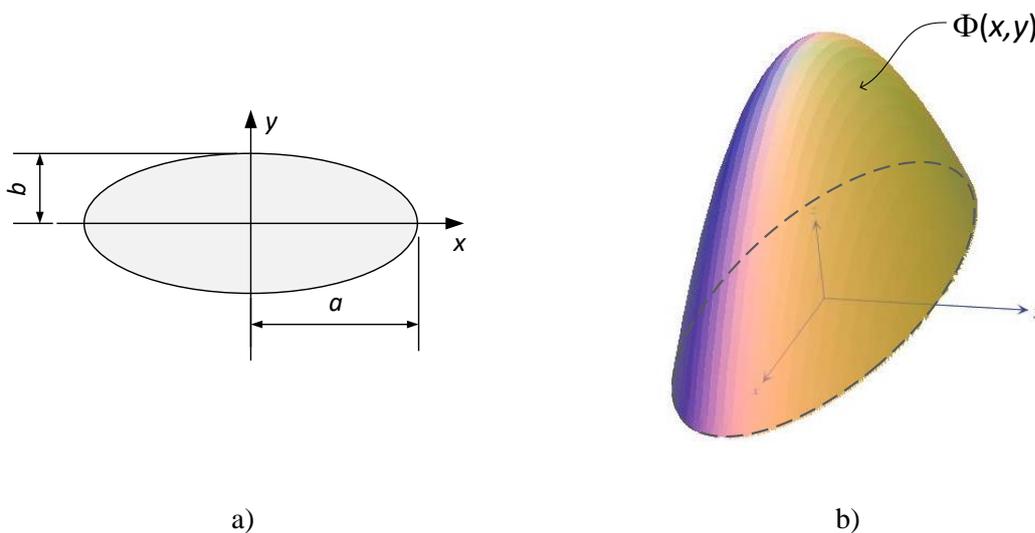


Fig. 6: Sezione ellittica (a) e funzione di sforzo  $\Phi(x,y)$  (b)

La funzione di sforzo  $\Phi(x, y)$  è definita a meno di una costante  $C$ , il cui valore deve essere tale che la funzione  $\Phi$  soddisfi l'equazione differenziale  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -2G\bar{\vartheta}$

Per determinare la costante  $C$ , sostituiamo l'espressione di  $\Phi$  nell'equazione differenziale (5); si ottiene

$$2 \left( \frac{C}{a^2} + \frac{C}{b^2} \right) = -2G\bar{\vartheta}$$

da cui

$$C = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G\bar{\vartheta}$$

La funzione di sforzo  $\Phi$  è quindi

$$\Phi = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G \bar{\vartheta} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

## 2. Determinazione della relazione tra $M_t$ e $\bar{\vartheta}$

Sostituiamo l'espressione di  $\Phi(x, y)$  nell'equazione  $M_t = 2 \int_A \Phi dA$ :

$$M_t = 2 \int_A -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G \bar{\vartheta} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) dA = \dots = \frac{\pi \cdot a^3 b^3}{a^2 + b^2} \cdot G \bar{\vartheta}$$

Si ha quindi

$$\bar{\vartheta} = \frac{M_t}{G} \frac{a^2 + b^2}{\pi \cdot a^3 b^3}$$

## 3. Determinazione degli sforzi tangenziali $\tau_{xz}$ e $\tau_{yz}$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G \bar{\vartheta} \left( \frac{2y}{b^2} \right)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G \bar{\vartheta} \left( \frac{2x}{a^2} \right)$$

Lo sforzo massimo si ha al contorno della sezione sul semiasse minore  $b$  (fig. 6a)

$$\tau_{max} = \tau_{xz}(y = b) = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G \bar{\vartheta} \left( \frac{2b}{b^2} \right) = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot \frac{a^2 + b^2}{\pi \cdot a^3 b^3} \cdot \left( \frac{2}{b} \right) = \frac{2M_t}{\pi \cdot a b^2}$$

### 3. TRAVE A SEZIONE RETTANGOLARE A PARETE SOTTILE

Supponiamo (sezione a parete sottile) che la lunghezza  $h$  della sezione rettangolare sia molto maggiore dello spessore  $b$  (fig. 7a). Scegliamo l'origine del sistema di riferimento  $x$ - $y$  coincidente con il baricentro della sezione.

#### 1. Determinazione della funzione di sforzo $\Phi$

Possiamo scegliere la seguente funzione di sforzo  $\Phi$ , che soddisfa la condizione  $\Phi=0$  al contorno della sezione sui lati di lunghezza  $h$  (anche se non sui lati corti di lunghezza  $b$ , fig. 7b):

$$\Phi = C \left( \frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} - 1 \right)$$

Poiché la lunghezza  $b$  è molto più piccola della lunghezza  $h$ , l'errore legato al non rispetto della condizione al contorno lungo i lati corti può essere ritenuto trascurabile.

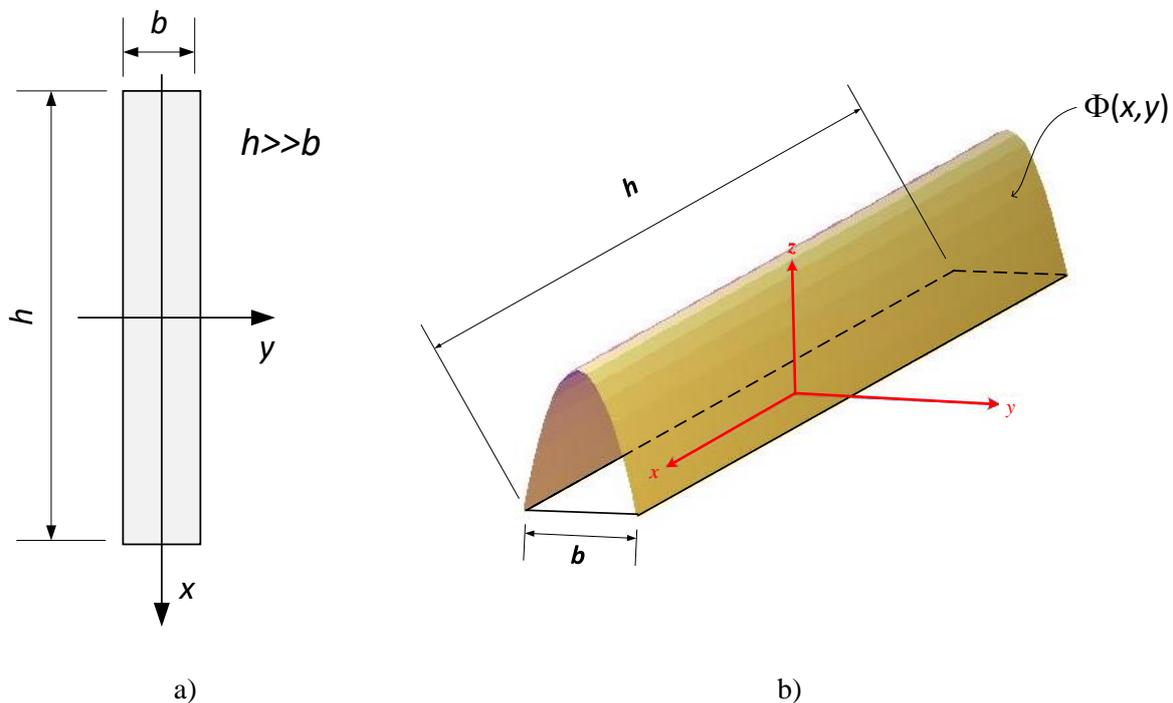


Fig. 7: Sezione rettangolare sottile (a) e funzione di sforzo  $\Phi(x, y)$  (b)

La funzione di sforzo  $\Phi(x, y)$  è definita a meno di una costante  $C$ , il cui valore deve essere tale che la funzione  $\Phi$  soddisfi l'equazione differenziale  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -2G\bar{\vartheta}$

Per determinare la costante  $C$ , sostituiamo quindi l'espressione di  $\Phi$  nell'equazione differenziale (5); si ottiene

$$2 \frac{C}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} = -2G\bar{\vartheta}$$

da cui

$$C = -\frac{b^2}{4}G\bar{\vartheta}$$

La funzione di sforzo  $\Phi$  è quindi

$$\Phi = -\frac{b^2}{4}G\bar{\vartheta} \left( \frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} - 1 \right)$$

### 2 Determinazione della relazione tra $M_t$ e $\bar{\vartheta}$

Sostituiamo l'espressione di  $\Phi(x, y)$  nell'equazione  $M_t = 2 \int_A \Phi dA$ :

$$\begin{aligned} M_t &= 2 \int_A -\frac{b^2}{4}G\bar{\vartheta} \left( \frac{y^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} - 1 \right) dA = -\frac{b^2}{2}G\bar{\vartheta} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \frac{4y^2}{b^2} - 1 \right) h dy = \\ &= -\frac{b^2}{2}G\bar{\vartheta}h \left\{ \frac{4}{b^2} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} - \left[ y \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \right\} = -\frac{b^2}{2}G\bar{\vartheta}h \left\{ \frac{4}{3b^2} \left( \frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8} \right) - \left( \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \right) \right\} = -\frac{b^2}{2}G\bar{\vartheta}h \left\{ \frac{b}{3} - b \right\} \\ M_t &= \frac{b^3}{3}G\bar{\vartheta}h \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\bar{\vartheta} = \frac{3M_t}{Ghb^3}$$

### 3 Determinazione degli sforzi tangenziali $\tau_{xz}$ e $\tau_{yz}$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{b^2}{4}G\bar{\vartheta} \cdot \frac{2y}{\frac{b}{2}} = -2G\bar{\vartheta}y = -\frac{6M_t}{hb^3}y$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

Lo sforzo massimo  $\tau$  si ha quindi sui lati lunghi del rettangolo ( $y = \pm \frac{b}{2}$ ) e vale

$$\tau_{max} = \frac{3M_t}{hb^2} = Gb\bar{\vartheta} \quad (6)$$

La distribuzione degli sforzi  $\tau$  è illustrata in fig. 8

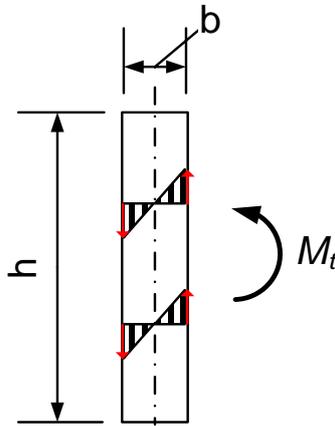


Fig. 8 : Distribuzione degli sforzi  $\tau$  in una sezione rettangolare sottile

Le relazioni ottenute possono essere utilizzate anche in sezioni a parete sottile con linea d'asse non rettilinea (ad esempio circolare, Fig. 9a ) o composite (cioè ottenute come somma di diverse parti, vedi Fig. 9b) con spessore  $b$  costante. La lunghezza  $h$  da considerare sarà in tal caso la somma delle lunghezze delle singole parti.

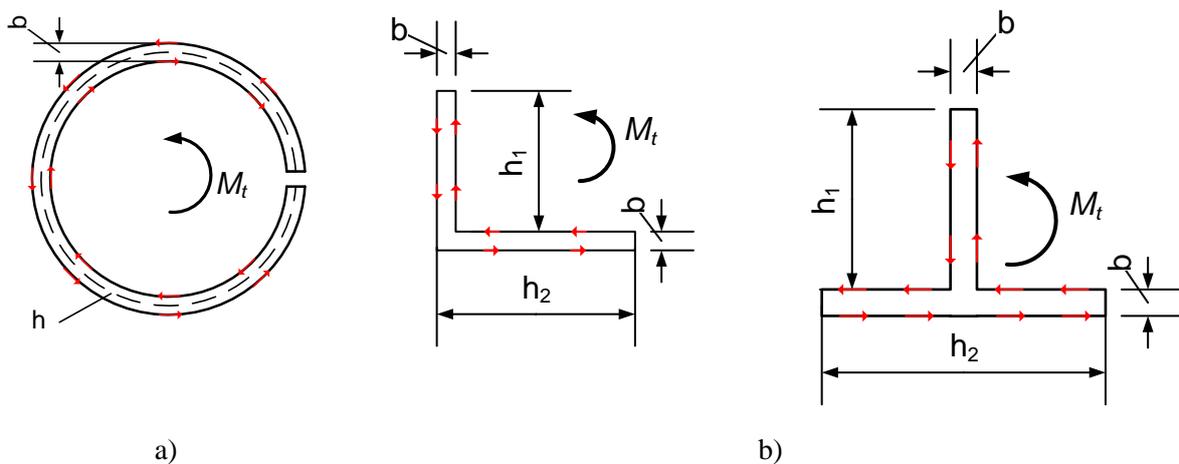


Fig. 9: Sezioni a pareti sottile con linea media circolare (a) o spezzata (b)

Nel caso che le diverse parti che compongono la sezione abbiano diverso spessore, possiamo considerare il momento come somma dei momenti torcenti sostenuti da ogni singola parte della sezione. Per ogni singola parte  $i$  della sezione la sollecitazione tangenziale al contorno  $\tau_{c_i}$  si può cioè scrivere:

$$\tau_{c_i} = \frac{3M_{t_i}}{h_i b_i^2}$$

e quindi

$$M_{t_i} = \frac{1}{3} \tau_{c_i} h_i b_i^2$$

Il momento torcente agente sulla sezione sarà quindi

$$M_t = \sum_i M_{t_i} = \frac{1}{3} (\tau_{c_1} h_1 b_1^2 + \tau_{c_2} h_2 b_2^2 + \dots + \tau_{c_n} h_n b_n^2) \quad (7)$$

L'angolo di rotazione  $\bar{\vartheta}$  deve essere uguale per ogni parte della sezione, ed essendo (vedi equazione (6))  $\bar{\vartheta} = \frac{\tau_c}{Gb}$ , possiamo scrivere

$$\bar{\vartheta} = \frac{\tau_{c_1}}{Gb_1} = \frac{\tau_{c_2}}{Gb_2} = \dots = \frac{\tau_{c_n}}{Gb_n} = \text{cost}$$

Lo sforzo tangenziale massimo si avrà pertanto sulla porzione della sezione avente la larghezza  $b_i$  massima. Supponendo ad esempio di considerare una sezione composta da tre parti con spessore massimo  $b_3$  (fig. 10), potremo scrivere:

$$\frac{\tau_{c_1}}{b_1} = \frac{\tau_{c_2}}{b_2} = \frac{\tau_{max}}{b_3}$$

da cui

$$\tau_{c_1} = b_1 \frac{\tau_{max}}{b_3}$$

$$\tau_{c_2} = b_2 \frac{\tau_{max}}{b_3}$$

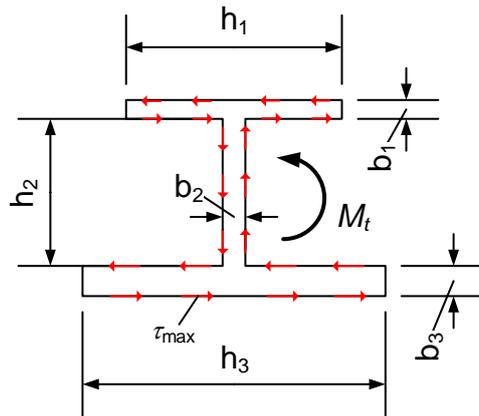


Fig. 10: Sezione a pareti sottili composta da parti di spessore diverso.

Ricordando l'equazione (7) avremo quindi:

$$M_t = \frac{1}{3} \left( b_1 \frac{\tau_{max}}{b_3} h_1 b_1^2 + b_2 \frac{\tau_{max}}{b_3} h_2 b_2^2 + \dots + \frac{b_3}{b_3} \tau_{max} h_3 b_3^2 \right)$$

da cui, mettendo in evidenza  $\tau_{max}$ ,

$$\tau_{max} = \frac{3M_t \cdot b_3}{h_1 b_1^3 + h_2 b_2^3 + h_3 b_3^3}$$

L'angolo di torsione della sezione può infine essere ottenuto dall'equazione (6):

$$\bar{\vartheta} = \frac{\tau_{max}}{G \cdot b_3}$$

# TORSIONE DI TRAVI A SEZIONE CHIUSA A PARETE SOTTILE

## TEORIA DI BREDT

Consideriamo una trave con una sezione trasversale di forma generica e soggetta alle estremità a due coppie torcenti  $M_t$  opposte (fig. 11).

Gli sforzi tangenziali generati dal momento torcente  $M_t$  lungo i contorni interno ed esterno della sezione devono necessariamente essere diretti lungo la tangente ai contorni stessi. Poiché la parete è sottile, possiamo inoltre considerare gli sforzi costanti lungo lo spessore e diretti tangenzialmente alla linea media della sezione (linea media tra i due contorni interno ed esterno).

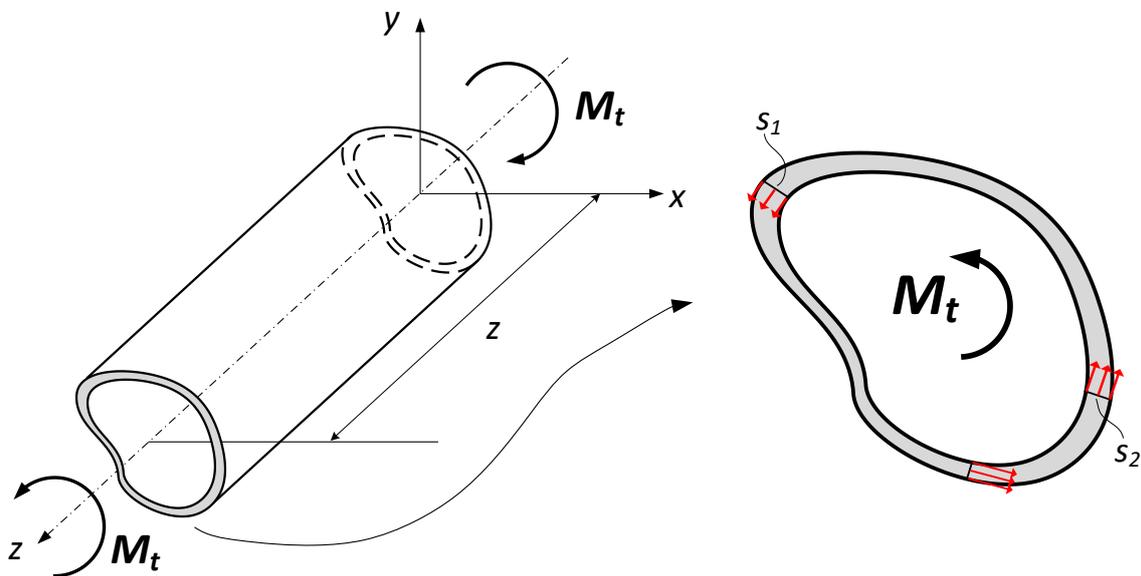


Fig. 11: Trave con sezione chiusa a parete sottile soggetta a momento torcente.

Effettuiamo ora due sezioni con due piani paralleli all'asse  $z$  della trave in corrispondenza di due spessori generici  $s_1$  e  $s_2$  e successivamente estraiamo una porzione longitudinale della trave di lunghezza unitaria (fig. 11); possiamo a questo punto mettere in evidenza gli sforzi tangenziali  $\tau_1$  e  $\tau_2$  agenti sulle aree della trave appartenenti ai piani della sezioni effettuate, come illustrato in fig. 12.

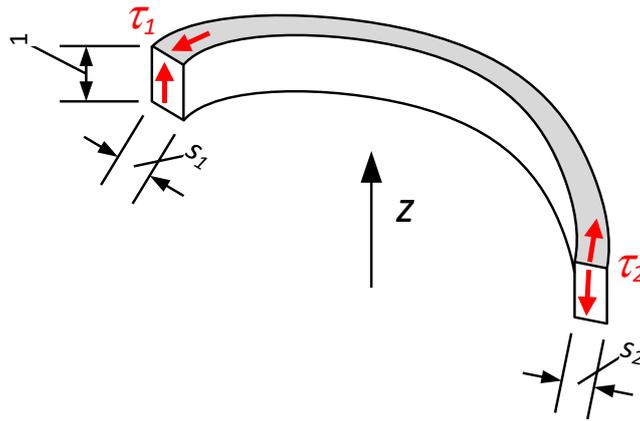


Fig. 12: Equilibrio in direzione  $z$  di una porzione di trave di lunghezza unitaria.

Possiamo a questo punto scrivere l'equazione di equilibrio in direzione  $z$  della porzione di trave illustrata in fig. 12:

$$\tau_1 \cdot s_1 \cdot 1 = \tau_2 \cdot s_2 \cdot 1$$

Poiché possiamo scegliere a piacere i piani paralleli all'asse  $z$  con i quali sezionare la trave, risulta che  $\tau \cdot s = \text{cost}$  lungo la linea media della sezione.

Scriviamo ora l'equivalenza del momento torcente  $M_t$  applicato con quello prodotto dagli sforzi tangenziali (fig. 13); il momento  $M_t$  dovrà essere uguale all'integrale, esteso alla linea media della sezione, dei momenti infinitesimi generati dalle forze  $\tau \cdot s \cdot dl$  rispetto ad un punto qualunque  $O$ . Il braccio  $b$  delle forze infinitesime  $\tau \cdot s \cdot dl$  rispetto al punto  $O$  è mostrato in fig. 13

$$M_t = \oint_l (\tau \cdot s \cdot dl) \cdot b$$

Essendo il prodotto  $t \cdot s$  costante, l'integrale può essere scritto nella forma

$$M_t = \tau \cdot s \oint_l b \cdot dl = \tau \cdot s \cdot 2A_m$$

dove (vedi fig. 13)  $\oint_l b \cdot dl$  rappresenta il doppio dell'area  $A_m$  racchiusa dalla linea media dei due contorni.

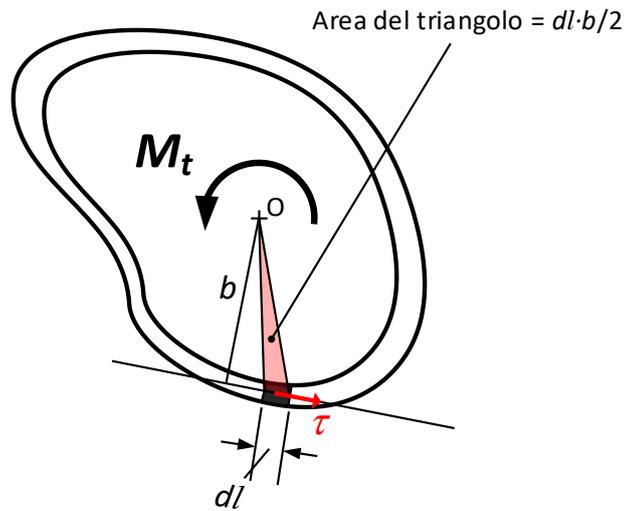


Fig. 13: Calcolo del momento torcente generato dagli sforzi tangenziali  $\tau$

Sarà quindi

$$\tau = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_t}{s \cdot A_m}$$

e, di conseguenza, lo sforzo massimo  $\tau_{max}$  si avrà in corrispondenza dello spessore minimo della sezione:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_t}{s_{min} \cdot A_m}$$

Per ricavare il legame tra il momento torcente  $M_t$  e l'angolo di torsione  $\bar{\vartheta}$  possiamo ricorrere ad un approccio energetico. Consideriamo un elemento di trave di lunghezza unitaria soggetta al momento torcente  $M_t$ , che genera un angolo di torsione  $\bar{\vartheta}$  (fig. 14a). Il lavoro compiuto dal momento torcente applicato sarà pertanto  $\frac{1}{2} M_t \bar{\vartheta}$ .

L'energia elastica  $U$  accumulata dal materiale può essere calcolata come l'integrale, esteso al volume  $V$  del materiale, dell'energia elastica per unità di volume  $\frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G}$ :

$$U = \int_V \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} \cdot dV = \frac{1}{2G} \oint_l \tau^2 \cdot (s \cdot dl \cdot 1)$$

dove  $dV = s \cdot dl \cdot 1$  è il volume infinitesimo indicato in fig. 14b. L'energia elastica  $U$  può essere quindi espressa come

$$U = \frac{1}{2G} \oint_l \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{M_t}{s \cdot A_m} \right)^2 \cdot s \cdot dl = \frac{1}{2G} \cdot \frac{M_t^2}{4 \cdot A_m^2} \oint_l \frac{dl}{s}$$

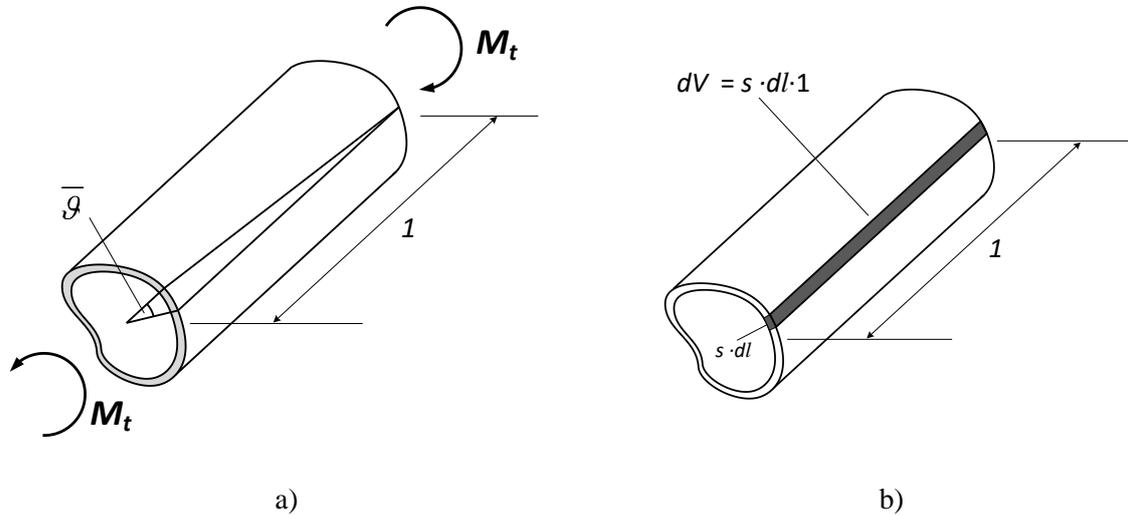


Fig. 14: Angolo di torsione (a) e volume infinitesimo  $dV$  utilizzato per il calcolo dell'angolo di torsione  $\bar{\vartheta}$  (b)

Uguagliando il lavoro compiuto all'energia elastica accumulata:

$$\frac{1}{2} M_t \bar{\vartheta} = \frac{1}{2G} \cdot \frac{M_t^2}{4 \cdot A_m^2} \oint_l \frac{dl}{s}$$

si ottiene infine

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{G} \cdot \frac{M_t}{4 \cdot A_m^2} \cdot \oint_l \frac{dl}{s}$$

Se lo spessore della parete è costante,  $s$  può essere portato fuori dall'integrale, ottenendo così

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{G} \cdot \frac{M_t}{4 \cdot A_m^2} \cdot \frac{1}{s} \oint_l dl = \frac{1}{4G} \cdot \frac{M_t \cdot l}{A_m^2 \cdot s}$$