

Disce

TEORIA DEI GRAFI

Alessandra Fanni

GRAFO

La topologia di un circuito può convenientemente essere descritta dal suo *GRAFO*. Si vedrà come, utilizzando il grafo del circuito (la cui costruzione verrà dettagliata nel seguito) sarà possibile scrivere le "equazioni topologiche", cioè quelle equazioni che esprimono il collegamento dei vari componenti nel circuito, senza entrare nel merito della natura di tali componenti.

La teoria dei grafi diventa *essenziale* quando si devono analizzare circuiti molto complessi.

Un grafo $G(N,L)$ è un elemento algebrico costituito da due tipi di elementi:

i NODI (o punti, o vertici), costituiti da N elementi;

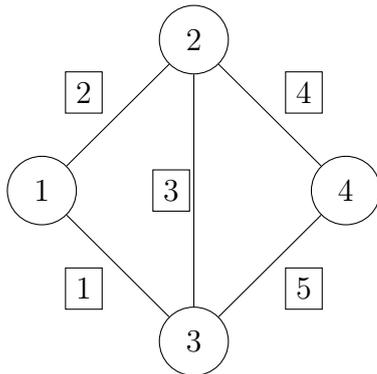
I nodi vengono così rappresentati:

1 o nodo i-esimo

i LATI (o archi o segmenti), aventi L elementi;

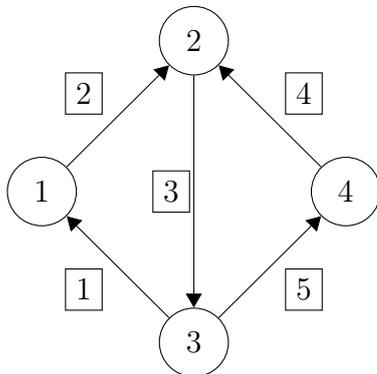
Gli archi vengono così rappresentati:

j arco o lato j-esimo



$$G = (N = 4, L = 5)$$

fig.1 Esempio di grafo



GRAFO ORIENTATO

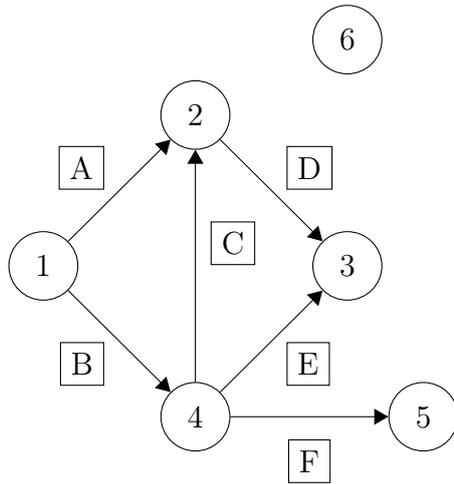
Se i *lati* sono contrassegnati da delle *frecce* si parla di grafo *orientato*.

fig.2 esempio di grafo orientato

ORDINE DI UN NODO

Un nodo è caratterizzato dal suo ordine, che è pari al numero di lati che terminano sul nodo stesso.

Es.



Il nodo 5 è di ordine 1 e si chiama *nodo di estremità* o *estremante*.
I nodi 1 e 3 sono di ordine 2.
Il nodo 4 è di ordine 4.
Il nodo 6 è di ordine zero e si definisce *nodo isolato*.

fig.3 esempio di grafo orientato

Il grafo si considera *immutato* anche se soggetto a variazioni delle forme. Per esempio, il grafo della fig.4 è immutato rispetto al grafo di fig.3.

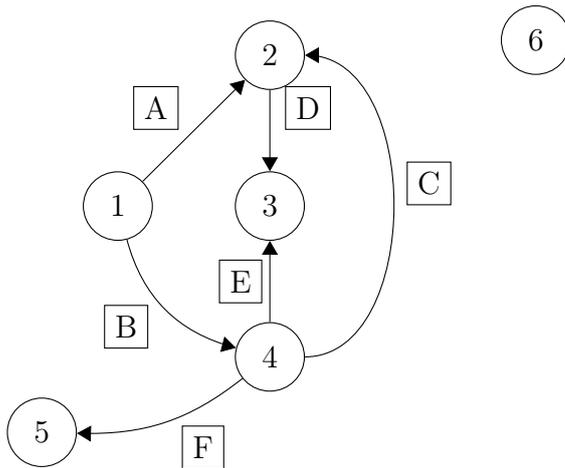


fig.4 grafo immutato rispetto alla fig.3

GRAFI E SOTTOGRAFI

Da ciascun grafo possono essere estratti uno o più *sottografi*, che contengono solo un numero limitato di elementi (nodi e lati) del grafo di origine. Se spezziamo il grafo in due otteniamo un sottografo e il suo *grafo complementare*.

Ad esempio, riferendoci al grafo di *fig.3*, possiamo selezionare un sottografo (*fig.5-a*) cui è associato il suo grafo complementare (*fig.5-b*).

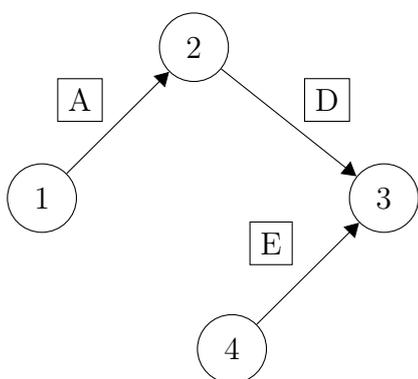


fig.5-a sottografo

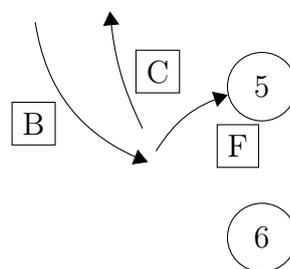


fig.5-b grafo complementare

Le possibili scomposizioni in sottografo e grafo complementare sono in generale molte. Tra tutti i sottografi di un grafo, alcuni rivestono particolare importanza.

PERCORSO

È un sottografo in cui tutti i nodi sono di ordine 2, tranne gli estremi che hanno ordine 1. Nel percorso sono presenti *tutti* i nodi collegati.

In *fig.6* è riportato un esempio di percorso estratto dal grafo di *fig.3*

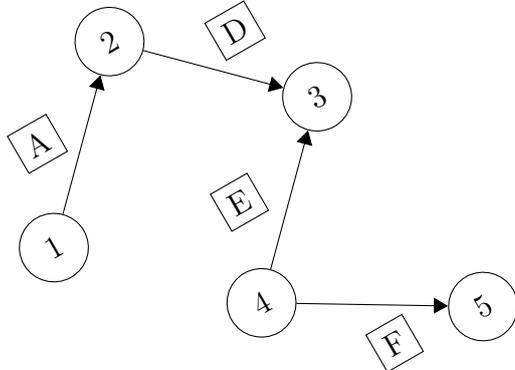


fig.6 Percorso sul grafo di *fig.3*

MAGLIA

È un sottografo in cui tutti i nodi hanno ordine 2; la maglia è dunque una *figura chiusa*. In *fig.7* è riportato un esempio di maglia estratta dal grafo di *fig.3*.

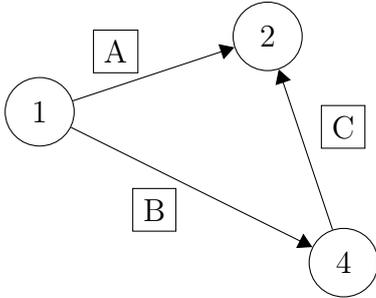


fig.7 Maglia estratta dal grafo di *fig.3*

GRAFO CONNESSO

È un grafo sul quale esiste *almeno* un percorso che unisce una qualunque coppia di nodi sul grafo. In un grafo connesso non vi possono quindi essere nodi isolati. Ad esempio, il grafo in *fig.3* non è connesso perché non esiste un percorso che connetta il nodo 6.

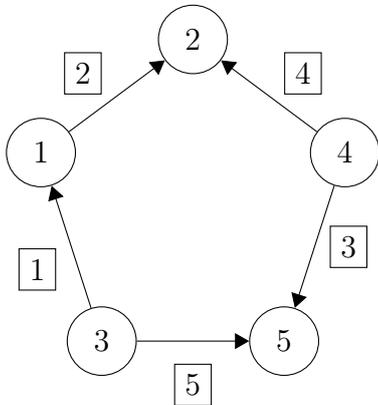


fig.8-a esempio di grafo connesso

Un grafo *non connesso* è anche un grafo che contiene due figure separate come in *fig.8-b*.

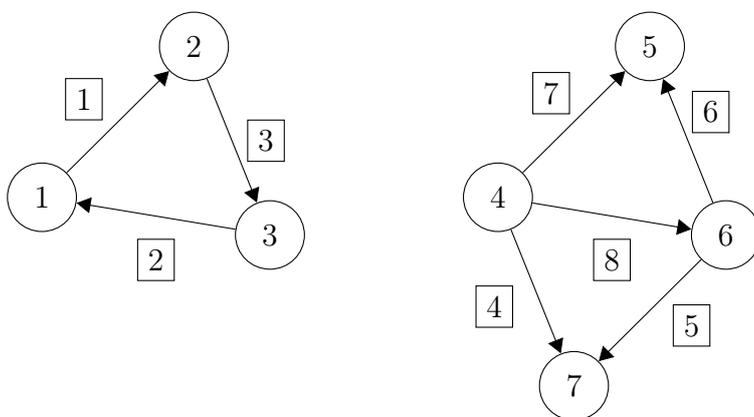
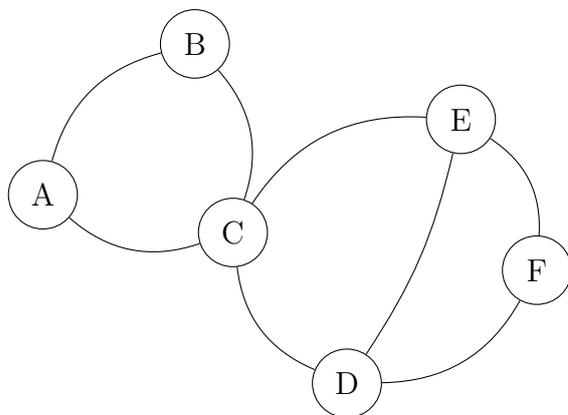


fig.8-b esempio di grafo non connesso

GRAFO INCERNIERATO

È un grafo nel quale, per passare da un insieme dato di nodi ad un altro, si deve passare necessariamente per uno stesso nodo. La *fig.9* è un esempio di grafo incernierato.



Se consideriamo i due insiemi di nodi a, b e d, e, f per passare da un insieme all'altro bisogna necessariamente passare il punto c ;

fig.9 grafo incernierato

ALBERO

È un sottografo che contiene tutti i nodi; i nodi sono collegati e *non* sono presenti maglie.

Poiché tutti i nodi sono collegati, l'albero conterrà $(N - 1)$ lati del grafo di origine. La scelta dell'albero non è univoca. In *fig.10-a* è riportato un grafo di esempio mentre in *fig.10-b* e *fig.10-c* sono rappresentati alcuni possibili alberi.

In un grafo con N nodi saranno presenti $N - 1$ lati di albero.

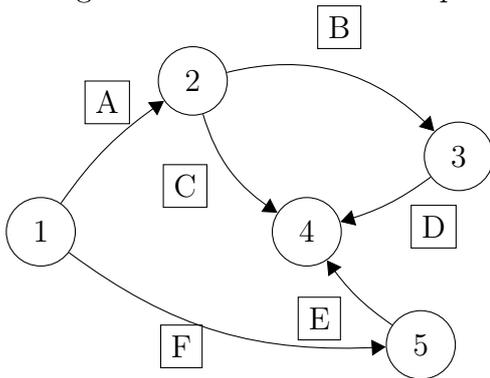


fig.10-a grafo di riferimento

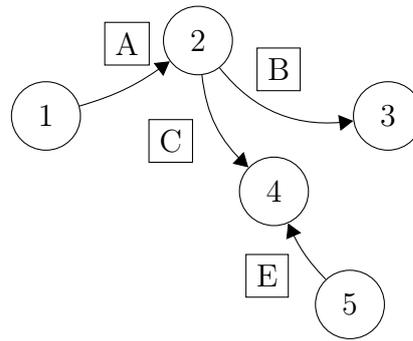


fig.10-b possibile albero

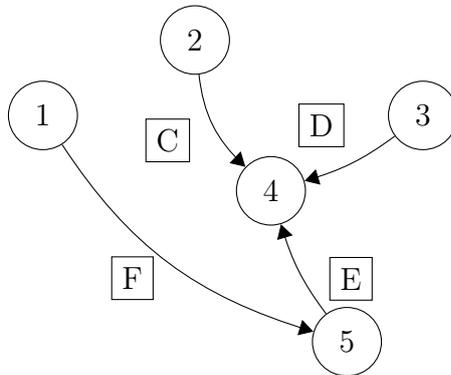


fig.10-c altro possibile albero

ALBERO A STELLA

È un albero in cui tutti gli $N - 1$ lati escono dallo stesso nodo. L'albero a stella è realizzabile solo se nel grafo esiste *almeno un nodo* di ordine $N - 1$. Il nodo comune è detto *nodo radice*.

Il grafo in *fig.10-a* non possiede un albero a stella; non esiste infatti un nodo di ordine $N - 1 = 4$. Nella *fig.11* è riportato un grafo che ammette almeno un albero a stella.

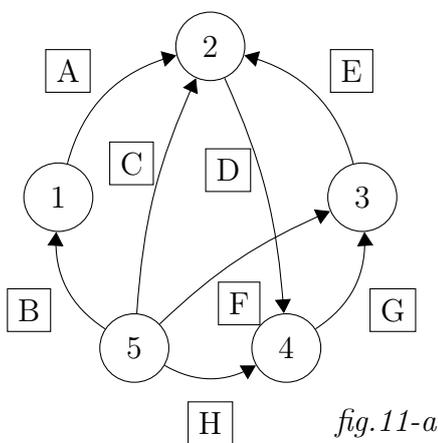
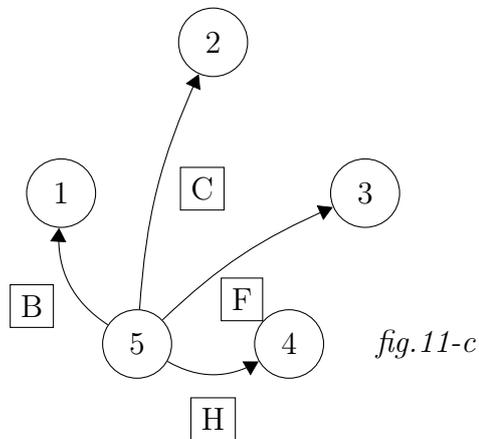
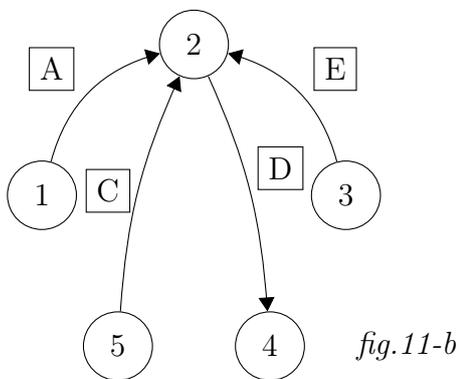


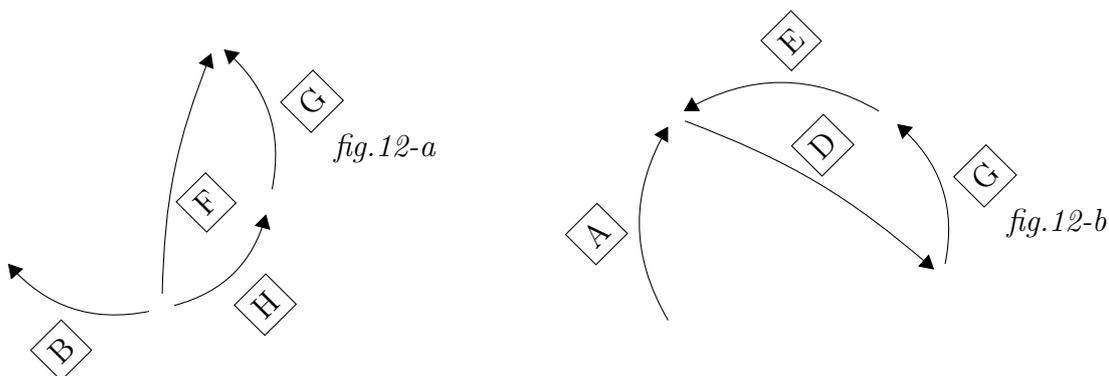
fig.11-a Grafo originario
fig.11-b Albero a stella
fig.11-c Variante di albero a stella



CO-ALBERO

È il *sottografo complementare* all'albero. Esso contiene $L - N + 1$ lati.

In *fig.12-a* è riportato il co-albero relativo all'albero in *fig.11-b*, mentre in *fig.12-b* è riportato il co-albero relativo alla *fig.11-c*.



Riassumendo, se ho un grafo $G(N, L)$ posso scegliere *arbitrariamente* un albero di N nodi e di $N - 1$ lati; resterà univocamente determinato il relativo co-albero (complementare all'albero) di $L - N + 1$ lati.

L'obiettivo è quello di utilizzare la teoria dei grafi per individuare:

I le *superfici chiuse* sul circuito a cui applicare la Legge di Kirchhoff alle *correnti*;

II Le *maglie* a cui applicare le Leggi di Kirchhoff alle *tensioni*;

ottenendo un sistema di L equazioni *linearmente indipendenti*.

Si avranno così le L equazioni "topologiche" del problema di analisi, che riguarda $2L$ incognite: tali incognite sono le L tensioni e le L correnti negli L lati del grafo.

Queste L equazioni topologiche, insieme alle L equazioni dei componenti costituiscono il sistema di equazioni, la cui risoluzione porta alla soluzione del problema di analisi.

Dimostreremo che è possibile costruire il cosiddetto "grafo del circuito", il quale contiene:

I L lati, tanti quante sono le tensioni (le correnti) incognite;

II N nodi, quanti sono i nodi del circuito.

GRAFO DEL COMPONENTE

Definiamo preliminarmente il grafo del componente, riferendoci ad un generico componente N-polare. Per un componente con n morsetti, il grafo del componente è un albero che ha come nodi i morsetti del componente, e come archi $n - 1$ lati che collegano uno dei nodi, assunto come riferimenti, agli altri $n - 1$ nodi. Si tratta quindi di un albero a stella, come mostrato in *fig.13*.

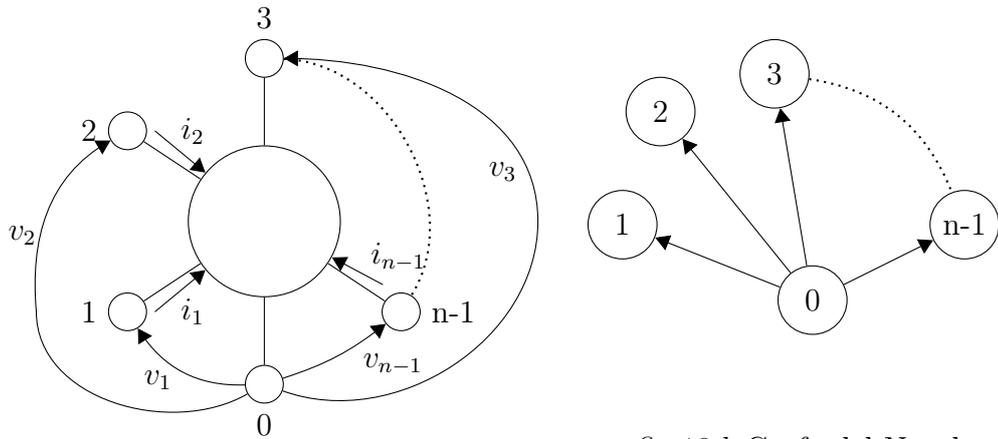


fig.13-a N-polo

fig.13-b Grafo del N-polo

Assumendo le variabili descrittive sul componente, il grafo sarà orientato nel verso delle tensioni. La scelta del grafo del componente non è univoca. Facendo riferimento alle variabili descrittive (tensioni e correnti, scelte con la *convenzione degli utilizzatori*) variando il morsetto di riferimento otteniamo un differente grafo del componente.

Particolarizzando per il bipolo si avranno i due possibili grafi di *fig.14*.

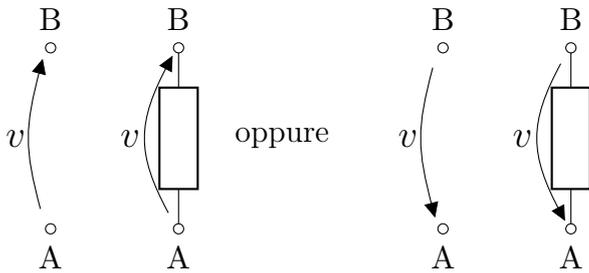
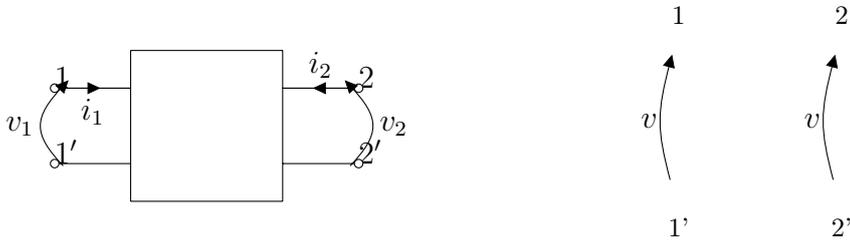


fig.14 Bipolo e possibili grafi

Particolarizzando per il doppio bipolo si avrà:



GRAFO DEL CIRCUITO

Se si sostituisce a ciascun componente in un circuito il grafo del componente si ottiene il grafo del circuito.

Nell'esempio di *fig.16* si riporta un circuito e uno tra i possibili grafi del circuito corrispondente.

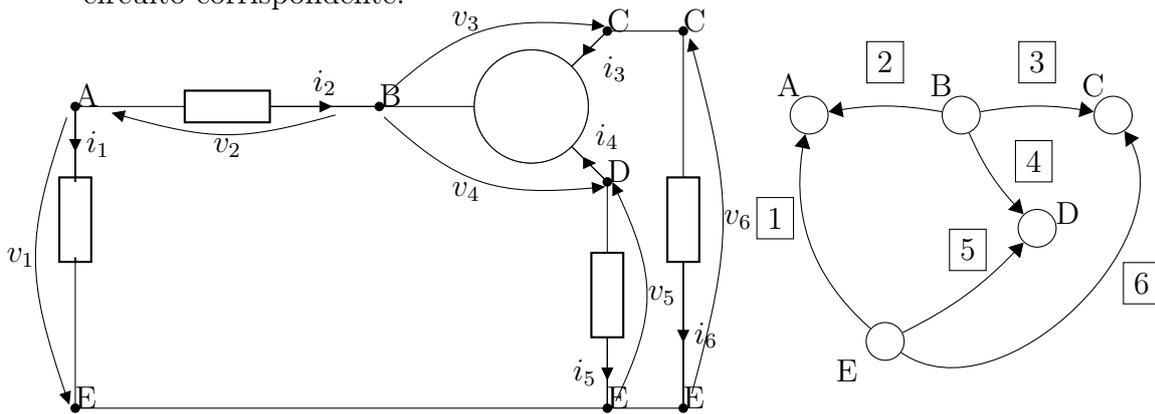


Fig.16-a Circuito Elettrico

Fig.16-b Grafo del Circuito

Il grafo contiene tutte le informazioni necessarie per scrivere le equazioni topologiche. Si procede individuando sul grafo del circuito un possibile albero, cui resta associato il corrispondente co-albero.

Indichiamo con un tratto continuo l'albero e con delle linee tratteggiate il co-albero. Per il circuito di *fig.16* una possibile scelta è riportata in *fig.17-a*.

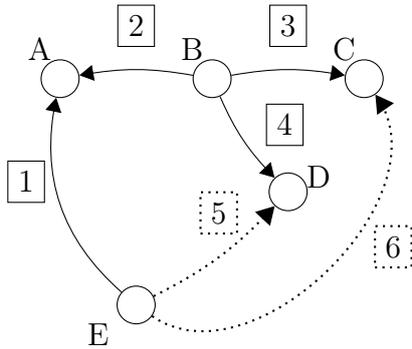


Fig.17-a Grafo del Circuito

Si definisce *co-ciclo* (o insieme di taglio) l'insieme dei lati del grafo tagliati da una qualunque superficie chiusa.

Tra tutti i possibili co-cicli, si definiscono *co-cicli fondamentali* l'insieme di lati ottenuti da superfici chiuse che tagliano un solo lato di albero (gli altri sono lati di co-albero).

Ci saranno quindi $N - 1$ co-cicli fondamentali, tanti quanti sono i lati dell'albero.

Per il grafo di *fig.17-b*, indichiamo con le *linee tratto-punto* le superfici chiuse che individuano i co-cicli fondamentali.

In *fig.17-b* sono presenti 4 co-cicli fondamentali:

1. {1, 5, 6}
2. {2, 5, 6}
3. {4, 5}
4. {3, 4}

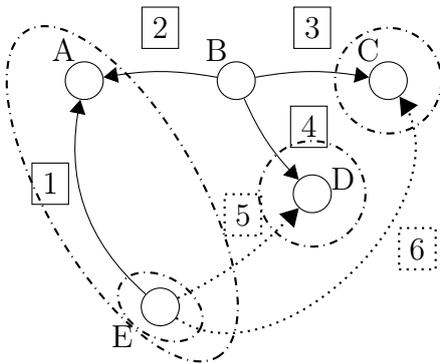


Fig.17-b Superfici chiuse e co-cicli fondamentali

Per ogni co-ciclo posso scrivere una equazione di equilibrio alle correnti

$$\sum_{k=0}^n i_k = 0$$

Se scriviamo le $N - 1$ equazioni di Kirchhoff alle correnti per i soli co-cicli fondamentali otterremo un sistema di $N - 1$ equazioni che saranno *sicuramente* linearmente indipendenti.

Ciascuna equazione conterrà infatti un'incognita corrente che non compare nelle altre (corrente nel generico ramo di albero). Per il grafo di *fig.17* il sistema delle $N - 1 = 4$ equazioni di equilibrio alle correnti (KLI Kirchhoff Law Current) sarà;

$$\begin{cases} i_1 + i_5 + i_6 = 0 \\ i_2 - i_5 - i_6 = 0 \\ i_4 + i_5 = 0 \\ i_3 + i_6 = 0 \end{cases}$$

Osservazione: per ogni co-ciclo prendo come corrente positiva quella concorde con la corrente di albero. Quindi se la corrente nel lato di albero entra nella superficie chiusa prenderemo come positive tutte le correnti entranti e negative tutte quelle uscenti e viceversa.

Osservazione: per i versi delle correnti possiamo fare riferimento ai versi dei lati del grafo, anche se i lati del grafo sono orientati secondo il verso delle tensioni.

Tuttavia, poiché abbiamo assunto per ciascun componente la convenzione degli utilizzatori, le correnti avrebbero il verso opposto su tutti lati del grafo. Le equazioni di equilibrio impongono che la somma algebrica delle correnti entranti e uscenti dalla superficie chiusa sia nulla; l'eguaglianza a zero ci consente di cambiare tutti i segni delle correnti nell'equazione senza alterare l'equazione stessa.

Qualunque altro co-ciclo (non fondamentale) considerassi otterrei una combinazione lineare delle $N - 1$ equazioni relative ai co-cicli fondamentali, che sono le condizioni necessarie e sufficienti per esprimere i vincoli che sussistono tra le correnti del grafo(e quindi del circuito).

È possibile analizzare le $N - 1$ equazioni relative ai co-cicli fondamentali utilizzando una matrice detta *matrice di co-ciclo*. Tale matrice avrà:

1. tante righe quanti sono i lati di albero;
2. tante colonne quanti sono i lati del grafo.

Gli indici di riga saranno i primi $N - 1$ indici di colonna; le restanti colonne si riferiranno ai lati di albero.

Ogni riga rappresenta un co-ciclo fondamentale e conterrà:

1. +1 per tutti i lati nel co-ciclo "*concordi*" con il lato di albero;
2. -1 se il lato è *discorde* (nel senso definito precedentemente);
3. 0 se il lato *non appartiene* al co-ciclo.

Per il grafo di *fig.17* la matrice di co-ciclo è la seguente riportata in tabella 1:

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	1	1
2	0	1	0	0	-1	-1
3	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	1	0

Tabella 1 - Matrice di co-ciclo per il grafo di *fig.17*

La matrice ottenuta è formata da due parti; la prima parte è una matrice *identità* che indichiamo con $[I]$.

Se indichiamo con $[C]$ la matrice di co-ciclo, essa può essere rappresentata simbolicamente come:

$$[C] = \left[\underbrace{I}_{(N-1)} : \underbrace{T}_{(L-N+1)} \right] (N-1)$$

Se indico con $i^T = [i_1, i_2, \dots, i_L]^T$ il vettore trasposto delle correnti di lato, ordinate come nella matrice $[C]$, le $N - 1$ equazioni di Kirchhoff alle correnti possono essere scritte come:

$$[C]i = 0$$

Una scelta differente dell'albero avrebbe portato a equazioni diverse ma con lo stesso contenuto informativo e lo stesso numero di equazioni indipendenti. *Osservazione:* Se si scegliesse l'albero a stella (se esiste), le superfici chiuse che generano i co-cicli fondamentali sarebbero le superfici chiuse che abbracciano $N - 1$ nodi del grafo (equazioni di equilibrio ai nodi).

L' N -sima equazione sarebbe linearmente dipendente dalle altre $N - 1$ equazioni.

Se all'albero selezionato aggiungo un lato di co-albero ottengo una maglia (percorso chiuso). Ad ogni lato di co-albero corrisponde dunque una maglia detta *maglia fondamentale*, che contiene un solo lato di co-albero (gli altri sono lati di albero).

Le maglie fondamentali sono $L - N + 1$.

Nel grafo di *fig.17* saranno due le maglie fondamentali formate dai lati, come si vede in *fig.18*.

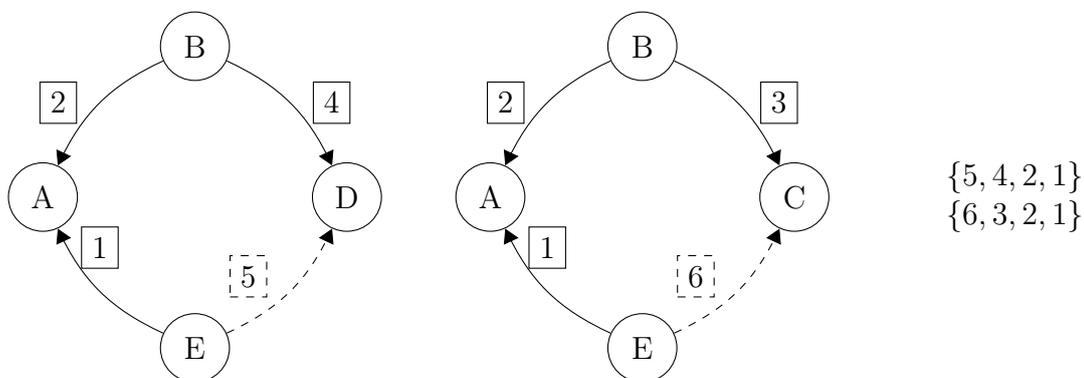


Fig.18 Maglie fondamentali per il grafo di *fig.17*

Alle maglie fondamentali è possibile applicare la legge di Kirchhoff alle tensioni, ottenendo un sistema di equazioni linearmente indipendenti nelle variabili tensioni di lato.

La struttura delle equazioni prevede di assumere come verso di percorrenza della maglia quello indicato dal verso del lato di co-albero. Ciascuna incognita conterrà un'incognita tensione nel lato di co-albero che non compare nelle altre.

Per il grafo di *fig.17* le equazioni di maglia sono (KLV):

$$\begin{cases} v_5 - v_4 + v_2 - v_1 = 0 \\ v_6 - v_3 + v_2 - v_1 = 0 \end{cases}$$

È possibile esplicitare le equazioni di Kirchhoff alle tensioni introducendo una *matrice di maglia*; ad ogni riga si associa un lato di co-albero, quindi la matrice avrà $L - N + 1$ righe e L colonne.

Per le colonne mettiamo prima gli indici dei lati di co-albero, nello stesso ordine usato per le righe. Per il grafo in *fig.17* la matrice di maglia è riportata in *tabella 2*. Ogni riga è riferita ad una maglia fondamentale.

	5	6	1	2	3	4
5	1	0	-1	1	0	-1
6	0	1	-1	1	-1	0

Tabella 2 - Matrice di maglia per il grafo di *fig.17*

La matrice conterrà +1 se il lato corrispondente alla colonna considerata è orientato come il lato di co-albero; -1 se il lato è orientato in verso opposto; 0 se il lato non appartiene a quella maglia.

La matrice è esprimibile come :

$$[M] = [I|S] \quad \begin{array}{l} \text{con } [M] \text{ matrice } (L - N + 1 \times L), \\ [I] (L - N + 1 \times L - N + 1) \text{ e} \\ [S] (L - N + 1 \times N - 1) \end{array}$$

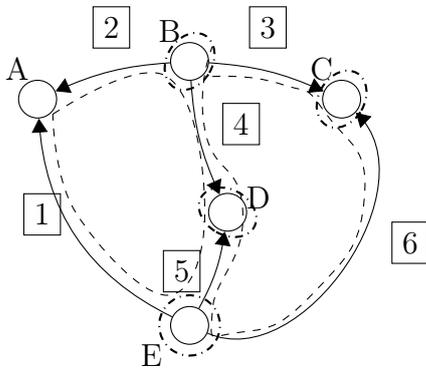
NOTA: $[S] = -[T]^T$, quindi o S o T contengono tutta l'informazione che deve essere memorizzata per ricavare le equazioni topologiche.

Se \underline{v} è il vettore delle tensioni di lato sarà:

$$[M]\underline{v} = 0$$

Occorre considerare per \underline{v} l'ordine delle colonne della matrice $[M]$.

NOTA: Per grafi planari è possibile individuare come co-cicli fondamentali quelli relativi a $N - 1$ superfici chiuse che abbracciano $N - 1$ nodi del circuito, e come maglie fondamentali le finestre del grafo. (vedi *fig.19*).



Co-cicli fondamentali *nod*i B, C, D, E :

- {2, 3, 4};
- {3, 6};
- {4, 5};
- {1, 5, 6};

Fig.19 Finestre e nodi in un grafo planare

Riferimenti bibliografici

P.P.Civalleri, Elettrotecnica, Levrotto e Bella Ed.1998.

G.Martinelli, M.Salerno, Fondamenti di Elettrotecnica, Vol.1, Siderea.

M.De Magistris, G. Miano, Circuiti, Edizioni Progetto Padova, Springer.

Teorema di Tellegen (o delle Potenze Virtuali)

Dato un grafo (che può corrispondere anche a differenti circuiti), il teorema di Tellegen afferma che il vettore della tensione di lato e il vettore delle correnti di lato sono *ortogonali*.

Se \underline{v} è il vettore delle tensioni nei lati del grafo, prese in un certo ordine, mentre \underline{i} è il vettore delle correnti nei lati del grafo, prese nello *stesso ordine*, si avrà:

$$\underline{v}^T \cdot \underline{i} = 0$$

oppure

$$\underline{i}^T \cdot \underline{v} = 0$$

Dimostrazione

Prendiamo i vettori \underline{v} ed \underline{i} considerando prima le tensioni e le correnti di albero, poi quelle di co-albero, ovvero:

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_a \\ v_c \end{bmatrix} \quad \underline{i} = \begin{bmatrix} i_a \\ i_c \end{bmatrix}$$

Nel caso del grafo di *fig.17* avremo:

$$\underline{v}_a = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}; \quad \underline{v}_c = \begin{bmatrix} v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}; \quad \underline{i}_a = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}; \quad \underline{i}_c = \begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}$$

Per le leggi di Kirchhoff alle correnti sarà:

$$[C]\underline{i} = 0 \implies [I|T]\underline{i} = [I|T] \begin{bmatrix} i_a \\ i_c \end{bmatrix} = 0 \implies I\underline{i}_a + T\underline{i}_c = 0 \implies \underline{i}_a = -T\underline{i}_c$$

Il teorema di Tellegen afferma che:

$$\underline{i}^T \cdot \underline{v} = 0$$

Il primo membro di questa espressione può essere espresso come:

$$\underline{i}_a^T \cdot \underline{v}_a + \underline{i}_c^T \cdot \underline{v}_c = \underline{i}_c^T T^T \underline{v}_a + \underline{i}_c^T \underline{v}_c$$

Poiché, per la legge di Kirchhoff alle tensioni si avrà:

$$[M] \begin{bmatrix} \underline{v}_c \\ \underline{v}_a \end{bmatrix} = 0 \implies [I|S] \begin{bmatrix} \underline{v}_c \\ \underline{v}_a \end{bmatrix} = 0 \implies \underline{v}_c + S\underline{v}_a = 0 \implies \underline{v}_c = -S\underline{v}_a$$

e sostituendo nella precedente relazione:

$$\underline{i}_c^T \cdot \underline{v} = \underline{i}_c^T T^T \underline{v}_a - \underline{i}_c^T \cdot S\underline{v}_a$$

e poiché è $S = -T^T$, si ha:

$$\underline{i}_c^T \cdot \underline{v} = \underline{i}_c^T T^T \underline{v}_a + \underline{i}_c^T \cdot S\underline{v}_a = 0 \quad c.v.d.$$

L'espressione (●) può essere scritta anche come:

$$\sum_{h=1}^L v_h \cdot i_h = 0 \quad (\blacksquare)$$

Se definiamo come potenza virtuale il prodotto *tensione · corrente* riferita ad un lato del circuito, il Teorema di Tellegen afferma anche che:

«La somma delle potenze virtuali assorbite dai lati del grafo è identicamente uguale a zero, purché le tensioni e le correnti nei lati del grafo, prese con la convenzione dei generatori, soddisfino le equazioni topologiche (si dice che sono "compatibili" con il grafo)».

Poiché queste tensioni e correnti non devono necessariamente rispettare anche le equazioni dei componenti, l'espressione (■) non postula il principio di conservazione delle potenze (o dell'energia) ma ha una accezione molto più larga.

Per quel particolare insieme di tensioni e correnti che, oltre a soddisfare le equazioni topologiche, soddisfano anche le equazioni dei componenti per il circuito, corrispondente al dato grafo, allora il teorema di Tellegen consiste nel Principio di Conservazione dell'Energia.

Poiché i due insiemi (vettori) di tensioni e di correnti sui lati del grafo contengono $2L$ elementi, mentre le equazioni che tali variabili devono soddisfare sono solo L , si avranno molte soluzioni che soddisfano il Teorema di Tellegen.

In particolare, se $\underline{i}^T = [i_1, i_2, \dots, i_L]$ è il vettore trasposto delle correnti di lato e $\underline{v}^T = [v_1, v_2, \dots, v_L]$ è il vettore trasposto delle tensioni di lato, le correnti sono legate da $N - 1$ equazioni agli $N - 1$ co-cicli fondamentali. Avremo quindi ∞^{L-N+1} possibili insiemi di correnti compatibili con il grafo. Le L tensioni di lato sono legate da $L - N + 1$ equazioni alle $L - N + 1$ maglie fondamentali e avremo quindi ∞^{N-1} possibili insiemi di tensioni compatibili con il grafo.

Verifichiamo il Teorema di Tellegen facendo riferimento, ad esempio, al grafo di *fig.17*. Le tensioni e le correnti di lato saranno:

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} \quad \underline{i} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix}$$

Possiamo fissare ad arbitrio $N - 1$ tensioni e ricavare le restanti $L - N + 1$ utilizzando le equazioni alle maglie fondamentali. È conveniente fissare ad arbitrio le tensioni nei lati di albero; in questo modo ogni equazione di maglia conterrà una sola incognita (la tensione del lato di co-albero). In *fig.17-a* abbiamo assunto come lati di albero i lati 1, 2, 3, 4. Su questi fissiamo ad arbitrio i valori delle tensioni (cerchiati nel vettore delle tensioni sotto riportato):

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} \textcircled{v_1} = 1 \\ \textcircled{v_2} = 2 \\ \textcircled{v_3} = 3 \\ \textcircled{v_4} = 4 \\ v_5 = ? \\ v_6 = ? \end{bmatrix}$$

Le tensioni v_5 e v_6 si ricavano dalle due equazioni alle maglie fondamentali.

$$\begin{cases} v_5 - v_4 + v_2 - v_1 = 0 \\ v_6 - v_3 + v_2 - v_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} v_5 = 3 \\ v_6 = 2 \end{cases}$$

Per la determinazione dell'insieme di L correnti compatibili con il grafo, è conveniente fissare ad arbitrio le correnti nei lati di co-albero e determinare le rimanenti correnti nei lati di albero risolvendo le $N - 1$ equazioni ai co-cicli fondamentali che conterranno ciascuna una sola incognita.

Le correnti i_1, i_2, i_3, i_4 si ricavano dalle quattro equazioni ai co-cicli fondamentali.

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} i_1 = ? \\ i_2 = ? \\ i_3 = ? \\ v_4 = ? \\ \textcircled{i_5} = 5 \\ \textcircled{i_6} = 6 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} i_1 + i_5 + i_6 = 0 \\ i_2 - i_5 - i_6 = 0 \\ i_3 + i_6 = 0 \\ i_4 + i_5 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} i_1 = -11 \\ i_2 = +11 \\ i_3 = -6 \\ i_4 = -5 \end{cases}$$

Determinati i due insiemi di tensioni e correnti compatibili col grafo è possibile verificare il Teorema di Tellegen:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{\sigma} v_h \cdot i_h &= 1 \cdot (-11) + 2 \cdot 11 = 3 \cdot (-6) + 4 \cdot (-5) + 3 \cdot (5) + 2 \cdot (6) = \\ &= -11 + 22 - 18 - 20 + 15 + 12 = 0 \quad c.v.d. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONI

1. Il Teorema di Tellegen contiene il principio di conservazione dell'energia come caso particolare, quando si considerino le tensioni e le correnti effettive del circuito.
2. Il Teorema di Tellegen prescinde dalla natura dei componenti.