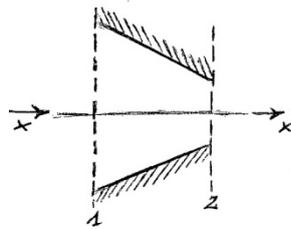


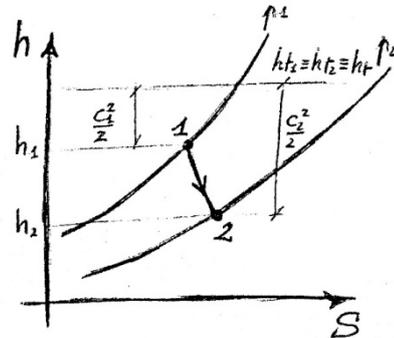
**FLUSSO COMPRIMIBILE NEI CONDOTTI FISSI**

La seguente trattazione riguarda tutti i condotti fissi a sezione variabile la cui lunghezza è confrontabile con la loro dimensione trasversale. Tali condotti possono essere a sezione crescente (condotti divergenti) o a sezione decrescente (condotti convergenti).

Si consideri il flusso omoenergetico (flusso ad energia costante) in un condotto convergente rappresentato in figura 1.



**Figura 1a – Condotto a sezione decrescente**



**Figura 1b - Trasformazione subita dal flusso sul piano h-s**

L'analisi sarà effettuata secondo le seguenti ipotesi semplificative:

- Condizioni di moto stazionario;
- Pareti del condotto rigide e adiabatiche;
- Flusso monodimensionale.

Si applichi ora l'equazione dell'energia al condotto tra le sezioni 1 e 2:

$$Q - L = h_2 - h_1 + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1)$$

Tenendo presente che poiché il condotto fisso è adiabatico, il calore scambiato con l'esterno è nullo ( $Q = 0$ ), inoltre non essendo presenti organi mobili il lavoro scambiato con l'esterno è nullo ( $L = 0$ ), e poiché il termine di variazione di energia potenziale è generalmente trascurabile (in questo caso specifico nullo), l'equazione dell'energia diviene:

$$h_2 + \frac{c_2^2}{2} = h_1 + \frac{c_1^2}{2}$$

ovvero

$$h_{t2} = h_{t1} = h_t = \text{cost.}$$

Pertanto, in ragione delle considerazioni fatte, in ogni punto di un condotto fisso l'entalpia totale è costante, che si ricorda, è data dalla somma dell'entalpia statica e dell'energia cinetica. Nel caso specifico dell'ugello questo risultato è rappresentato graficamente sul piano h-s in figura 1b.

Ricordando inoltre che  $dh = C_p dT$  si può riscrivere l'equazione precedente:

$$C_p T_1 + \frac{c_1^2}{2} = C_p T_2 + \frac{c_2^2}{2} = C_p T_t$$

In cui  $T_t$  è la temperatura totale del fluido che può essere così espressa:

$$T_t = T + \frac{c^2}{2C_p}$$

Considerando che vale la relazione  $C_p = \frac{kR}{k-1}$ , si può scrivere:

$$\frac{kRT_t}{k-1} = \frac{kRT}{k-1} + \frac{c^2}{2}$$

Si considera ora la definizione della velocità di propagazione del suono  $a$  nell'aria:

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

Dove  $p$  è la pressione statica dell'aria e  $\rho$  la sua densità. La trasformazione subita dall'aria durante la propagazione di un'onda di pressione, come dimostra l'esperienza, è adiabatica isoentropica, per cui si può scrivere:

$$a = \left( \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \right)_{s=const.}$$

Per una trasformazione adiabatica reversibile di un gas perfetto si può scrivere:

$$\frac{p}{\rho^k} = const.$$

che differenziata fornisce:

$$dp\rho^{-k} - k\rho^{-k-1}d\rho = 0$$

E dopo alcuni passaggi:

$$\frac{dp}{d\rho} = k \frac{p}{\rho}$$

Tenendo conto dell'equazione di stato dei gas  $p = \rho RT$

L'equazione della velocità del suono, può allora essere riscritta come

$$a = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} = \sqrt{kRT}$$

ed elevando al quadrato, si ottiene:

$$a^2 = kRT$$

Sostituendo questo risultato nell'equazione dell'energia, si ottiene l'equazione di un'ellisse che prende il nome di "**equazione dell'ellisse dell'energia**".

$$\frac{a_t^2}{k-1} = \frac{a^2}{k-1} + \frac{c^2}{2}$$

In cui  $a_t$  è la velocità del suono valutata con le grandezze totali,  $a$  la velocità del suono espressa considerando le grandezze statiche e  $c$  la velocità del fluido. Questa equazione rappresentata graficamente su un piano a-c (figura 2) ha senso fisico solo nella porzione di piano definito per  $a \geq 0$  e  $c \geq 0$ .

Per la costruzione del grafico è utile individuare i punti di intersezione con gli assi:

- Ponendo  $c = 0$ , si ottiene:  $a = a_t$

- Fissando  $a = 0$ , invece si ha:  $c = a_t \sqrt{\frac{2}{k-1}} = c_{max}$

Cioè la velocità del suono si annulla quando la velocità del fluido raggiunge il suo valore massimo ( $p \rightarrow 0$  e  $T \rightarrow 0$  K).

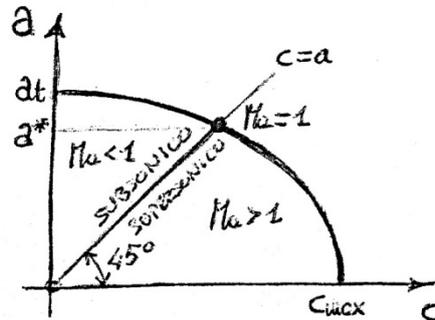


Figura 2 – Rappresentazione grafica dell'ellisse dell'energia

Una condizione particolare si verifica quando il fluido raggiunge la velocità del suono, ossia quando:

$$c = a = a^*$$

che è definita la condizione critica, che nel diagramma è rappresentata dal punto di intersezione tra l'ellisse e una retta passante per l'origine inclinata di 45°. Sostituendo nell'equazione dell'ellisse la condizione precedente si ottiene:

$$a_t^2 = \frac{k+1}{2} a^{*2}$$

Quando la velocità del fluido è minore di quella del suono  $c < a^*$ , il flusso è detto subsonico. Se  $c > a^*$  il flusso è detto supersonico mentre per  $c = a^*$  il flusso è detto sonico.

Per distinguere tra le diverse condizioni di flusso si utilizza nella pratica un numero adimensionale che prende il nome di numero di Mach (**Ma**) e definito come rapporto fra la velocità del flusso  $c$  e quella del suono  $a$ .

$$Ma = \frac{c}{a}$$

Pertanto, in base alla sua definizione è ovvio che:

- Se  $Ma = 1$ , il flusso è sonico;
- Se  $Ma < 1$ , il flusso è subsonico;
- Se  $Ma > 1$ , il flusso è supersonico.

Per determinare le condizioni termodinamiche che portano ad un flusso sonico, ovvero le condizioni "critiche", si può utilizzare il risultato precedente

$$\left(\frac{a_t}{a^*}\right)^2 = \frac{k+1}{2} \quad \frac{T_t}{T^*} = \frac{k+1}{2}$$

da cui

$$\frac{T^*}{T_t} = \frac{2}{k+1}$$

e nell'ipotesi di una trasformazione adiabatica isoentropica

$$\frac{p^*}{p_t} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Per tutti i gas biatomici ( $k=1.4$ ) le condizioni critiche si raggiungono quando il rapporto  $T^*/T_t=0.833$  ovvero quando  $p^*/p_t = 0.528$ .

### 1. Grandezze totali per flussi comprimibili

Riprendendo ancora in esame l'equazione dell'ellisse dell'energia, si possono ricavare le espressioni che definiscono le grandezze totali o al ristagno di un flusso comprimibile dopo aver sostituito le espressioni corrispondenti per la velocità del suono  $a$  e  $a_t$ .

$$a_t^2 = a^2 \left( 1 + \frac{k-1}{2} \frac{c^2}{a^2} \right) \quad \rightarrow \quad T_t = T \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_a^2 \right)$$

Poiché le condizioni di ristagno si ottengono arrestando isoentropicamente il flusso la pressione totale si ottiene applicando l'equazione dell'isoentropica:

$$p_t = p \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_a^2 \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

### 2. Equazioni di Hugoniot

Si consideri il moto di un fluido in un condotto fisso orizzontale senza perdite e perfettamente adiabatico e al quale si applichino le equazioni di conservazione della massa e dell'energia.

Equazione di conservazione della massa in condizioni stazionarie

$$\dot{M} = \rho A c$$

Differenziando si ottiene:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dc}{c} = 0$$

Equazione dell'energia per i sistemi aperti nella forma meccanica in condizioni stazionarie. Partendo dalla forma integrale abitualmente utilizzata e di seguito riportata:

$$-L = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + L_{p1-2}$$

tenendo conto che il termine potenziale di posizione  $g(z_2-z_1)$  è trascurabile, che  $L=0$ ,  $L_{p1-2}=0$  e  $Q=0$ , si può facilmente ricavare la forma differenziale:

$$\frac{dp}{\rho} + d \left( \frac{c^2}{2} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad c \, dc = -\frac{dp}{\rho}$$

Combinando le due equazioni di conservazione si ottiene:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dc}{c} - \frac{d\rho}{\rho} \quad ; \quad \frac{dc}{c} = -\frac{dp}{\rho c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho c^2} - \frac{d\rho}{\rho}$$

considerando inoltre la definizione della velocità del suono

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad \rightarrow \quad a^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{\rho a^2}$$

sostituendo nell'equazione di conservazione della massa si ottiene:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho c^2} - \frac{dp}{\rho a^2} = \frac{dp}{\rho c^2} (1 - M_a^2)$$

da cui tenendo conto dell'equazione dell'energia si ottiene la prima equazione di Hugoniot:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dc}{c} (M_a^2 - 1)$$

Mentre invece se viene posta in funzione di p anziché di c si ottiene la seconda equazione di Hugoniot:

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{p} \left( \frac{1 - M_a^2}{k M_a^2} \right)$$

Le *equazioni di Hugoniot*, consentono di analizzare l'evoluzione della velocità e della pressione lungo il condotto in funzione della forma del condotto. Esse pertanto consentono di determinare la variazione delle proprietà del fluido (nel caso specifico la velocità e la pressione) per una assegnata variazione di sezione.

Tuttavia, anche senza ricorrere alle equazioni di Hugoniot si possono fare delle importanti considerazioni analizzando dapprima l'equazione dell'energia che riscriviamo in questo modo:

$$\frac{dc}{dp} = -\frac{1}{\rho c} < 0 \quad \text{sempre}$$

Quindi in un flusso isoentropico in cui si realizza un aumento di velocità ( $dc > 0$ ) si verificherà una riduzione della pressione ( $dp < 0$ ) e viceversa quando  $dc < 0$  si ha  $dp > 0$ . Pertanto, un flusso che accelera realizza una espansione mentre un flusso che decelera subisce una diffusione.

Tenendo presente questa importante conclusione si può ora analizzare l'espressione di conservazione della massa che esprimiamo nella seguente forma

$$\frac{dA}{dp} = \frac{A}{\rho c^2} (1 - M_a^2)$$

$$\text{se } Ma < 1 \quad \text{allora} \quad dA/dp > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{se } dA < 0 \Rightarrow dp < 0 \Rightarrow dc > 0 \quad \text{condotto convergente (ugello)} \\ \text{se } dA > 0 \Rightarrow dp > 0 \Rightarrow dc < 0 \quad \text{condotto divergente (diffusore)} \end{array} \right.$$

se  $Ma > 1$  allora  $dA/dp < 0$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } dA < 0 \Rightarrow dp > 0 \Rightarrow dc < 0 \text{ condotto convergente (diffusore)} \\ \text{se } dA > 0 \Rightarrow dp < 0 \Rightarrow dc > 0 \text{ condotto divergente (ugello)} \end{array} \right.$

I risultati qualitativi sono riassunti in tabella 1.1.

dA	Ma < 1 Flusso Subsonico		Ma > 1 Flusso Supersonico	
	dC	dp	dC	dp
>0	<0	>0	>0	<0
<0	>0	<0	<0	>0

Tabella 1.1

In condizioni soniche, vale a dire per  $Ma=1$ , poiché non può risultare  $dp$  infinito deve essere  $dA=0$ . Poiché le condizioni soniche si realizzano nel passaggio dal regime subsonico a quello supersonico o viceversa, dall'esame della tabella 1.1 si evince che alla condizione  $dA=0$  corrisponde la sezione minima di efflusso sia nel caso di una espansione che nel caso di una compressione. Una espansione con attraversamento del regime sonico potrà avvenire solamente in un condotto convergente-divergente e le condizioni soniche vengono raggiunte (nell'ipotesi di flusso monodimensionale) esattamente nel luogo di minima sezione. Analogo discorso vale per la compressione a partire ovviamente dalle condizioni di flusso supersonico in ingresso al condotto convergente-divergente. Operando in regime supersonico risultano tuttavia di fondamentale interesse solo le espansioni (negli ugelli delle turbine di motori aeronautici) anche perché sono le più facilmente controllabili, mentre le compressioni se pur di interesse in certe applicazioni (compressori transonici), risultano più difficilmente controllabili e non sono quasi mai riconducibili al modello isoentropico per le forti irreversibilità (onde d'urto) che le caratterizzano. In tal senso, nelle analisi che seguono si farà esclusivo riferimento alle trasformazioni di espansione.

La precedente relazione può essere analizzata anche partendo da sinistra

$$\frac{dA}{dp} = \frac{A}{\rho c^2} (1 - M_a^2)$$

se  $dA/dp > 0$  allora  $Ma < 1$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } dA < 0 \Rightarrow dp < 0 \Rightarrow dc > 0 \text{ condotto convergente (ugello)} \\ \text{se } dA > 0 \Rightarrow dp > 0 \Rightarrow dc < 0 \text{ condotto divergente (diffusore)} \end{array} \right.$

se  $dA/dp < 0$  allora  $Ma > 1$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{se } dA < 0 \Rightarrow dp > 0 \Rightarrow dc < 0 \text{ condotto convergente (diffusore)} \\ \text{se } dA > 0 \Rightarrow dp < 0 \Rightarrow dc > 0 \text{ condotto divergente (ugello)} \end{array} \right.$

Si ottengono i medesimi risultati dell'analisi precedente.

Nel caso di abbia  $dA = 0$  allora si hanno due possibilità

- a)  $dA = 0$  e  $dp \neq 0 \Rightarrow M_a = 1$
- b)  $dA = 0$  e  $dp = 0 \Rightarrow (M_a - 1) \neq 0$

Il caso a) rappresenta la situazione in cui il flusso è sonico nella sezione minima. Nel caso b) invece quando A assume un valore massimo o minimo la pressione ha un massimo o un minimo relativo.

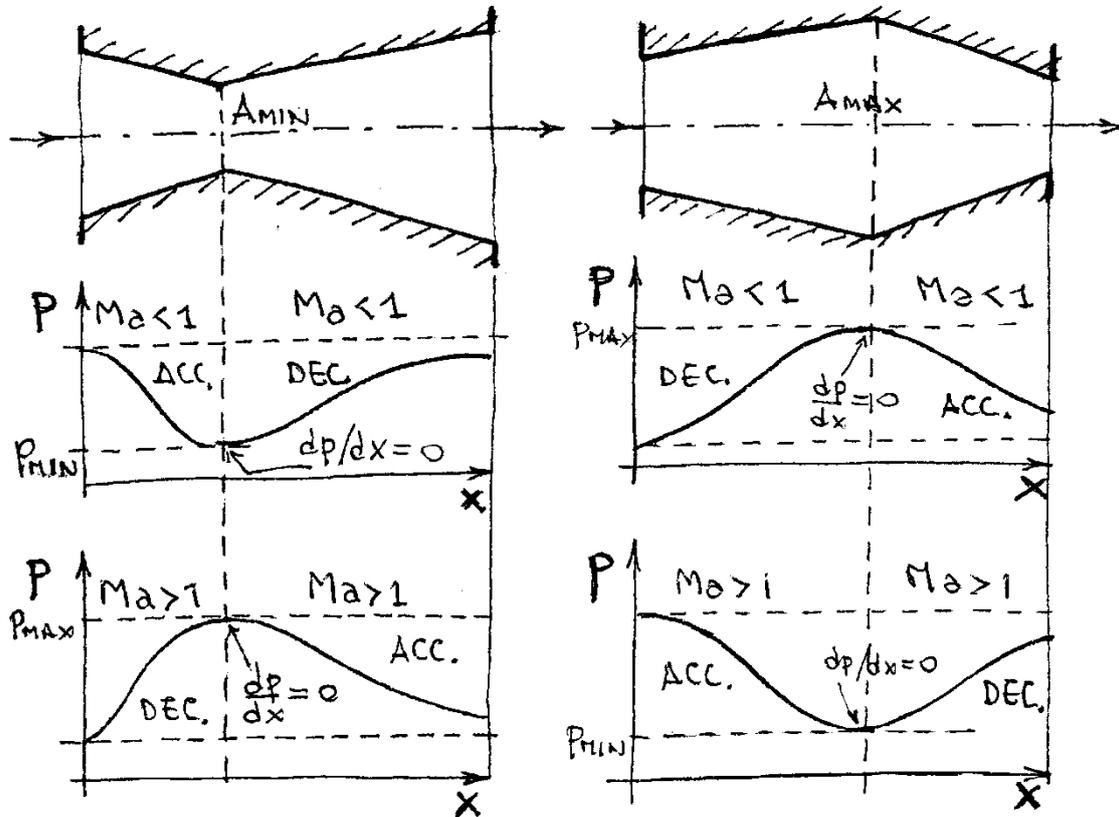


Figura 3 – Andamento della pressione in un condotto convergente-divergente e in un condotto divergente-convergente per flusso subsonico e supersonico

## 2. Portata massica negli ugelli

Per il calcolo della portata massica attraverso un ugello si può far riferimento ancora alla figura 1 e alle relazioni che definiscono la portata massica in condizioni stazionarie e alle diverse definizioni fornite per il numero di Mach, la velocità del suono oltre alle diverse relazioni termodinamiche:

$$\dot{M} = \rho A c \quad \rho = p/RT \quad M_a = c/a \quad a = \sqrt{kRT}$$

Combinando le equazioni si trova:

$$\dot{M} = p/RT A M_a \sqrt{kRT} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{M}}{A} = p M_a \sqrt{\frac{k}{RT}}$$

Tenendo conto che  $C_p = \frac{kR}{k-1}$ , si ha che  $R = C_p \frac{k-1}{k}$ , pertanto:

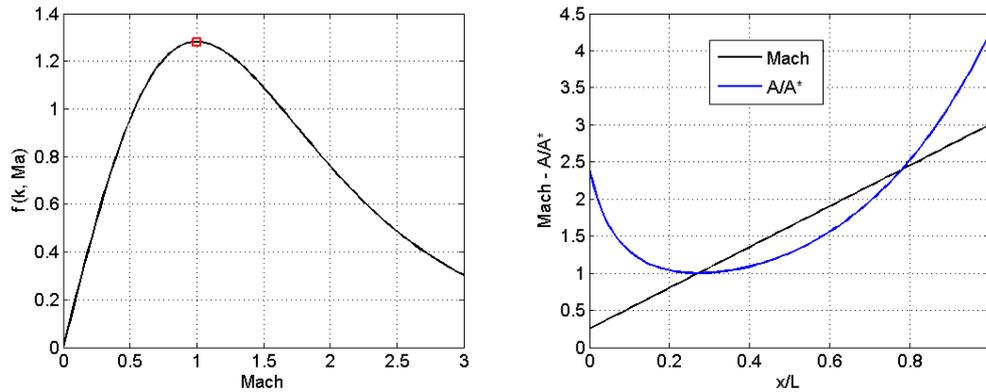
$$\frac{\dot{M}}{A} \sqrt{C_p T} = \frac{k}{\sqrt{k-1}} p M_a$$

In luogo delle grandezze statiche di pressione e temperatura si possono introdurre le corrispondenti grandezze totali riprendendo le definizioni date per queste ultime.

$$\frac{T_t}{T} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_a^2\right) \quad \frac{p_t}{p} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M_a^2\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

$$\frac{\dot{M}}{A p_t} \sqrt{C_p T_t} = \frac{k}{\sqrt{k-1}} M_a \left(1 + \frac{k-1}{2} M_a^2\right)^{-\frac{k+1}{2(k-1)}} = f(k, M_a)$$

Si consideri un qualsiasi condotto in cui si voglia far affluire la portata  $\dot{M}$ , avendo fissato  $p_t, T_t$  e il fluido ( $k$  e  $C_p$ ). In tal caso la precedente relazione permette di determinare la dimensione del condotto  $A$  ove si raggiunga un determinato numero di Mach. Viceversa, assegnato  $A$  si possono trovare i numeri di Mach compatibili con  $A$  (figura 4).



**Figura 4 - Portata adimensionale in funzione del numero di Mach e geometria del condotto per una fissata distribuzione del Mach.**

In generale assegnata la portata e la geometria del condotto, è chiaro che il rapporto  $\dot{M}/A$  sarà massimo laddove  $A$  è minimo. E poiché in un condotto dove  $Ma=1$  la sezione  $A$  è minima, sarà conseguentemente anche  $\dot{M}/A$  massimo, ovvero massima portata per unità di superficie per cui la portata massica non può crescere ulteriormente. In queste condizioni l'espressione della portata

$$\left(\frac{\dot{M}}{A_{min} p_t} \sqrt{C_p T_t}\right)_{max} = \frac{k}{\sqrt{k-1}} \left(\frac{k+1}{2}\right)^{-\frac{k+1}{2(k-1)}} = f(k)$$

Fissato il fluido  $k$  è costante per cui anche la portata adimensionale è costante.

Quindi laddove  $Ma=1$  e  $A$  è minima, l'equazione della portata assume un valore costante indipendente da tutti gli altri parametri come ad esempio la pressione di valle. L'ugello è quindi con la portata bloccata ("**choking**"). Per poter modificare la portata occorre agire su  $p_t$  e/o  $T_t$ .

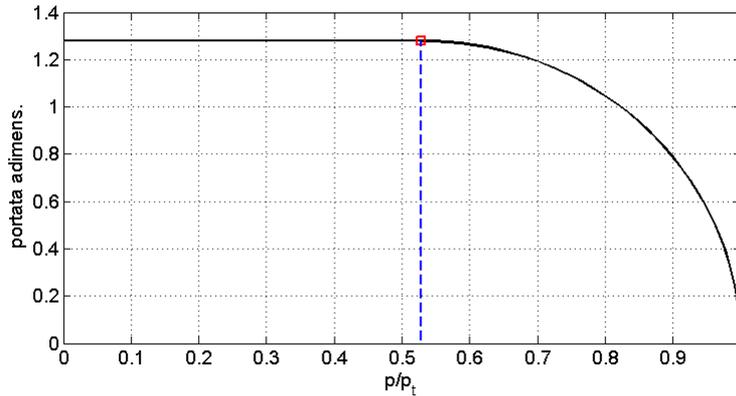


Figura 5 - Portata adimensionale in funzione del rapporto di pressione attraverso l'ugello

### 3. Efflusso nei condotti convergenti

Si consideri la configurazione di figura 6 dove un semplice condotto convergente scarica in una regione dove la pressione  $p_B$  è controllata da una valvola. Sia invece  $p_E$  la pressione all'uscita del condotto mentre  $p_0$  e  $T_0$  sono rispettivamente la pressione totale e la temperatura totale del serbatoio che alimenta il condotto.

- se  $p_B = p_0$  (condizione i) allora la pressione è costante lungo il condotto e non esiste flusso di massa;
- se  $p_B$  si riduce leggermente, (condizione ii) un flusso subsonico si realizza attraverso il condotto e la pressione  $p_E = p_B$  ;
- se  $p_B$  si riduce ulteriormente, (condizione iii) il flusso permane subsonico attraverso il condotto e la pressione  $p_E = p_B$  ma la portata massica è aumentata. Questo comportamento continua finché il rapporto  $p_B/p_0$  non raggiunge il valore critico  $p_B/p_0 = p^*/p_0 = p_E/p_0$  e per il quale  $Ma_E = 1$  (condizione iv)
- quando  $p_B$  viene ridotto ulteriormente (condizione v) la pressione  $p_E$  non può diventare inferiore a  $p^*$  in quanto  $Ma_E = 1$ . Inoltre la portata massica rimane costante e anche la distribuzione di pressione all'interno del condotto non cambia rispetto alla condizione iv.

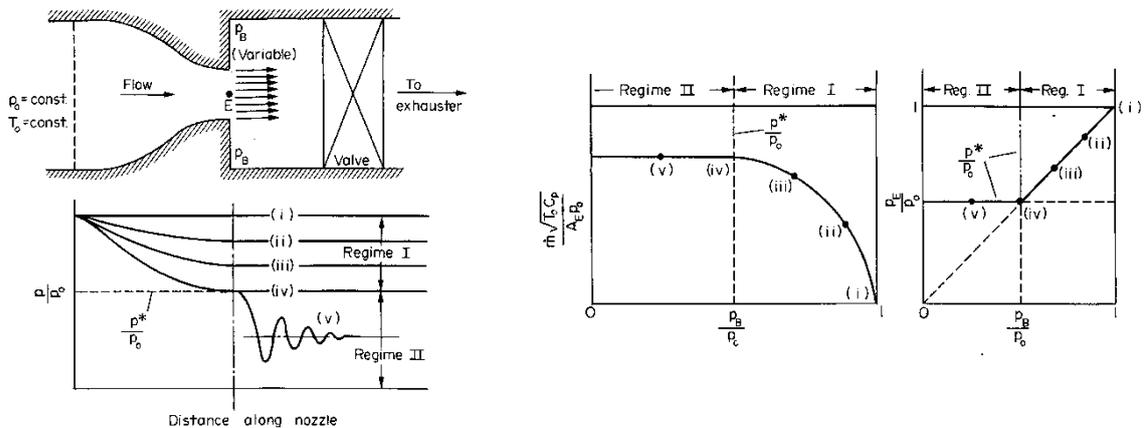


Figura 6 - Efflusso attraverso un ugello convergente

La distribuzione di pressione nella camera a valle della sezione di uscita E non può essere prevista con il modello monodimensionale considerato ed è rappresentata con una linea oscillante. La pressione a valle della sezione di uscita del condotto pertanto si adegua al valore inferiore presente nella camera di valle attraverso un processo dissipativo.

#### 4. Efflusso nei condotti convergenti-divergenti

Il precedente esperimento può essere ripetuto anche nel caso di un condotto convergente - divergente come rappresentato in figura 7. Si supponga quindi di ripetere le considerazioni precedenti facendo decrescere la pressione  $p$  a partire da  $p=p_0$ .

- se la pressione esterna  $p_B$  è uguale alla pressione totale vigente all'interno del serbatoio  $p_0$ , si ha come nel caso precedente una portata nulla attraverso il condotto;
- diminuendo lievemente la pressione esterna rispetto a  $p_0$  (condizione 1) si instaura un flusso subsonico ed il condotto, data la sua configurazione, funziona come un tubo di Venturi: nel tratto convergente si ha una espansione (diminuzione di pressione fino alla sezione di gola T) e nel tratto divergente si ha una compressione con un parziale recupero della pressione fino alla pressione  $p_B$ . La situazione è rappresentabile da una qualsiasi punto all'interno del campo I (figura 7).
- se la pressione  $p_B$  diminuisce (condizione 1a) si ha un comportamento analogo attraverso il condotto ma sarà caratterizzato da un diverso valore della portata massica;
- se la pressione  $p_B$  diminuisce fino a raggiungere la condizione 2 il flusso nella sezione di gola T diviene sonico (condizioni critiche) ma continua a diffondere nel tratto divergente del condotto fino alla pressione  $p_B=p_E$ ;
- la condizione 6 invece è rappresentativa del flusso che accelera in modo continuo lungo tutto il condotto. In questo caso il rapporto di pressione  $p_E/p_0=p_B/p_0$  è definito come rapporto di pressione di progetto del condotto ("design condition");

La portata massica che si realizza per la condizione 6 è la stessa che si aveva per la condizione 2 in quanto nella sezione di gola  $Ma=1$  per entrambe le situazioni.

E' interessante a questo punto osservare cosa succede nel condotto per pressioni  $p_B$  superiori a quella della condizione 6 ma inferiori a quelle della condizione 2 (sovraespansione) e per pressioni inferiori a quelle della condizione 6 (sottoespansione).

- Per valori della pressione  $p_B$  compresi fra quella del punto 2 e quella del punto 6, come ad esempio la condizione 3 (figura 7), l'espansione continua oltre la sezione di gola T, raggiungendo velocità supersoniche nel tratto divergente. L'espansione però non può proseguire fino alla fine del condotto perché si dovrebbe avere una pressione pari a quella nominale mentre in realtà, nel caso specifico, la pressione a valle è addirittura superiore a quella critica. Il fluido evolvente deve essere ovviamente ricompresso, ma perché ciò avvenga, essendo il condotto divergente, si deve operare in regime subsonico. Il passaggio dal regime supersonico a quello subsonico avviene bruscamente con una trasformazione di energia cinetica in energia di pressione solo parzialmente perché il fenomeno è fortemente dissipativo. Tale recupero di pressione è messo in evidenza in figura 7 dal tratto di curva verticale. Il fenomeno dissipativo che dà luogo al brusco passaggio dal regime supersonico a quello subsonico prende il nome di "**onda d'urto**" ("*shock wave*"). Tale onda d'urto è perpendicolare al flusso

("normal shock wave"). e si sposta progressivamente verso la sezione d'uscita dell'ugello al diminuire della pressione rispetto a quella del punto 3.

- Al limite quando si raggiunge la condizione 4, l'onda d'urto si posiziona proprio nella sezione di uscita e la condizione  $p_B = p_4$  individua il limite del regime II dove lo shock si presenta nella sezione di uscita ed il flusso è supersonico in tutto il tratto divergente del condotto. Questa situazione è particolare perché l'efflusso nel condotto avviene esattamente come nelle condizioni nominali, a parte il fatto che la pressione all'uscita è superiore a quella nominale e dà luogo alla formazione di un'onda d'urto e la portata massica è sempre costante e pari al valore massimo.
- All'interno del regime di flusso III la pressione  $p_B$  è inferiore a  $p_4$  ma la pressione  $p_E = p_6$ . In queste condizioni il flusso è sempre supersonico in tutto il tratto divergente il che lascia inalterata la situazione all'interno dell'ugello ma a valle di esso la pressione risale da  $p_E$  a  $p_B$  tramite un'onda d'urto posta nella sezione di uscita che diventa obliqua. Al diminuire della pressione esterna  $p_B$  la sua intensità diminuisce e diminuisce conseguentemente l'angolo che essa forma con la direzione del flusso. In condizioni di funzionamento nominale essa dovrebbe essere idealmente allineata con il flusso, ma di fatto essa scompare perché la sua intensità è nulla (figura 7 - condizione 6). Il flusso in questo caso è perfettamente parallelo alle pareti dell'ugello nella sezione di uscita.
- Una ulteriore diminuzione della pressione al di sotto del valore nominale  $p_6$  (regime IV) comporta una sottoespansione dell'ugello (figura 7 - condizione 7). L'espansione all'esterno dell'ugello avviene con una modifica del getto il quale, essendo supersonico, aumenta autonomamente la sua sezione ideale di efflusso.

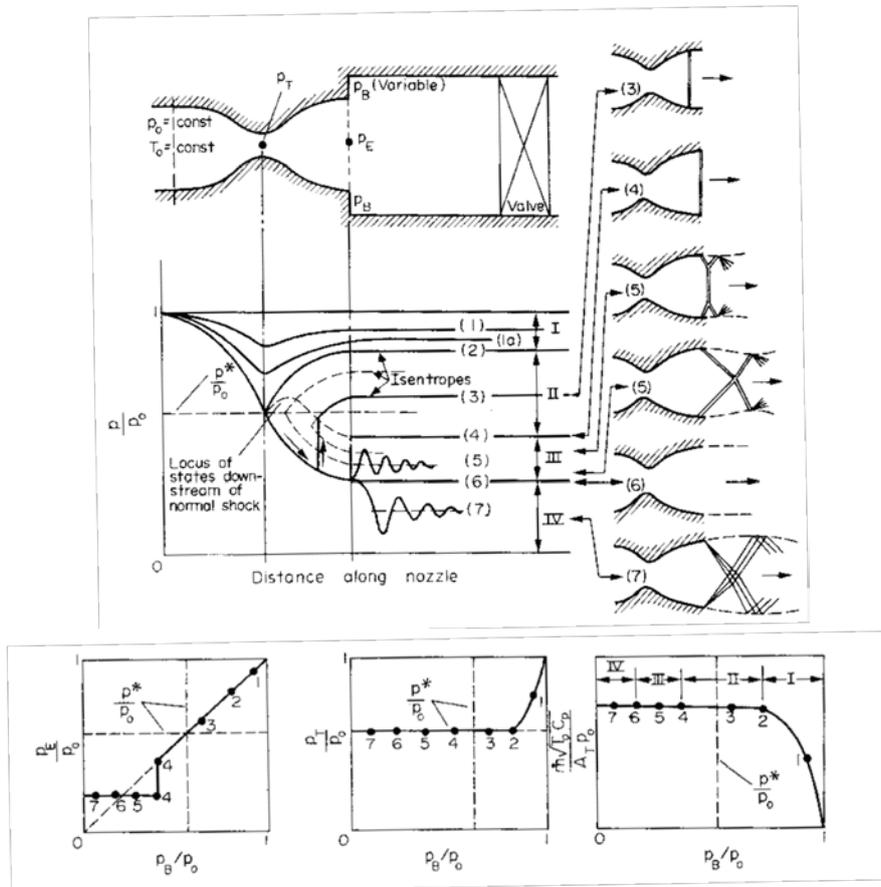


Figura 7 - Efflusso attraverso un ugello convergente - divergente

Al variare quindi della pressione vigente all'uscita dell'ugello si individuano quattro regimi di funzionamento differenti che, con riferimento alla figura 7 possono essere riepilogati come segue:

- 1) Il regime I è caratterizzato da un flusso completamente subsonico. Il condotto si comporta come un tubo di Venturi accelerando il flusso nel tratto convergente e rallentandolo nel tratto divergente.
- 2) Il regime II è caratterizzato dalla formazione di un'onda d'urto normale all'interno del tratto di condotto a sezione crescente. In questo tratto il flusso è supersonico a monte dell'onda d'urto e subsonico a valle.
- 3) Il regime III è caratterizzato dalla formazione di onde d'urto oblique nella sezione di uscita del condotto. L'intensità di tali onde varia al variare della pressione a valle da un valore massimo relativo all'onda d'urto normale (punto 4) al valore nullo relativo all'ugello funzionante in condizioni nominali (punto 6).
- 4) Il regime IV è caratterizzato dalla formazione di onde di espansione nella sezione di uscita dell'ugello.

Per quanto riguarda il regime di funzionamento caratterizzato dalla formazione di onde d'urto normali all'interno del tratto divergente (regime II) è opportuno aggiungere alcune ulteriori considerazioni. Poiché attraverso l'onda d'urto normale il flusso passa dal regime supersonico a quello subsonico, la sua pressione a valle dell'onda d'urto deve essere superiore a quella critica. Quest'ultima non è tuttavia quella relativa al flusso isoentropico indicata precedentemente con  $p^*$ , ma è inferiore a quest'ultima a causa dei fenomeni dissipativi introdotti dall'onda d'urto normale.

Nei regimi III e IV l'andamento del flusso nel condotto è indipendente dalla pressione  $p_b$  ed è identica alla condizione di progetto. Tutti gli adeguamenti della pressione per raggiungere il valore d'uscita  $p_b$  avvengono nel serbatoio a valle della sezione d'uscita del condotto. Pertanto il rapporto  $p_e/p_0$  nei regimi III e IV dipende solo dal rapporto fra la sezione di gola e quella d'uscita del condotto e può essere calcolato considerando che la portata adimensionale dipende solo da  $M_a$  e  $k$ .

$$\frac{\dot{M}}{A_E p_t} \sqrt{C_p T_t} = \dot{M}_E^* = f(k, M_{aE}) \quad \frac{\dot{M}}{A_T p_t} \sqrt{C_p T_t} = \dot{M}_T^* = f(k, M_a = 1)$$

$$\frac{\dot{M}}{A_E p_t} \sqrt{C_p T_t} = \dot{M}_E^* = \dot{M}_T^* \frac{A_T}{A_E}$$

Pertanto, nella sezione di gola T la portata  $\dot{M}_T$  può essere calcolata anche utilizzando le tabelle del flusso isoentropico per la condizione  $M_a = 1$ . Il calcolo di  $\dot{M}_E^*$  permette sempre con le tabelle di determinare sia il Mach all'uscita sia il rapporto di pressioni  $p_e/p_0$ .

Nei regimi II, III e IV il flusso è in choking e la portata è massima ed indipendente dalla pressione di valle  $p_b$ . Solo nel regime I è possibile modificare la portata agendo sulla pressione di valle  $p_b$ .

5. **Rendimento di ugelli e diffusori**

Fino ad ora abbiamo considerato soltanto trasformazioni adiabatiche isoentropiche, ma nelle trasformazioni reali ci saranno delle perdite, a causa delle irreversibilità, delle quali bisogna tener conto. Lo scopo di questo paragrafo è la definizione di un parametro adimensionale (il rendimento  $\eta$ ) che dia delle indicazioni riguardo le prestazioni del condotto, confrontate col caso ideale.

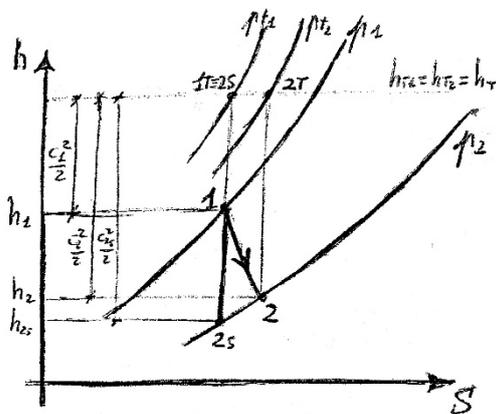


Figura 8a – Trasformazione ideale e reale subita dal flusso in un ugello

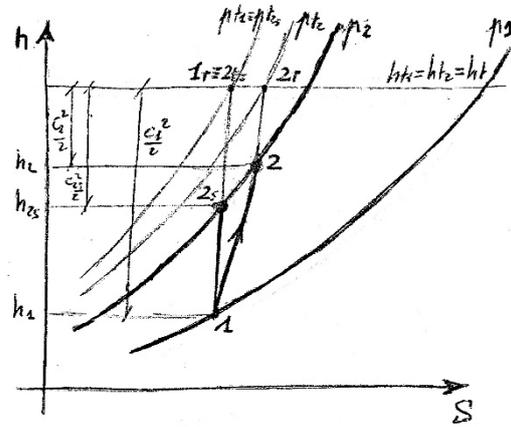


Figura 8b - Trasformazione ideale e reale subita dal flusso in un diffusore

Nel caso di una trasformazione di espansione in un ugello si può considerare la figura 8a. Il rendimento dell'ugello definito mediante le grandezze statiche (static-to-static) è espresso con il seguente rapporto:

$$\eta_u = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2s}}$$

Tenendo conto che, come anche rappresentato graficamente in figura 8a, nei condotti fissi l'entalpia totale è costante, si ottiene:

$$\eta_u = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2s}} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{c_{2s}^2 - c_1^2}$$

L'espressione può essere rielaborata matematicamente sommando e sottraendo al numeratore la stessa quantità  $h_{2s}$ :

$$\eta_u = \frac{h_1 - h_2 + h_{2s} - h_{2s}}{h_1 - h_{2s}} = \frac{(h_1 - h_{2s}) - (h_2 - h_{2s})}{h_1 - h_{2s}} = 1 - \frac{h_2 - h_{2s}}{h_1 - h_{2s}}$$

Ora applicando la seconda equazione di Gibbs,  $dh = Tds + vdp$  alla trasformazione isoentropica 1-2s ed integrando tra il punto 1 e il punto 2s, nell'ipotesi di flusso incomprimibile si ottiene:

$$(h_1 - h_{2s}) = v(p_1 - p_2) = \frac{p_1 - p_2}{\rho}$$

Il termine  $h_2 - h_{2s}$ , può essere ottenuto come segue:

$$h_2 - h_{2s} = (h_1 - h_{2s}) - (h_1 - h_2) = \frac{p_1 - p_2}{\rho} - \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} = \left( \frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} \right) - \left( \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} \right) = \frac{p_{t1} - p_{t2}}{\rho}$$

Sostituendo i risultati ottenuti nell'equazione del rendimento, e semplificando si ottiene:

$$\eta_u = 1 - \frac{h_2 - h_{2s}}{h_1 - h_{2s}} = 1 - \frac{p_{t1} - p_{t2}}{p_1 - p_2}$$

Che rappresenta il rendimento dell'ugello espresso in funzione delle sole pressioni statiche e totali che vigono agli estremi dell'ugello.

Si vuole ora esprimere, seguendo un procedimento analogo al precedente, il rendimento per un diffusore, e si consideri a questo proposito, la figura 8b. Il rendimento di un diffusore, considerando sempre le grandezze statiche, si definisce come:

$$\eta_d = \frac{h_{2s} - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{c_1^2 - c_{2s}^2}{c_1^2 - c_2^2}$$

La precedente equazione può essere riscritta, con dei passaggi simili al caso dell'ugello:

$$\eta_d = \frac{h_{2s} - h_1}{h_2 - h_1 + h_{2s} - h_{2s}} = \frac{h_{2s} - h_1}{(h_{2s} - h_1) + (h_2 - h_{2s})} = \frac{1}{1 + \frac{h_2 - h_{2s}}{h_{2s} - h_1}}$$

Applicando ancora la seconda equazione di Gibbs alla trasformazione adiabatica isoentropica 1-2s, sempre nell'ipotesi di flusso incomprimibile, si ottiene:

$$(h_{2s} - h_1) = v(p_2 - p_1) = \frac{p_2 - p_1}{\rho}$$

Il termine  $(h_2 - h_{2s})$  può essere ricavato come segue:

$$(h_2 - h_{2s}) = (h_2 - h_1) - (h_{2s} - h_1) = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} - \frac{p_2 - p_1}{\rho} = \left( \frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} \right) - \left( \frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} \right) = \frac{p_{t1} - p_{t2}}{\rho}$$

Sostituendo i risultati ottenuti nell'espressione del rendimento, si ottiene:

$$\eta_d = \frac{1}{1 + \frac{h_2 - h_{2s}}{h_{2s} - h_1}} = \frac{1}{1 + \frac{p_{t1} - p_{t2}}{p_2 - p_1}}$$

che rappresenta ancora l'espressione del rendimento del diffusore in funzione delle pressioni statiche e totali presenti agli estremi del condotto.