

INTRODUZIONE ALLE TURBOMACCHINE

Gli argomenti trattati in questo capitolo sono fondamentali per poter affrontare lo studio delle turbomacchine; nello specifico saranno dapprima richiamati alcuni concetti fondamentali noti riguardanti le differenze fra moto assoluto e relativo, le equazioni del moto e le caratteristiche cinematiche dei fluidi e i triangoli di velocità, per poter infine ricavare l'equazione di Eulero per le turbomacchine.

Le turbomacchine sono macchine a flusso continuo in cui il moto del fluido è stazionario e lo scambio energetico con gli elementi mobili della macchina (pale rotoriche dotate di moto rotatorio) avviene per variazione della quantità di moto e/o dell'energia cinetica del fluido. Per lo studio del flusso attraverso i condotti rotanti di una girante occorre spesso utilizzare un sistema di riferimento mobile solidale con il rotore.

I triangoli di velocità

La comprensione di questo argomento è fondamentale per poter capire il funzionamento delle turbomacchine. A questo scopo, prendiamo in considerazione un condotto mobile di una macchina radiale centrifuga che ruota alla velocità angolare ω (figura 1). Si tratta di una macchina in cui la direzione prevalente del flusso è quella perpendicolare all'asse di rotazione e dal centro verso l'esterno.

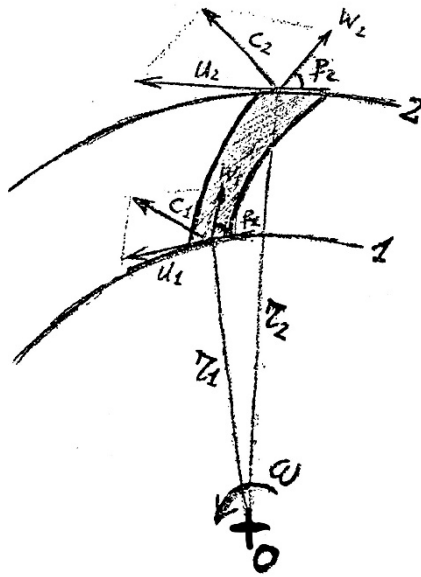


Figura 1 – Condotto mobile di una macchina centrifuga e triangoli di velocità

Ciascun punto della girante possiede una velocità di trascinamento data dalla relazione: $u = \omega r$, dove r è la distanza radiale del punto della girante rispetto all'asse di rotazione. Nel caso della figura 1, è ovvio che, trattandosi di una macchina centrifuga si può scrivere:

$$u_1 = \omega r_1 < u_2 = \omega r_2 \quad \text{in quanto} \quad r_1 < r_2$$

in questo caso la sezione di ingresso del condotto palare (raggio r_1) è più vicino all'asse della girante rispetto alla sezione di uscita (raggio r_2).

Discorso analogo può essere fatto per le macchine centripete, il cui flusso va dall'esterno della girante (sezione 1) verso il centro (sezione 2), per cui in questo caso si avrà:

$$u_1 = \omega r_1 > u_2 = \omega r_2 \quad \text{in quanto} \quad r_1 > r_2$$

Nel caso di macchine assiali (figura 2), in cui la direzione del flusso è prevalentemente parallela all'asse di rotazione, risulta invece $u_1 = u_2 = u$; solitamente si considera la velocità di trascinamento a metà altezza palare della girante.

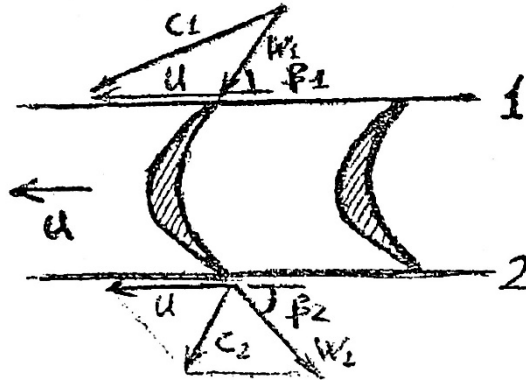


Figura 2 – Condotto mobile di una macchina assiale e relativi triangoli di velocità

Il fluido in ingresso alla palettatura rotorica (sezione 1), per incontrare la minima resistenza possibile dovrà avere una velocità relativa w_1 diretta secondo l'angolo β_1 di ingresso della palettatura. In altre parole, un osservatore solidale con il rotore, vedrà il flusso in ingresso al rotore inclinato dell'angolo β_1 rispetto alla direzione tangenziale (figura 1 e 2).

La velocità assoluta del fluido c , misurata rispetto ad un sistema di riferimento fisso, è legata alla precedente dalla relazione vettoriale:

$$\vec{c} = \vec{w} + \vec{u}$$

Questa è la relazione generale e fondamentale per costruire i triangoli di velocità per le palettature mobili di macchine motrici e operatrici, assiali e radiali, sia per la sezione di ingresso che per quella di uscita (figura 3).

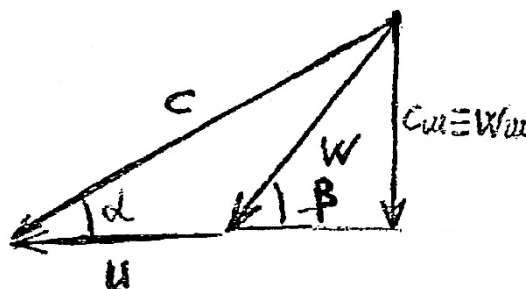


Figura 3 – Un generico triangolo di velocità.

Dalla figura 3 si può notare che \vec{c} e \vec{w} hanno la stessa componente meridiana (componente normale alla direzione di trascinamento o tangenziale), e quindi si può scrivere:

$$c_m = w_m \quad \rightarrow \quad c \sin\alpha = w \sin\beta$$

Dove il pedice m indica appunto la componente meridiana, che è la componente responsabile dello smaltimento della portata.

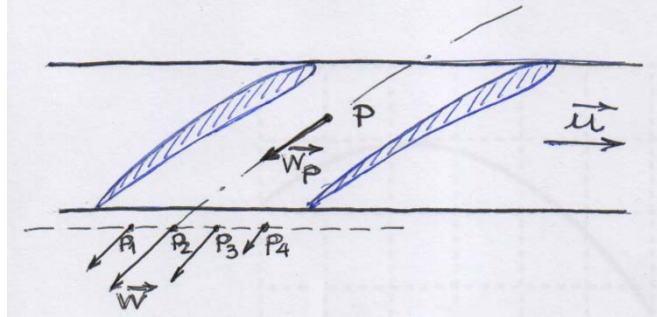


Figura 4 – Osservatore relativo (Lagrangiano) e inerziale (Euleriano)

Un altro aspetto importante è la permanenza del moto nei due sistemi di riferimento assoluto e relativo. Nel sistema di riferimento relativo il moto sarà permanente (stazionario) se la velocità non cambia nel tempo per qualsiasi punto P considerato del campo di moto pur potendo risultare differenti da punto a punto. Nel caso della figura 4 un generico punto P del campo di moto risulta, per un osservatore relativo, che si muove solidale alla girante, caratterizzato da una velocità w_p che è costante nel tempo per cui il moto è stazionario. Pur considerando altri punti (P_1, P_2, P_3, \dots) le conclusioni sono le stesse. Viceversa un osservatore inerziale (solidale con una terna di riferimento fissa), posto ad esempio a valle della girante, sarà soggetto a discontinuità per il passaggio periodico delle pale di fronte al punto fisso e rileverà velocità diverse al trascorrere del tempo. Pertanto nel sistema di riferimento assoluto il moto è non stazionario. Questo impedisce di studiare il flusso nella girante con le equazioni fondamentali della meccanica dei fluidi in condizioni stazionarie.

Le uniche grandezze che si conservano (sono uguali) nei due sistemi di riferimento sono quelle statiche (pressione, entalpia, temperatura ecc.), mentre le grandezze totali sono differenti.

Un altro legame fra i due sistemi di riferimento che deriva dalla meccanica razionale è quello fra le accelerazioni. Nel caso in cui il sistema di riferimento mobile sia dotato di solo moto rotatorio con velocità angolare costante ω si ha:

$$\frac{D\vec{C}}{Dt} = \frac{D_R\vec{w}}{Dt} + 2\vec{\omega} \times \vec{w} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

↑ ↑ ↑ ↑
acc. totale nel acc. materiale acc. complementare acc. centripeta
rif. assoluto nel rif. relativo

Poiché per la legge di Newton, alle accelerazioni si associano le forze, anche l'equazione del moto nel sistema relativo richiederà forze inerziali. Nel referenziale assoluto l'equazione del moto stabilisce

$$\frac{D\vec{C}}{Dt} = \frac{-\text{grad } p}{\rho} + \vec{f}$$

Quando si passa al referenziale relativo invece si ha

$$\frac{D_R \vec{w}}{Dt} + 2\vec{\omega} \times \vec{w} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{-grad p}{\rho} + \vec{f}$$

$$\frac{D_R \vec{w}}{Dt} = \frac{-grad p}{\rho} + \vec{f} - 2\vec{\omega} \times \vec{w} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

\uparrow
 forza di pressione
per unità di massa

\uparrow
 forza di campo (g)
per unità di massa

\uparrow
 forza di Coriolis

\uparrow
 forza centrifuga

Pertanto quando si opera nel sistema relativo occorre considerare oltre alle forze di massa anche quelle d'inerzia (forza centrifuga e forza di Coriolis).

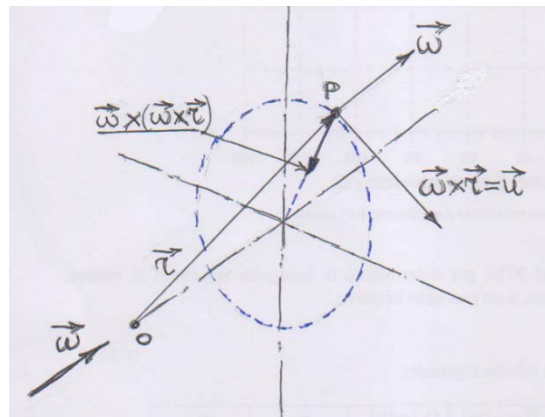


Figura 5 – Accelerazione centripeta

Poiché i sistemi fluidodinamici sono dei sistemi aperti ovvero dei sistemi a massa variabile, occorre scrivere l'equazione del moto per tali sistemi aperti. Come noto è possibile passare dalla formulazione delle equazioni di conservazione in termini di massa di controllo a quella in funzione del volume di controllo mediante il teorema del trasporto di Reynolds. Se si fa riferimento all'equazione di conservazione della massa in termini di massa di controllo (sistema chiuso), essa si esprime come segue:

$$M = costante \rightarrow \frac{DM}{Dt} = 0$$

e per il teorema del trasporto diviene:

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \rho dV + \int_{S.C.} \rho (\vec{C} \cdot \vec{n}) ds = 0$$

\uparrow
 variazione locale
(accumulo di massa)

\uparrow
 flusso di massa attraverso
la superficie di controllo

Nel caso si consideri l'equazione di conservazione della quantità di moto, in termini di massa di controllo (sistema chiuso), si ha:

$$\sum \vec{F}_e = \frac{D}{Dt}(M\vec{C})$$

e per il teorema del trasporto diviene:

$$\sum \vec{F}_e = \frac{\partial}{\partial t} \oint_{V.C.} \rho \vec{C} dV + \oint_{S.C.} \rho \vec{C} (\vec{C} \cdot \vec{n}) ds$$

↑
↑
↑

variazione locale (accumulo di q. di moto) flusso di q. di moto attraverso la superficie di controllo

Nel caso si considerino condizioni stazionarie l'equazione di conservazione della quantità di moto per i sistemi aperti diviene:

$$\sum \vec{F}_e = \oint_{S.C.} \rho \vec{C} (\vec{C} \cdot \vec{n}) ds$$

Tra le forze esterne applicate al V.C. occorre considerare sia le forze di massa o di volume (forza peso) sia quelle di superficie: forze di pressione, ortogonali alla superficie e le forze d'attrito tangenti alla superficie. Poiché la scelta del V.C. è arbitraria, occorre fare attenzione nella sua scelta poiché se esso interseca qualche superficie solida, in quel punto occorre mettere in evidenza le forze che vengono trasmesse.

L'equazione di conservazione della quantità di moto per i sistemi aperti consente di legare la variazione di quantità di moto subita dal flusso alle forze esterne applicate. Nel caso delle turbomacchine è tuttavia più interessante considerare la coppia trasmessa tra fluido e organi mobili della macchina in luogo delle forze. Per calcolare il momento della quantità di moto rispetto ad un generico punto (polo) si può considerare la figura 6 in cui si è indicato con \vec{r} il vettore distanza del punto P di applicazione delle forze dal polo O.

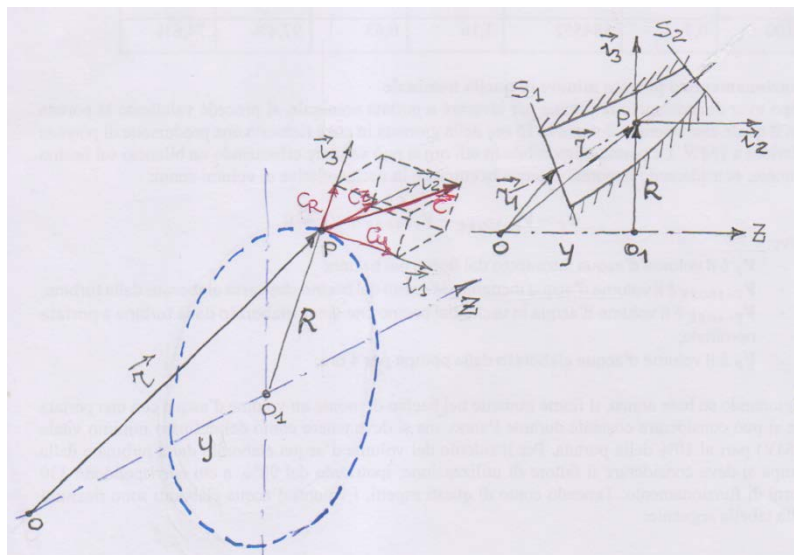


Figura 6 –Momento angolare della quantità di moto

Moltiplicando vettorialmente l'equazione di conservazione della quantità di moto per il vettore distanza \vec{r} si ottiene:

$$\sum \vec{r} \times \vec{F}_e = \oint_{S.C.} \rho \vec{r} \times \vec{C} (\vec{C} \cdot \vec{n}) ds$$

che per un sistema aperto con una sola sezione di ingresso 1 e di uscita 2 diviene:

$$\sum \vec{M}_e = - \int_{S_1} \vec{r}_1 \times \vec{C}_1 d\dot{m} + \int_{S_2} \vec{r}_2 \times \vec{C}_2 d\dot{m}$$

Per una turbomacchina la componente del vettore momento che riveste maggiore interesse è quella diretta secondo l'asse di rotazione della macchina che corrisponde al momento torcente trasmesso attraverso il suo asse di rotazione. La componente assiale del momento si otterrà effettuando la proiezione dell'equazione vettoriale rispetto alla direzione assiale.

Sempre con riferimento alla figura 6 si può vedere che la proiezione lungo la direzione assiale assume la seguente forma:

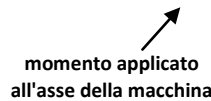
$$\vec{i}_2 \cdot (\vec{r} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{i}_2 \times \vec{r}) = \vec{C} \cdot [\vec{i}_2 \times (\vec{i}_2 y + \vec{i}_3 R)] = \vec{C} \cdot \vec{i}_1 R = C_u R$$

Pertanto la componente del momento esterno applicato al fluido e diretta secondo l'asse di rotazione risulta:

$$(M_e)_z = - \int_{S_1} R_1 C_{1u} d\dot{m} + \int_{S_2} R_2 C_{2u} d\dot{m}$$

Viceversa la componente del momento esterno trasferito dal fluido alla palettatura della girante (momento all'asse di rotazione della macchina) risulta:

$$-(M_e)_z = M_{asse} = \underbrace{\int_{S_1} R_1 C_{1u} d\dot{m} - \int_{S_2} R_2 C_{2u} d\dot{m}}_{\text{flusso del momento angolare della quantità di moto}}$$


momento applicato all'asse della macchina

Se il flusso del momento angolare della quantità di moto nell'attraversare la girante (sezione 1 di ingresso e sezione 2 di uscita), subisce una riduzione, allora si origina un momento motore $M_{asse} > 0$ e la macchina risulta motrice. Viceversa se il momento angolare della quantità di moto attraverso la girante il fluido subisce un aumento allora $M_{asse} < 0$ e la macchina risulta operatrice.

LO SCAMBIO ENERGETICO NELLE TURBOMACCHINE: L'EQUAZIONE DI EULERO

In queste note vengono esaminati i meccanismi legati allo scambio energetico che si realizza in una turbomacchina tra il fluido e gli organi mobili della macchina.

Si consideri il rotore di una turbomacchina radiale rappresentato in figura 7 e si cerchi di stabilire la relazione esistente fra il lavoro scambiato e la forma della palettatura e le caratteristiche cinematiche del fluido.

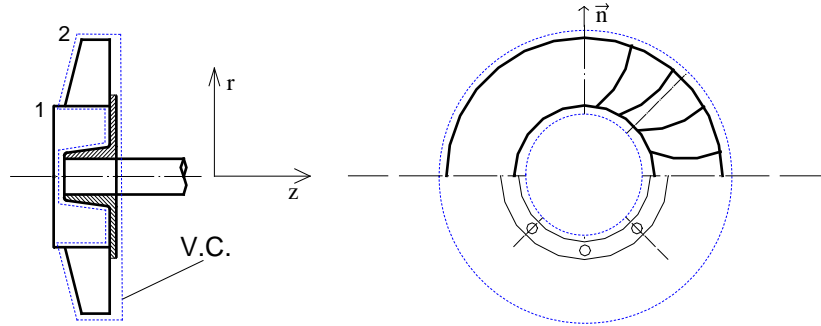


Figura 7 - Geometria della macchina e volume di controllo

Per affrontare il problema si possono utilizzare gli strumenti di carattere generale di cui si dispone come l'equazione dell'energia ed il principio di conservazione della quantità di moto. Per l'equazione dell'energia si ha:

$$Q - L = h_2 - h_1 + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \quad \text{forma termica}$$

$$-L = \int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + L_{p1-2} \quad \text{forma meccanica}$$

Tali relazioni si applicano ai sistemi aperti ed in particolare al generico volume di controllo V.C. che è interessato a flussi di massa e a scambi di calore e di lavoro con l'esterno.

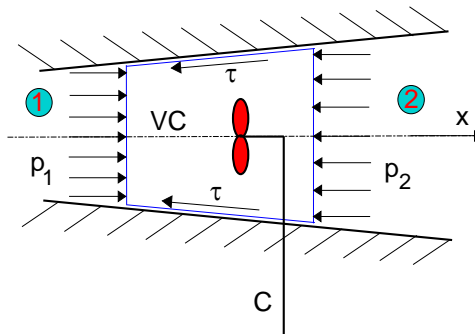


Figura 8 - Sistema aperto e volume di controllo

Esprimiamo anche l'equazione della dinamica per i sistemi fluidi rappresentata dall'equazione di conservazione della quantità di moto in condizioni di flusso stazionario:

$$\sum \vec{F}_e = \oint_{s.c.} \rho \vec{C} (\vec{C} \cdot \vec{n}) dA$$

Non bisogna però perdere di vista il problema che è quello di stabilire il legame fra il lavoro scambiato e le proprietà cinematiche del fluido. Nel caso delle turbomacchine è più conveniente considerare la coppia scambiata con l'esterno in luogo delle forze. Si deve allora applicare il teorema di conservazione del momento angolare della quantità di moto che si esprime uguagliando il momento torcente esterno applicato al volume di controllo con la variazione del momento angolare della quantità di moto:

$$\sum \vec{M}_e = \sum \vec{r} \times \vec{F}_e = \oint_{S.C.} \rho \vec{r} \times \vec{C} (\vec{C} \cdot \vec{n}) dA$$

La valutazione dell'integrale non pone grossi problemi perché se si valuta la componente di tale prodotto vettoriale lungo l'asse di rotazione della macchina, perché è l'unica componente che contribuisce allo scambio di lavoro, si ha: $(\vec{r} \times \vec{C})_z = r C_u$

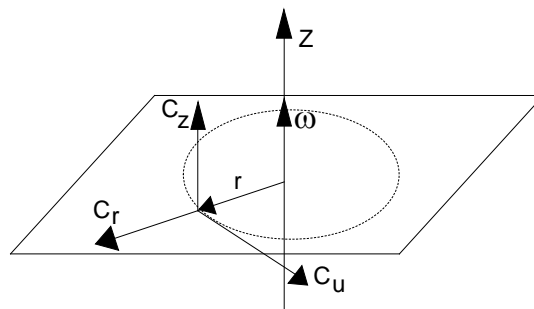


Figura 9 - Componente assiale del flusso del momento angolare della quantità di moto

Se ci riferiamo al V.C. della turbomacchina di figura 7 il termine di flusso del momento angolare della quantità di moto fornisce contributo solo per le sezioni di ingresso 1 e di uscita 2 ovvero solo laddove il prodotto scalare $\vec{C} \cdot \vec{n} \neq 0$

$$(M_e)_z = \int_{S_2} r_2 C_{2u} \rho C_{n2} dA - \int_{S_1} r_1 C_{1u} \rho C_{n1} dA$$

Le forze che contribuiscono a generare la coppia esterna sono sia le forze di massa o di volume sia le forze di superficie. Se trascuriamo le forze gravitazionali e quelle tangenziali che si sviluppano sulle superfici del disco anteriore e posteriore della turbomacchina, rimangono le forze di pressione presenti sulle superfici assialsimmetriche di ingresso e di uscita che però non generano alcuna coppia. Allora l'unico contributo al momento torcente esterno è quello trasmesso attraverso l'albero di rotazione in corrispondenza della sezione di intersezione del V.C. con l'albero. Se si considera la quantità $r C_u = \text{cost.}$ la relazione precedente può essere scritta come:

$$M_e = \dot{m} (r_2 C_{2u} - r_1 C_{1u})$$

Esprimendo la potenza assorbita dall'esterno in funzione della coppia esterna e della velocità angolare si può ricavare il lavoro specifico scambiato dal sistema con l'esterno

$$-P_e = M_e \omega = \dot{m} \omega (r_2 C_{2u} - r_1 C_{1u}) \Rightarrow -L = \frac{-P_e}{\omega} = \dot{m} (r_2 C_{2u} - r_1 C_{1u})$$

$$-L = u_2 C_{2u} - u_1 C_{1u}$$

Questa relazione esprime l'equazione di Eulero per le turbomacchine. Questa relazione presenta delle caratteristiche generali insospettite perché la scelta del volume di controllo risulta indipendente dalla forma della palettatura ed il lavoro che compare nell'equazione di Eulero rappresenta proprio il lavoro reale scambiato con l'esterno. L'ipotesi più pesante che è stata fatta per ricavare tale relazione riguarda l'aver trascurato gli sforzi tangenziali presenti sulle superfici del disco anteriore e posteriore della girante, ma tiene conto di tutte le forze che la palettatura scambia con il fluido.

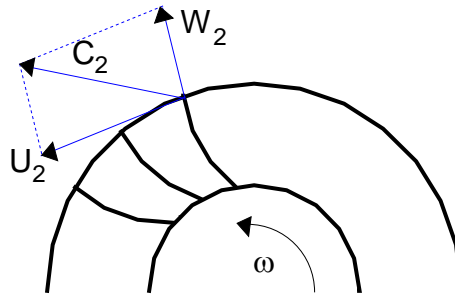


Figura 10 - Palettatura rotorica e triangoli di velocità

$$\vec{C} = \vec{W} + \vec{u} \Rightarrow \begin{cases} C_u = u + W_u \\ C_z = W_z \end{cases}$$

$$C^2 + u^2 - 2u C_u = W^2 \Rightarrow u C_u = \frac{C^2 + u^2 - W^2}{2}$$

Sostituendo tale relazioni nell'equazione di Eulero si ottiene:

$$-L = \frac{C_2^2 - C_1^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2}$$

Poiché inoltre il lavoro è pari a $-L = h_{t2} - h_{t1} = h_2 - h_1 + \frac{C_2^2 - C_1^2}{2}$ si ricava che

$$h_2 - h_1 = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} - \frac{W_2^2 - W_1^2}{2} \quad \text{ovvero} \quad H_{TR} = h + \frac{W^2}{2} - \frac{u^2}{2} = \text{cost.}$$

Quest'ultima relazione esprime l'equazione fondamentale per i rotori e stabilisce che l'entalpia totale relativa rimane costante. Inoltre trascurando il lavoro perduto si ha $\int_1^2 \frac{dp}{\rho} = h_2 - h_1$

Pertanto l'incremento di pressione statica che subisce il fluido nell'attraversare la turbomacchina operatrice viene ottenuto in parte per l'azione della diffusione del flusso $\frac{W_1^2 - W_2^2}{2}$ e in parte per la presenza del termine $\frac{u_2^2 - u_1^2}{2}$. Per comprendere l'origine di questo ultimo termine si può applicare l'equazione dell'energia ad un volume di controllo solidale con la girante.

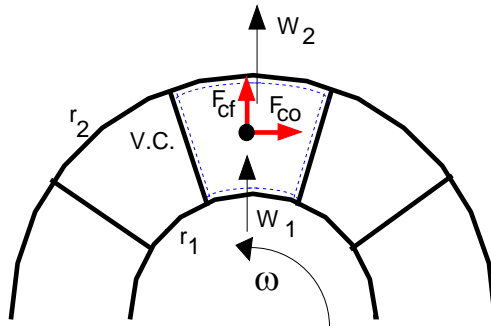


Figura 11 - Volume di controllo nel sistema relativo per il calcolo delle forze centrifughe

Le forze esterne che compiono lavoro nel sistema relativo sono la forza centrifuga F_{cf} e quella di Coriolis F_{co} .

$$F_{cf} = -m \omega^2 r \qquad F_{co} = -m 2\omega W$$

Se la particella segue una traiettoria radiale solo la forza centrifuga compie lavoro mentre la forza di Coriolis, che è sempre perpendicolare alla traiettoria della particella ovvero al vettore velocità relativa, ha il solo effetto di generare momento e determinare un gradiente circonferenziale di pressione.

Il lavoro compiuto dalla forza centrifuga sull'unità di massa risulta:

$$-L_{cf} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{F_{cf}}{m} dr = \int_{r_1}^{r_2} \omega^2 r dr = \left[\frac{\omega^2 r^2}{2} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{u_2^2 - u_1^2}{2}$$

L'incremento di pressione statica che si realizza in una macchina operatrice radiale è quindi legato sia al processo di diffusione subito dal flusso nel moto relativo sia all'azione del campo delle forze centrifughe. Si può inoltre constatare che il lavoro compiuto dalle forze del campo centrifugo non comporta alcuna perdita. Questa proprietà può essere posta in evidenza eseguendo un semplice esperimento che consiste nel porre in rotazione attorno al proprio asse un contenitore cilindrico riempito con del liquido. L'esperienza mostra che il pelo libero assume la forma di un paraboloide quale effetto dell'azione del campo delle forze centrifughe che si manifesta sulle singole particelle. A partire dall'asse di rotazione in corrispondenza del pelo libero la pressione idrostatica cresce per il peso del liquido sovrastante.

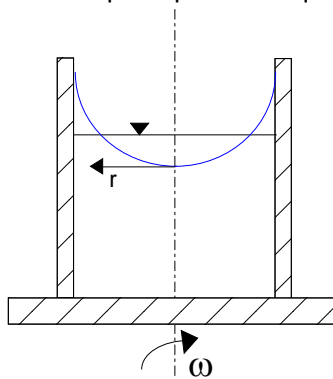


Figura 12 - Caratteristica a potenziale della forza centrifuga

Inoltre se si considera l'espressione del lavoro di Eulero e si tiene conto del legame fra le componenti della velocità assoluta e relativa si perviene ad un'altra espressione del lavoro di Eulero per le turbomacchine.

$$\begin{aligned}
 -L &= u_2 C_{2u} - u_1 C_{1u} & C_u &= u + W_u \\
 -L &= u_2 (u_2 + W_{2u}) - u_1 (u_1 + W_{1u}) \\
 -L &= (u_2 W_{2u} - u_1 W_{1u}) + (u_2^2 - u_1^2) \\
 \text{variaz. momento} & \uparrow & \uparrow & \text{lavoro forze di Coriolis} \\
 \text{angolare } q, \text{ di moto} & & & \\
 \text{nel sistema relativo} & & &
 \end{aligned}$$

Il primo contributo rappresenta la variazione del momento angolare della quantità di moto nel riferimento relativo ed è determinato dalle forze aerodinamiche che nascono per effetto della curvatura del condotto palare (curvatura delle pale). Il secondo contributo invece nasce dalla coppia generata dalle forze di Coriolis sul fluido.