Teoria dell'Errore di Misura e Trattamento dei Dati Sperimentali

Stefano Lai, PhD

stefano.lai@diee.unica.it

Tecnologie e Dispositivi Elettronici Avanzati
29 Ottobre 2015

Sommario

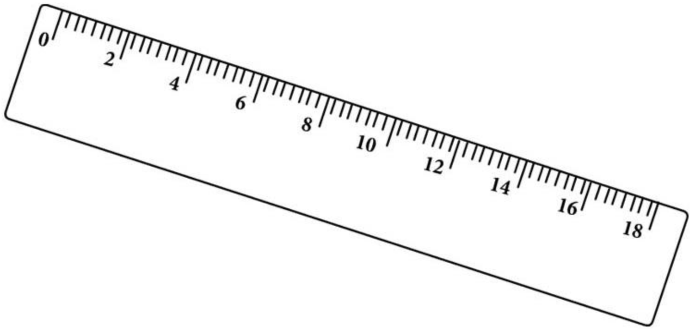
- Concetto di misura;
- Concetto di incertezza e sue componenti:
  - Incertezza strumentale;
  - Errore sistematico;
  - Errore accidentale.
- Incertezza nelle misure dirette:
  - Misure singole;
  - Misure ripetute: insiemi statistici e non statistici.
- Misure indirette e propagazione dell’incertezza;
- Esercizi

Riferimenti

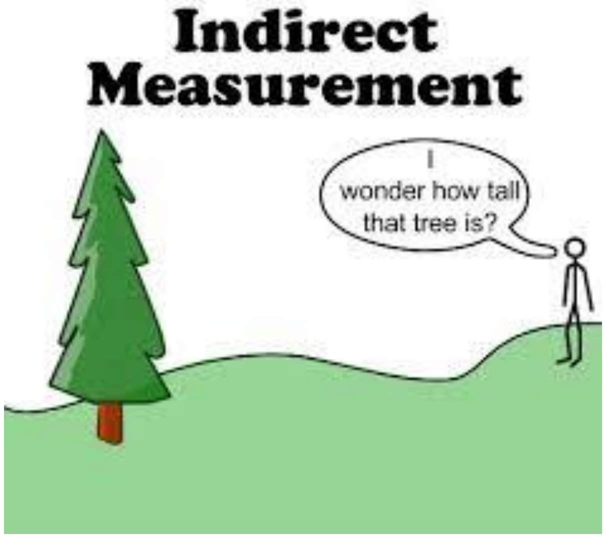
- Dispense del corso di «Misure Elettriche ed Elettroniche», Prof. Muscas:
- L. Roi, «Elementi di Teoria degli Errori», http://www.lorenzoroi.net/prelievi/TeoriaErrori.pdf
- J. R. Taylor, «Introduzione all'analisi degli errori» (Zanichelli, 1999).

DEALAB

Tipi di misura



- Misura **diretta**:
  - ottenuta tramite il confronto del misurando con un campione definito arbitrariamente.



- Misura **indiretta**:
  - ottenuta tramite relazioni matematiche che legano varie grandezze fisiche.

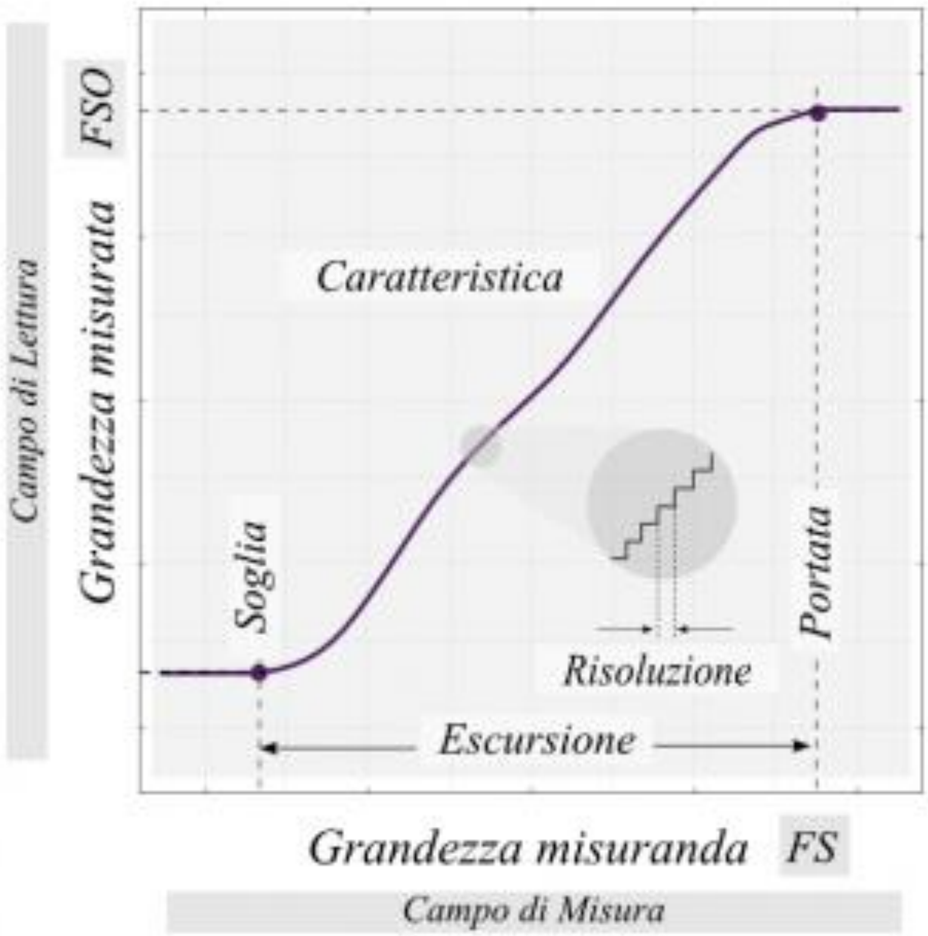
Misura e «valore vero»

- Il risultato della misura rappresenta il **valore misurato** del misurando, e non il suo **valore vero**;
- Il valore vero e il valore stimato sono legati tra loro dall'**incertezza di misura**

$$X_{mis} = X_{vero} + \Delta X$$

- Da cosa dipende l'incertezza di misura?

Caratteristiche dello strumento



- La risposta di uno strumento è ritenuta attendibile in un certo intervallo, compreso tra un valore minimo (**soglia**) e un valore massimo (**portata**).
- All'interno di questo intervallo la misura è definita a meno della **risoluzione** dello strumento, ovvero a meno della minima quantità apprezzabile.
- **Al limite, una grandezza fisica è conoscibile a meno della risoluzione dello strumento utilizzato.**

L'errore

- Con errore di misura si identificano l'insieme degli eventi che possono determinare uno scostamento indesiderato dal valore vero, non relativi alle caratteristiche intrinseche del misurando e dello strumento di misura.
- Gli errori hanno diverse cause, ma sommariamente li si distingue in due categorie: **<u>errori sistematici</u>** ed **<u>errori accidentali</u>**.

Errore sistematico

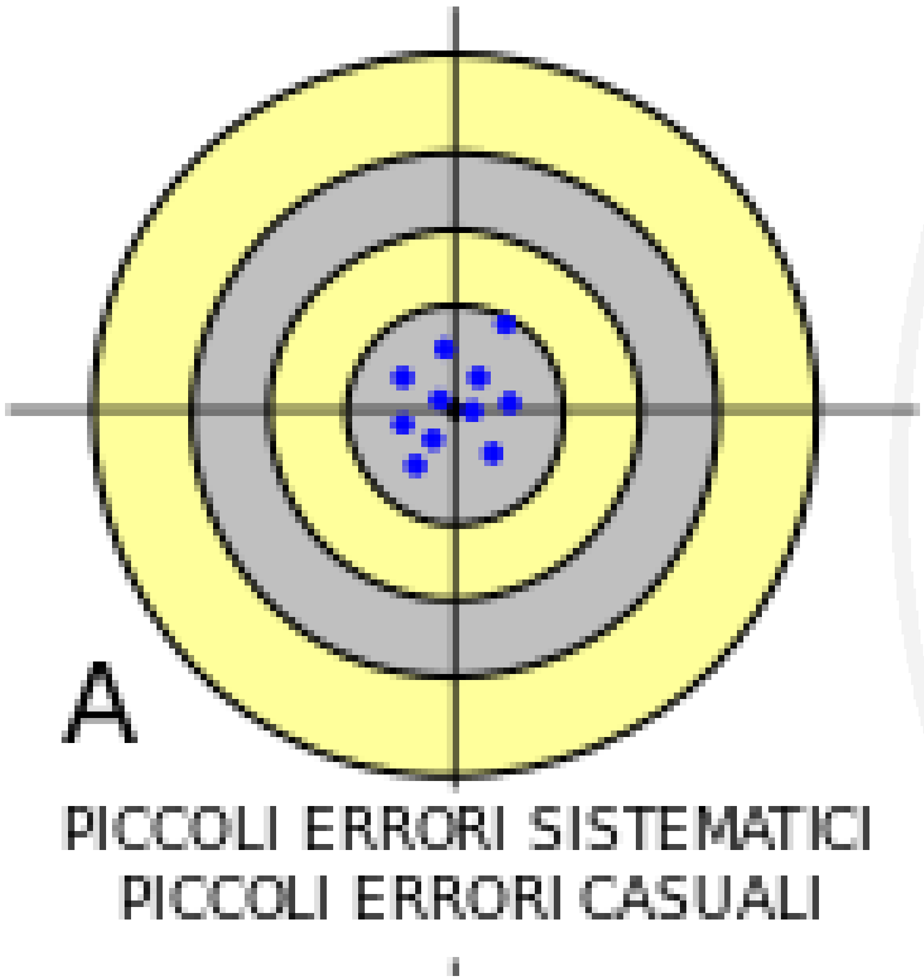
- Un **errore sistematico** è **sempre uguale a se stesso**, e può dipendere da un **difetto dello strumento di misura**, da un suo **utilizzo fuori dalle condizioni nominali** o da un **errata procedura** da parte dell'operatore;
- È un errore che **non** può essere eliminato con misure ripetute;
- È un errore che può essere **corretto** (controllando lo stato dello strumento o facendo le misure in modo corretto) o **compensato** (è sempre uguale a se stesso)

Errore accidentale

- Un errore accidentale dipende normalmente da **<u>variazioni casuali</u>** delle condizioni di misura;
- **<u>Non può essere compensato</u>**, ma **<u>può essere ridotto</u>** ripetendo la misura numerose volte.

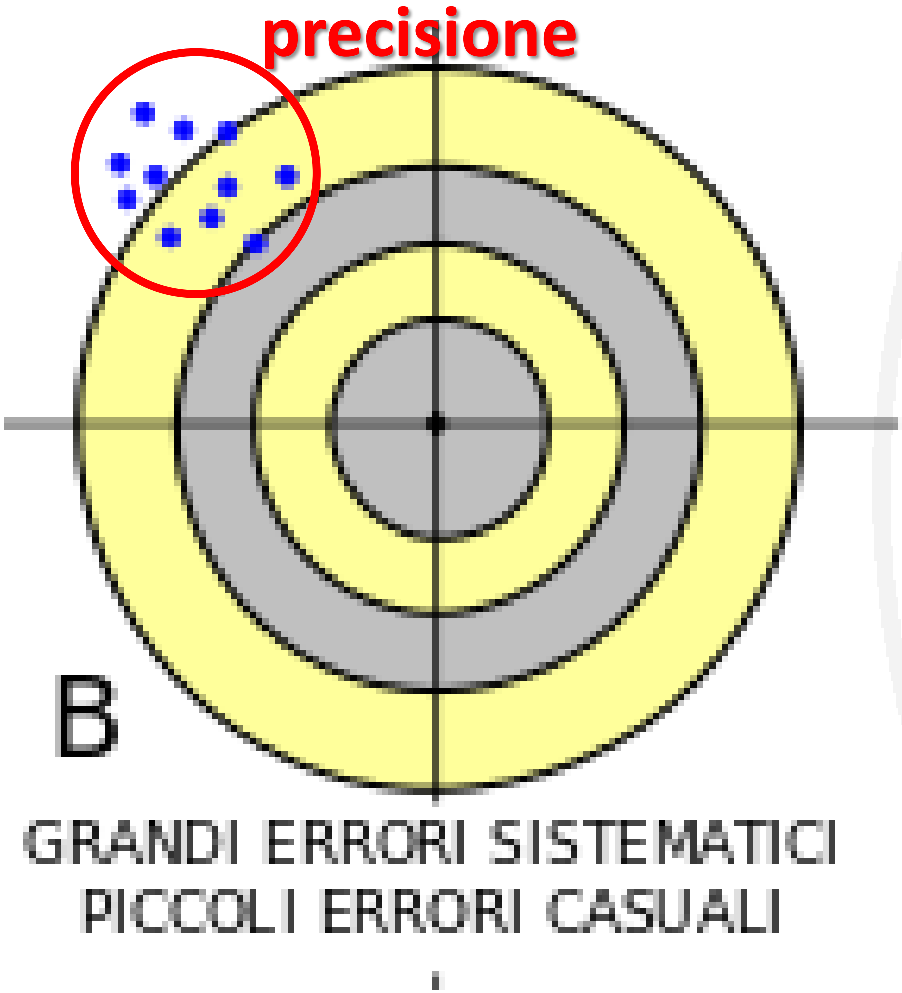
DEALAB

Effetto degli errori sulla misura



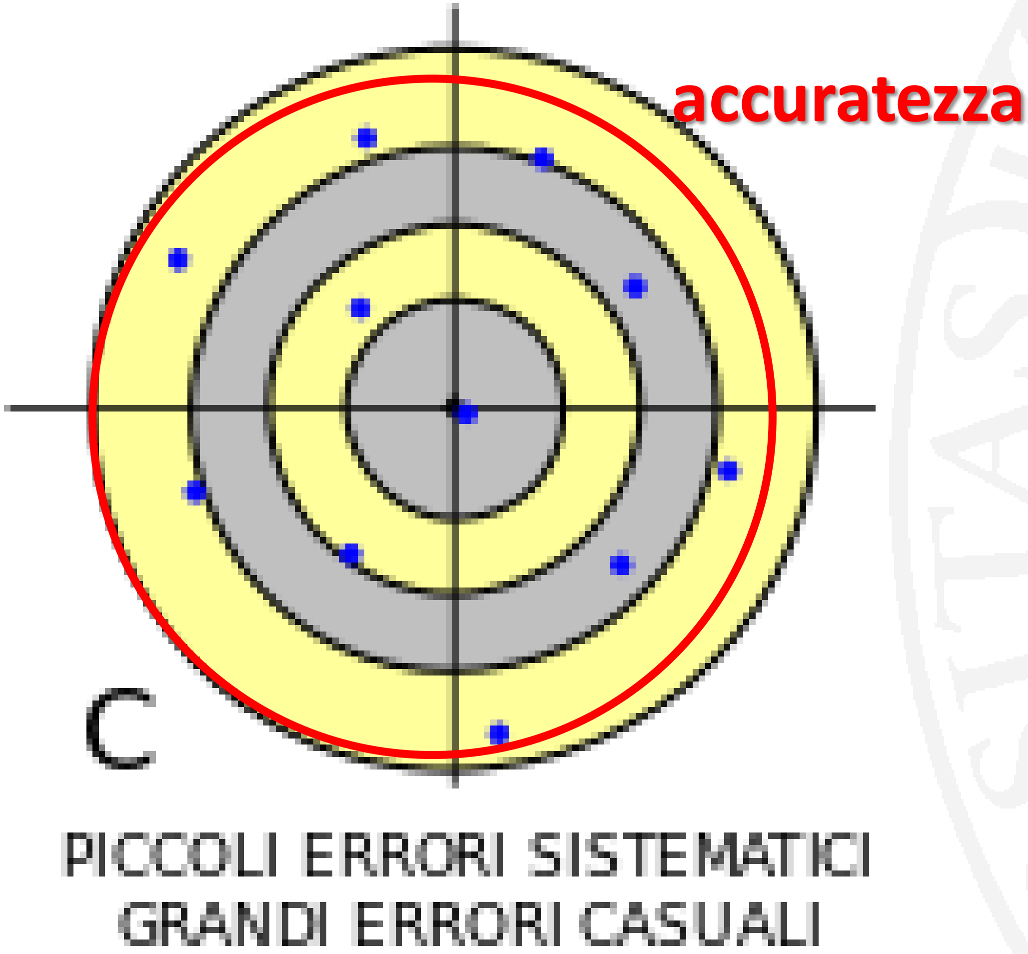
Phil «The Power» Taylor,
11 volte campione
mondiale di freccette

Effetto degli errori sulla misura



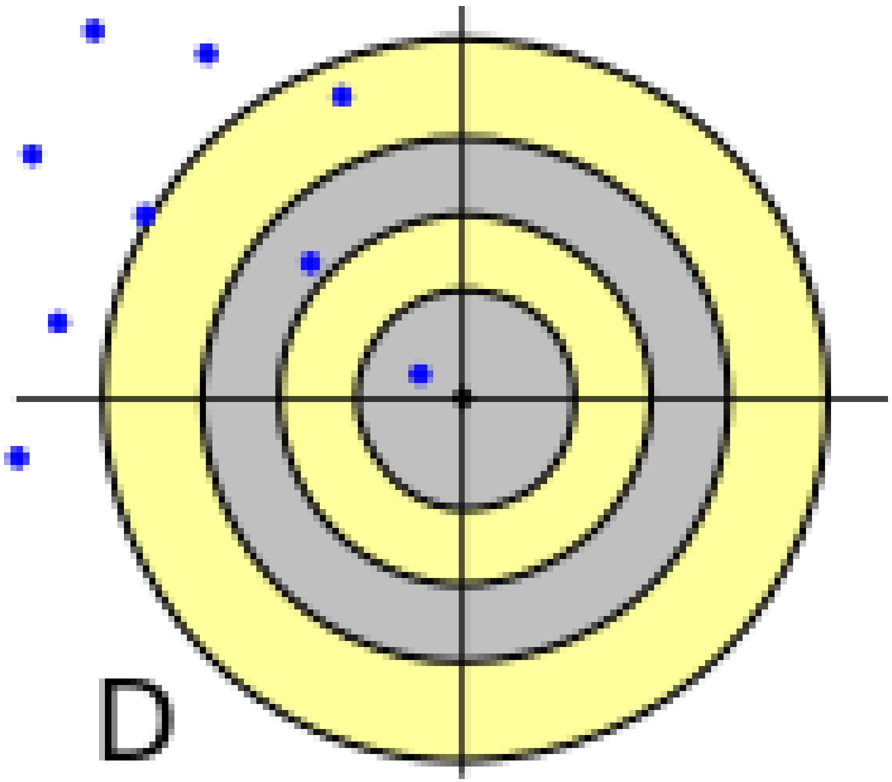
Ispettore Kemp

Effetto degli errori sulla misura



Io

Effetto degli errori sulla misura



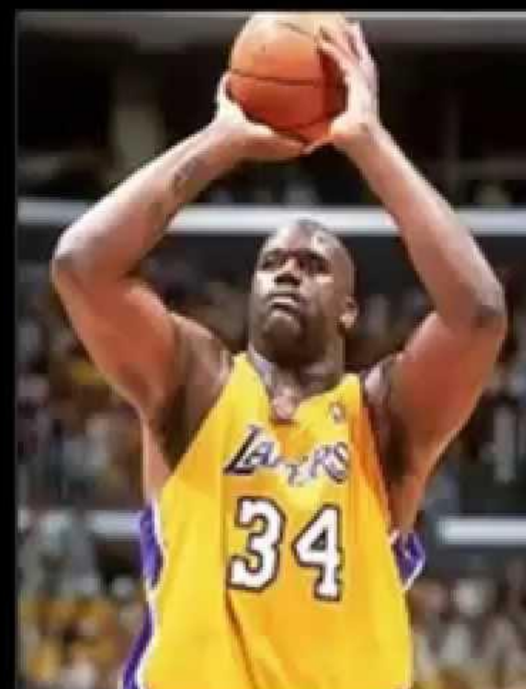
GRANDI ERRORI SISTEMATICI
GRANDI ERRORI CASUALI

Accuratezza vs. Precisione

- L'**accuratezza** è un indice dell'incertezza globale della misura: più piccola è complessivamente l'incertezza, più accurata è la misura. **Una misura è accurata se gli errori sistematici sono piccoli.**
- La **precisione** è indice di quanto una misura è riproducibile: più una misura è precisa, più i risultati sono simili tra loro. **Implica un piccolo errore casuale**.

Accuratezza vs. Precisione

Shaq was precise with free throws. He just wasn't accurate.



Rappresentare l'incertezza

- L'incertezza può essere rappresentata in modi diversi:
  - <u>**Incertezza assoluta**</u>: definita come differenza tra valore vero e valore misurato, ha la stessa dimensione del misurando:

$$\Delta X = X_{mis} - X_{vero}$$

  - <u>**Incertezza relativa**</u>: definita come il rapporto tra incertezza relativa e valore misurato, ed è quindi adimensionale:

$$dX = \Delta X / X_{mis}$$

  - <u>**Incertezza percentuale**</u>: $dX\% = 100 * dX$
- Esempio: una batteria fornisce una tensione di 5 V e incertezza assoluta di 0.5 V; tale dato viene rappresentato come **5±0.5 V** o come **5 V ±10%**

DEALAB

Rappresentare l'incertezza: cifre significative

- L'ordine di grandezza dell'incertezza definisce l'intervallo di tolleranza entro cui è possibile conoscere il valore della grandezza misurata;
- Una rappresentazione del misurando e dell'incertezza associata del tipo **5.473±0.341** non ha assolutamente senso! L'ordine di grandezza dell'errore è il decimo, quindi qualsiasi cifra del misurando sotto il decimo è del tutto insensata!

Rappresentare l'incertezza: cifre significative

- Per rappresentare correttamente l'errore di misura è necessario seguire delle regole precise:
  - Il numero di cifre significative dipende dall'incertezza;
  - Il numero di cifre significative da riportare per l'incertezza è due se la prima cifra è < 3, una altrimenti;
  - L'arrotondamento avviene per eccesso se la prima cifra da scartare è >= 5, per difetto altrimenti;
  - In caso di notazione scientifica, misurando e incertezza devono avere la medesima potenza.

Rappresentare l'incertezza: cifre significative

- Esempi:
  - 5.347 ± 0.321 diventa 5.3 ± 0.3
  - 11.127 ± 0.2123 diventa 11.13 ± 0.21
  - 0.0042345 ± 0.0001433 diventa $(4.23 \pm 0.14) \cdot 10^{-3}$

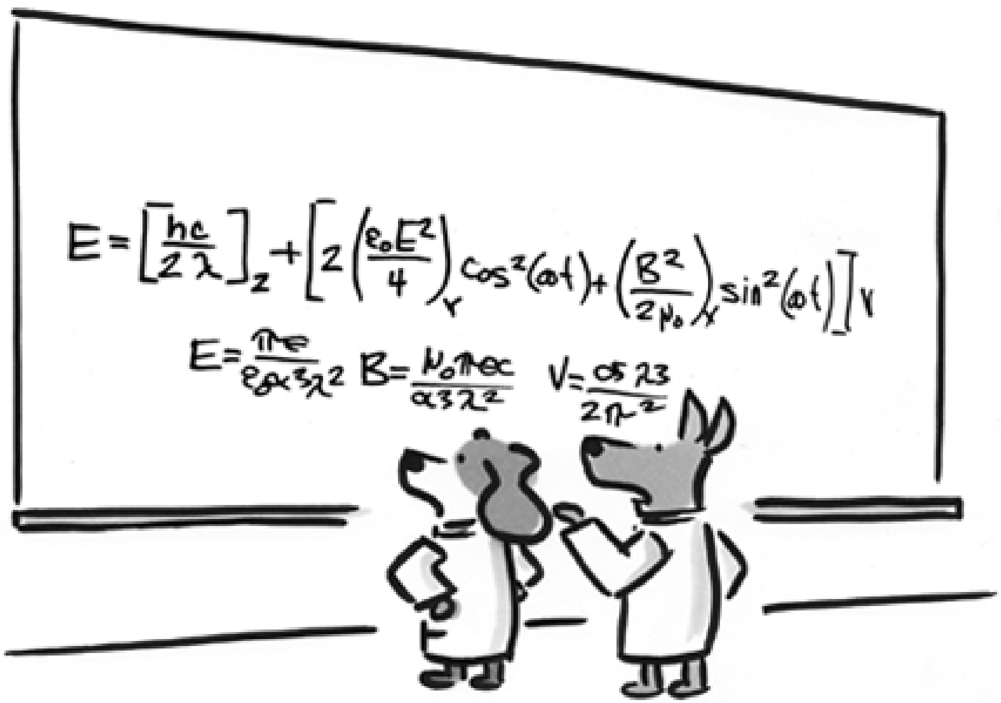
DEALAB

Rappresentare i dati sperimentali

- Adesso sappiamo cosa compone l'incertezza di misura e come rappresentarla…
- …**ma come possiamo ricavarla da una procedura di misura?**
- Il tutto dipende dalle caratteristiche stesse della procedura di misura: distinguiamo quindi tra:
  - <u>Misura diretta e misura indiretta</u>
  - <u>Misura singola e misura ripetuta</u>

DEALAB

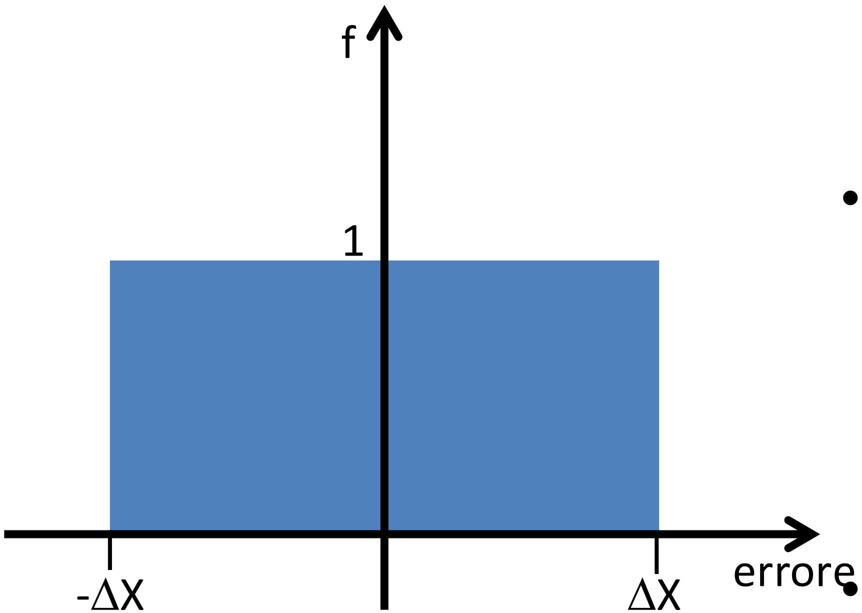
Assunto fondamentale



"There it is. You forgot to convert to dog years."

- Tutta la teoria dell'errore si basa sull'assunto che **non si commetta errore sistematico** , o che **si sia in grado sempre di compensarlo**
- Da qui in poi consideriamo l'incertezza come composta dall'**errore accidentale** ed, eventualmente (se rilevante) dalla **risoluzione dello strumento**.

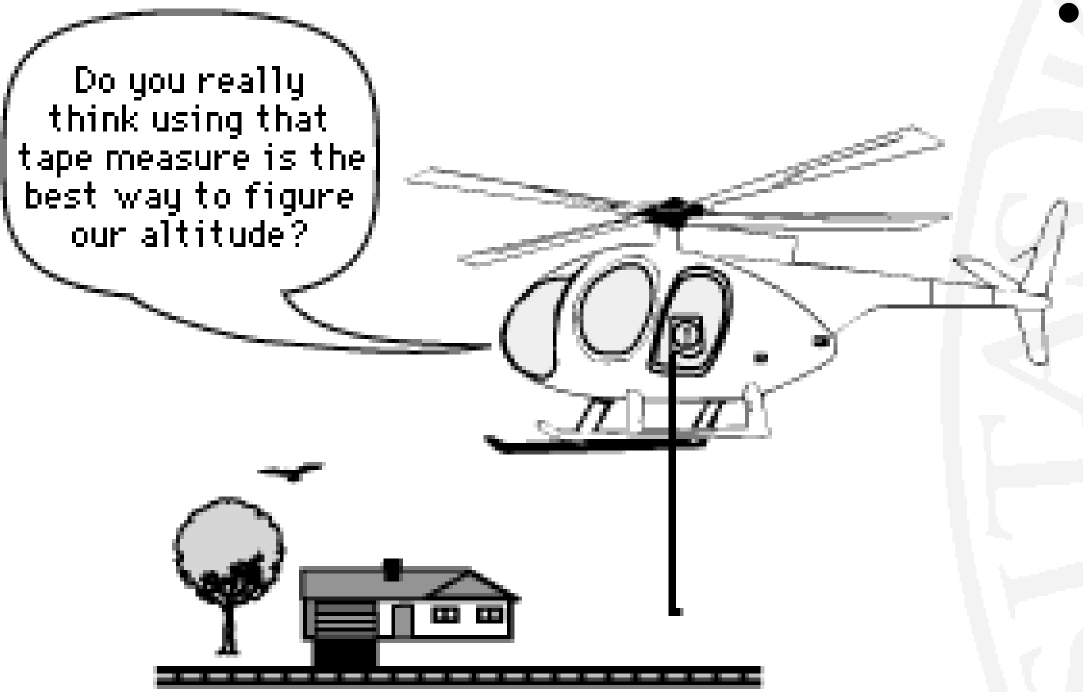
Misura diretta singola



$$f = \frac{\text{numero di volte in cui si presenta un certo valore}}{\text{numero misure compiute}} = \frac{n}{N}$$

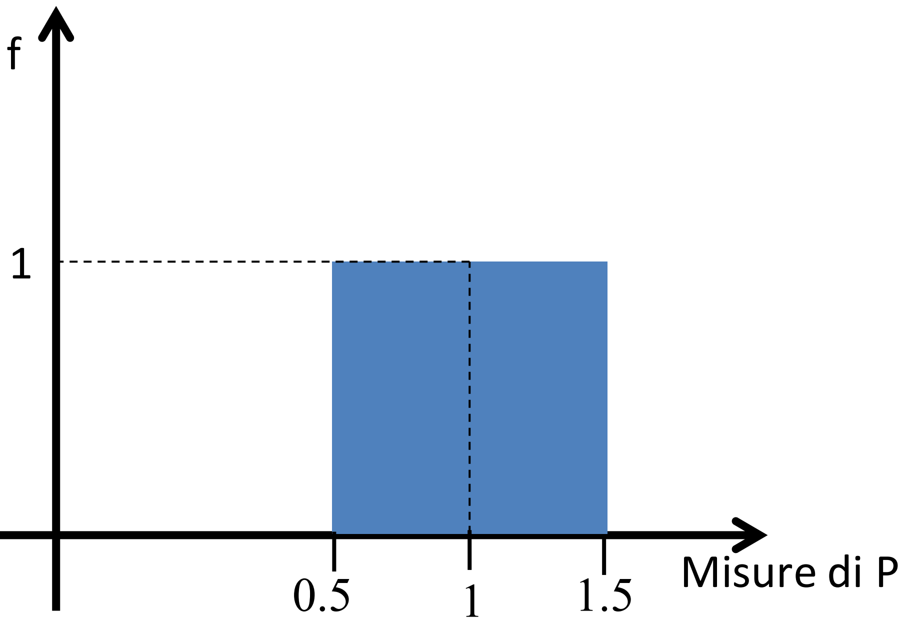
- È certamente il caso peggiore di tutti, in quanto non è possibile definire un'incertezza ulteriore a quella definita dallo strumento;
- <u>**Esempio:**</u>
  - Se la una bilancia opportunamente tarata ha una risoluzione pari a 1mg, allora la misura di 50mg di reagente chimico saranno rappresentati come 50±1 mg (o come 50±2% mg)
- L'errore così ottenuto viene detto <u>**errore massimo**</u>, in quanto tutti i valori assunti nell'intervallo di confidenza dello strumento sono ugualmente probabili.

Misura diretta ripetuta (con strumento inadeguato)



- L’errore massimo è utile per descrivere anche delle misure ripetute con uno strumento la cui risoluzione non consenta di valutare le fluttuazioni casuali della misura (errori accidentali).

Misura diretta ripetuta (con strumento inadeguato)

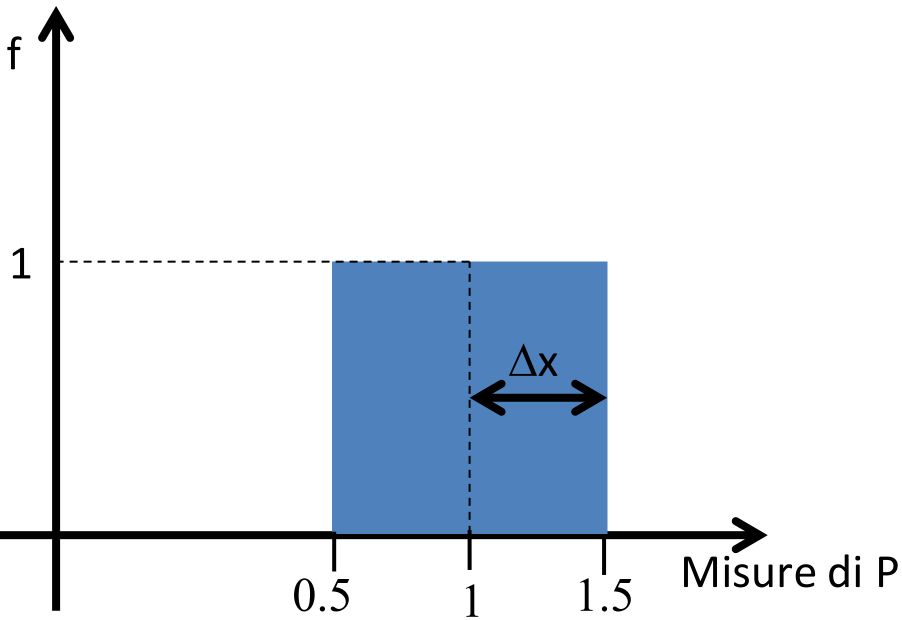


$$f = \frac{n}{N}$$

$$P_{tot} = \int_{-\Delta x}^{\Delta x} f dx = 1$$

- Supponiamo di voler misurare un pacco di zucchero da 1 kg con una bilancia avente una risoluzione pari a 1 kg, e di ripetere la misura 10 volte;
- Ciò che otterremmo sarebbe **P_i = 1 kg** con i = 1,…,10;
- La frequenza è **$f_i = 1\ \forall i$**, essendo **n = 10** e **N = 10;**
- Dovendo essere la probabilità totale pari a 1, questo definisce l'ampiezza dell'errore associato alla misura.

Misura diretta ripetuta (con strumento inadeguato)

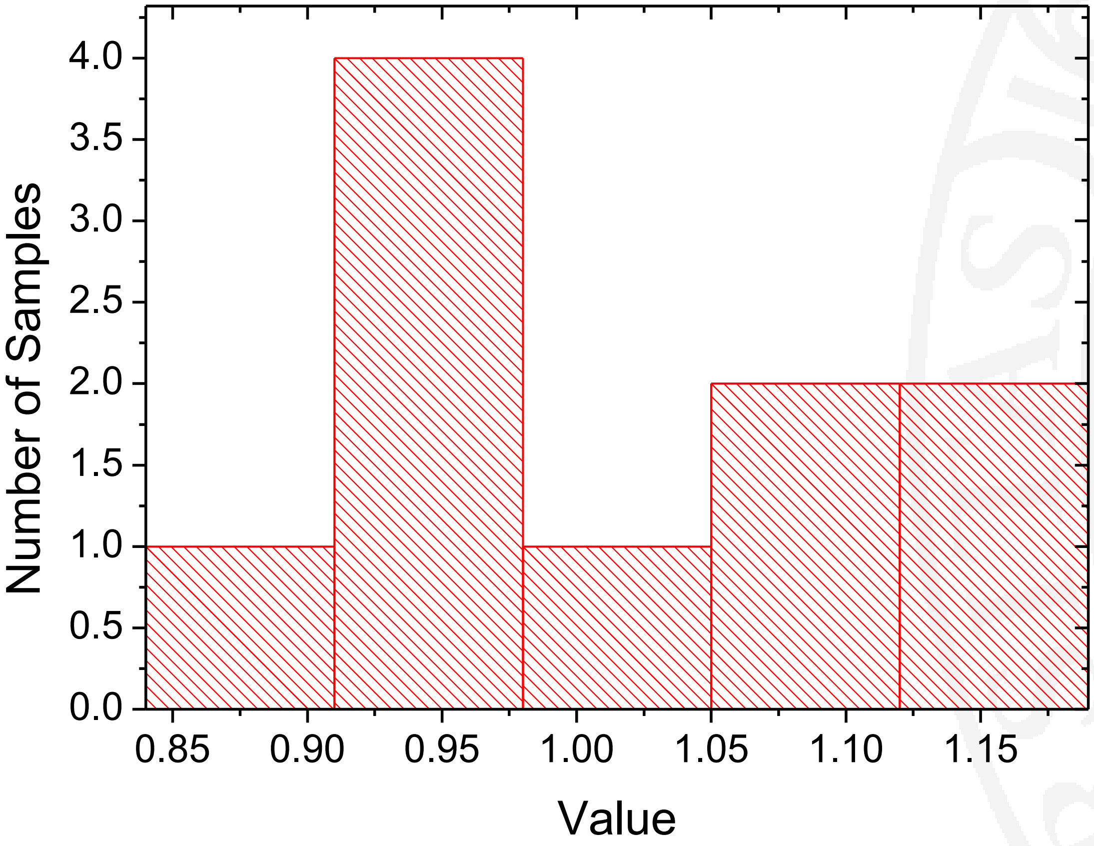


$$f = \frac{n}{N}$$

$$P_{tot} = \int_{-\Delta x}^{\Delta x} f dx = 1$$

- Supponiamo di voler misurare un pacco di zucchero da 1 kg con una bilancia avente una risoluzione pari a 1 kg, e di ripetere la misura 10 volte;
- Ciò che otterremmo sarebbe **P_i = 1 kg** con i = 1,…,10;
- La frequenza è **$f_i = 1\ \forall i$**, essendo **n = 10** e **N = 10;**
- Dovendo essere la probabilità totale pari a 1, questo definisce l'ampiezza dell'errore associato alla misura.

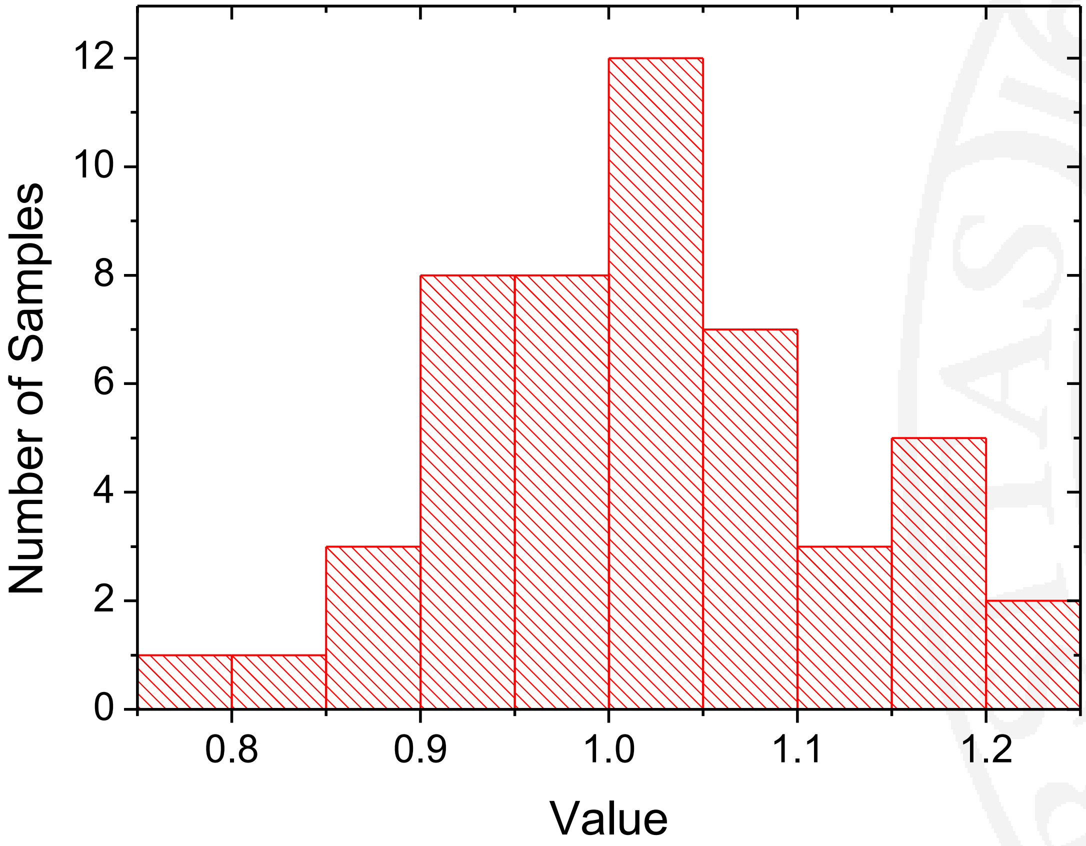
Misura diretta ripetuta



- Supponiamo ora di ripetere la misura ripetuta del pacco di zucchero con una bilancia avente la risoluzione del mg.
- Ripetiamo la misura:
  - 10 volte;

DEALAB

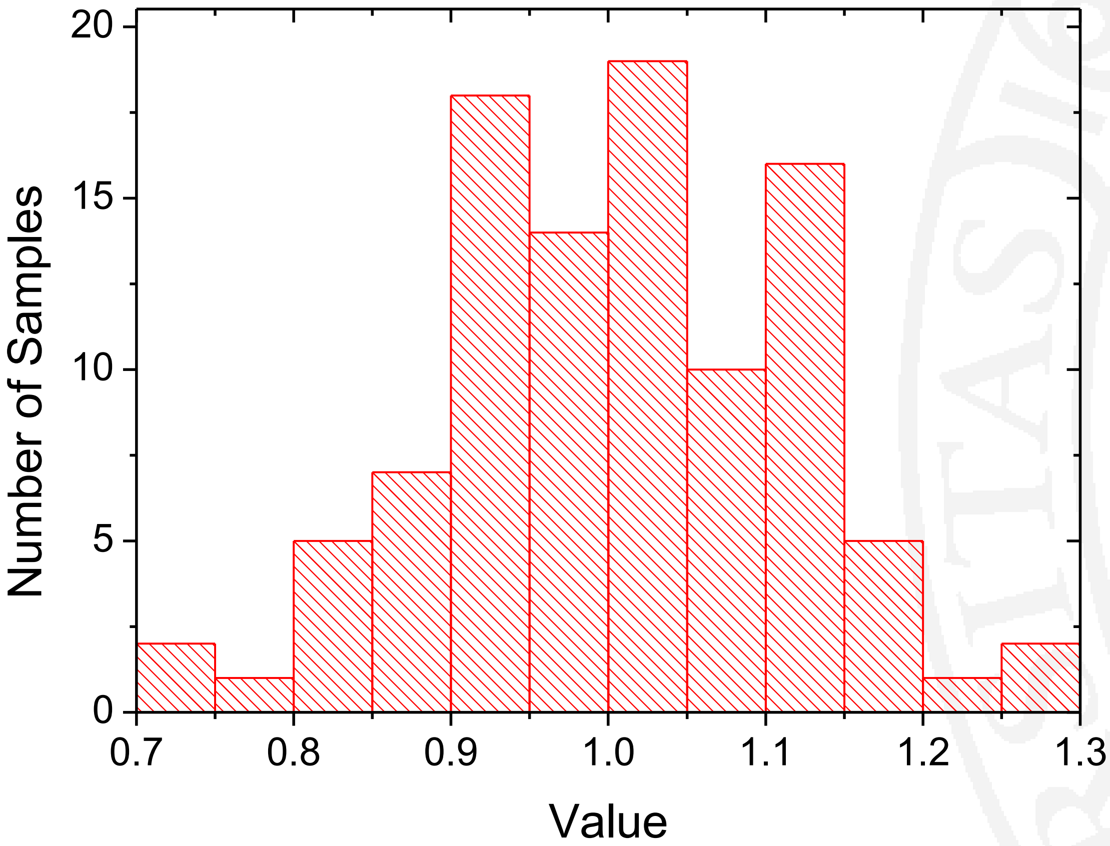
Misura diretta ripetuta



- Supponiamo ora di ripetere la misura ripetuta del pacco di zucchero con una bilancia avente la risoluzione del mg.
- Ripetiamo la misura:
  - 10 volte;
  - 50 volte;

DEALAB

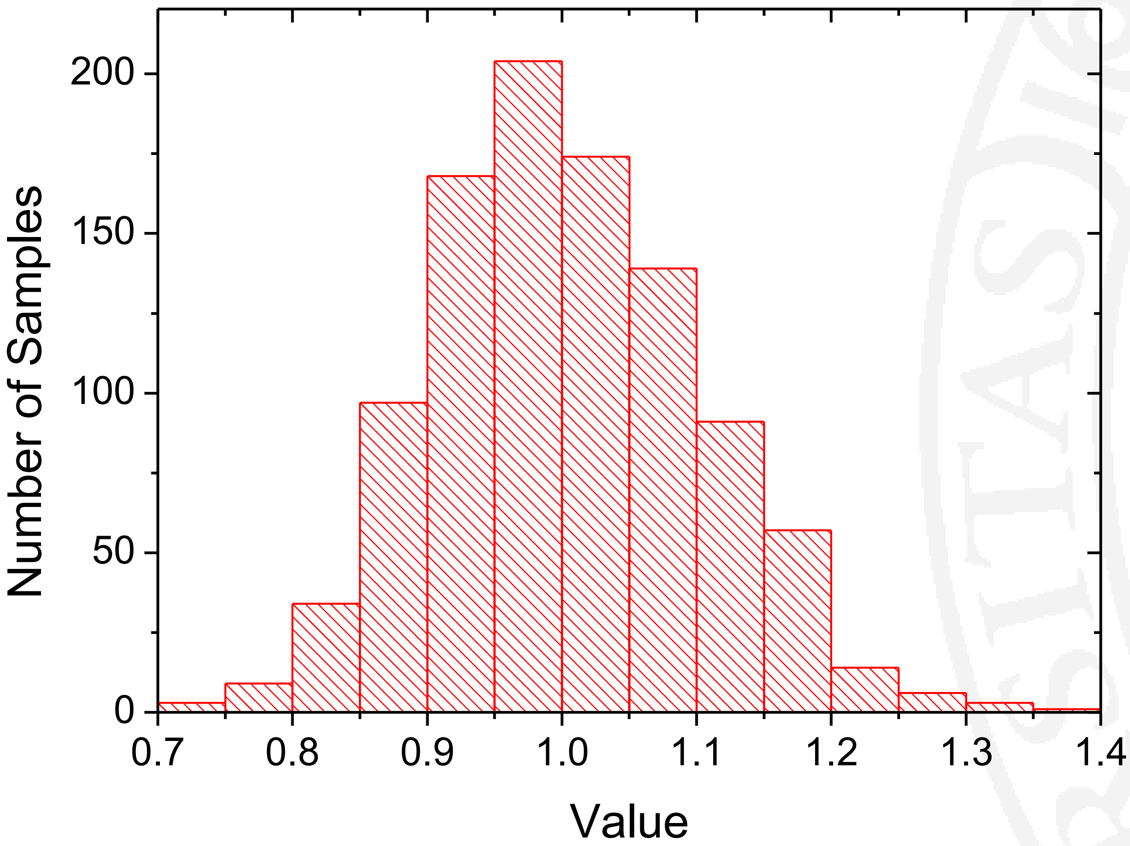
Misura diretta ripetuta



- Supponiamo ora di ripetere la misura ripetuta del pacco di zucchero con una bilancia avente la risoluzione del mg.
- Ripetiamo la misura:
  - 10 volte;
  - 50 volte;
  - 100 volte;

DEALAB

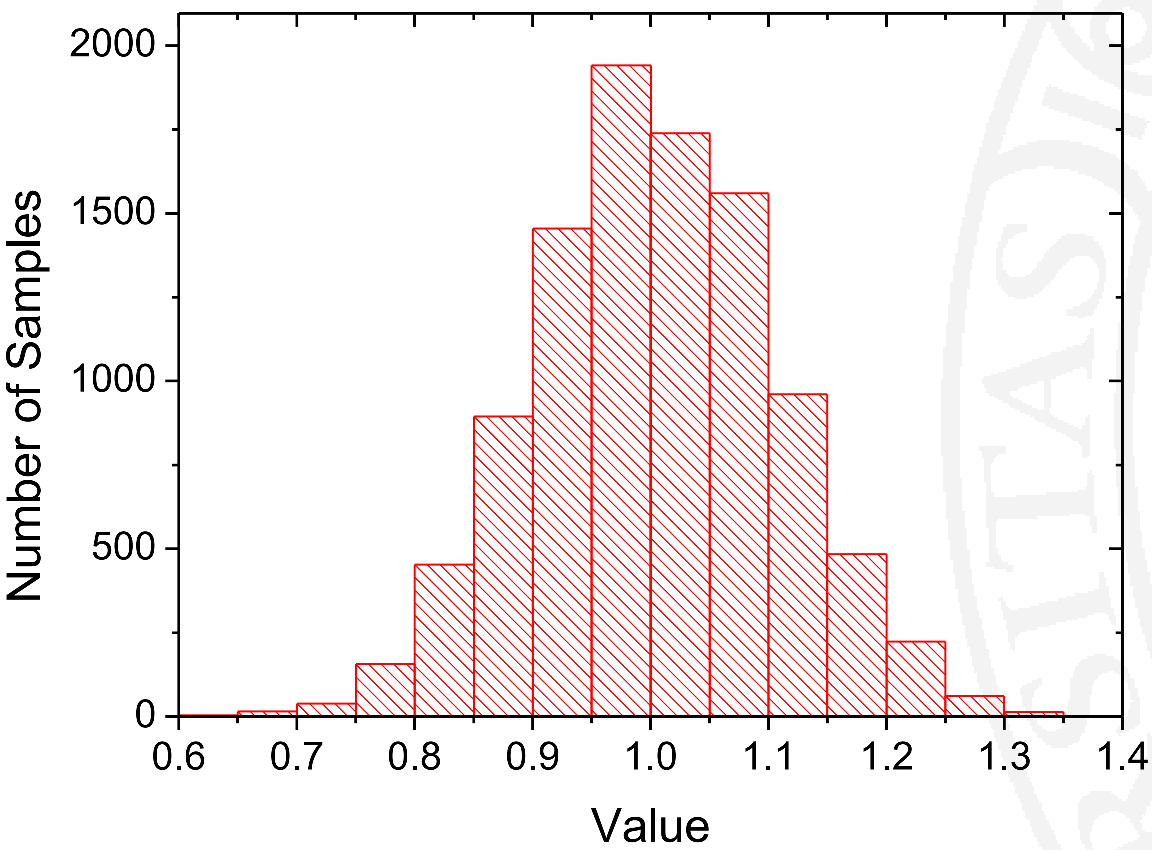
Misura diretta ripetuta



- Supponiamo ora di ripetere la misura ripetuta del pacco di zucchero con una bilancia avente la risoluzione del mg.
- Ripetiamo la misura:
  - 10 volte;
  - 50 volte;
  - 100 volte;
  - 1000 volte;

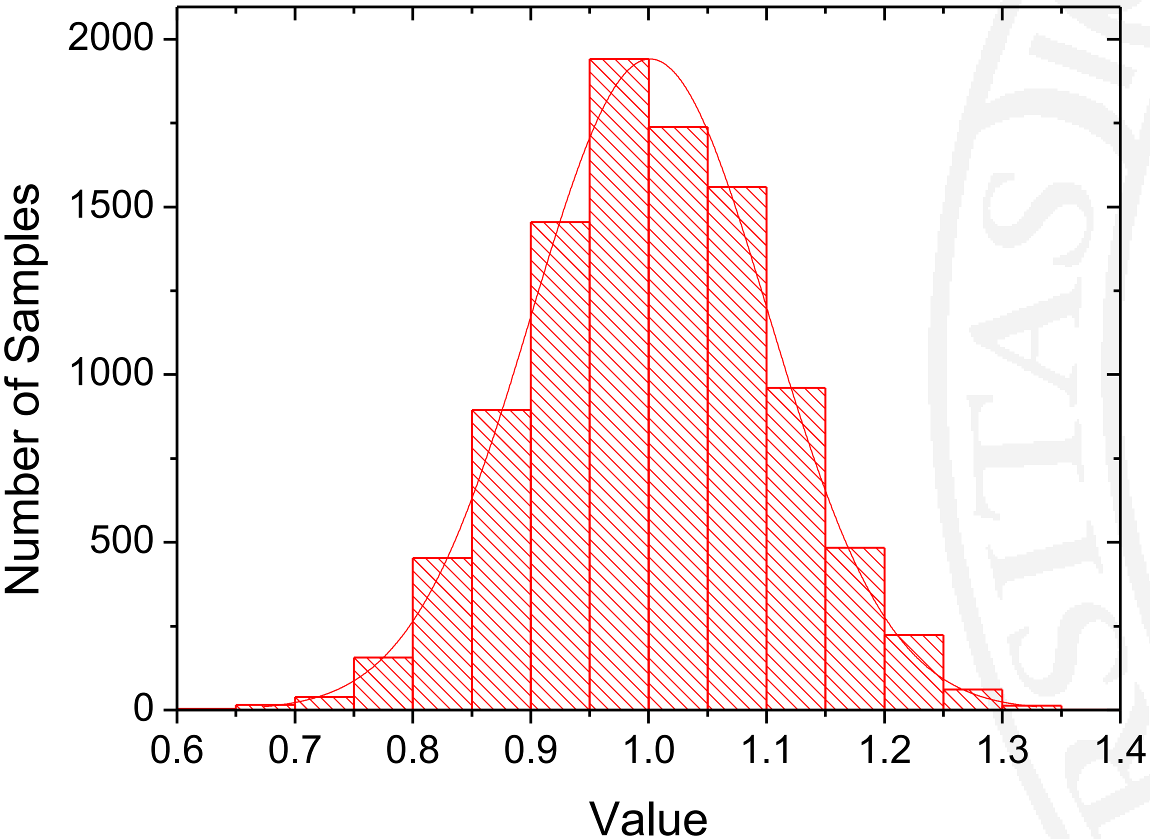
DEALAB

Misura diretta ripetuta



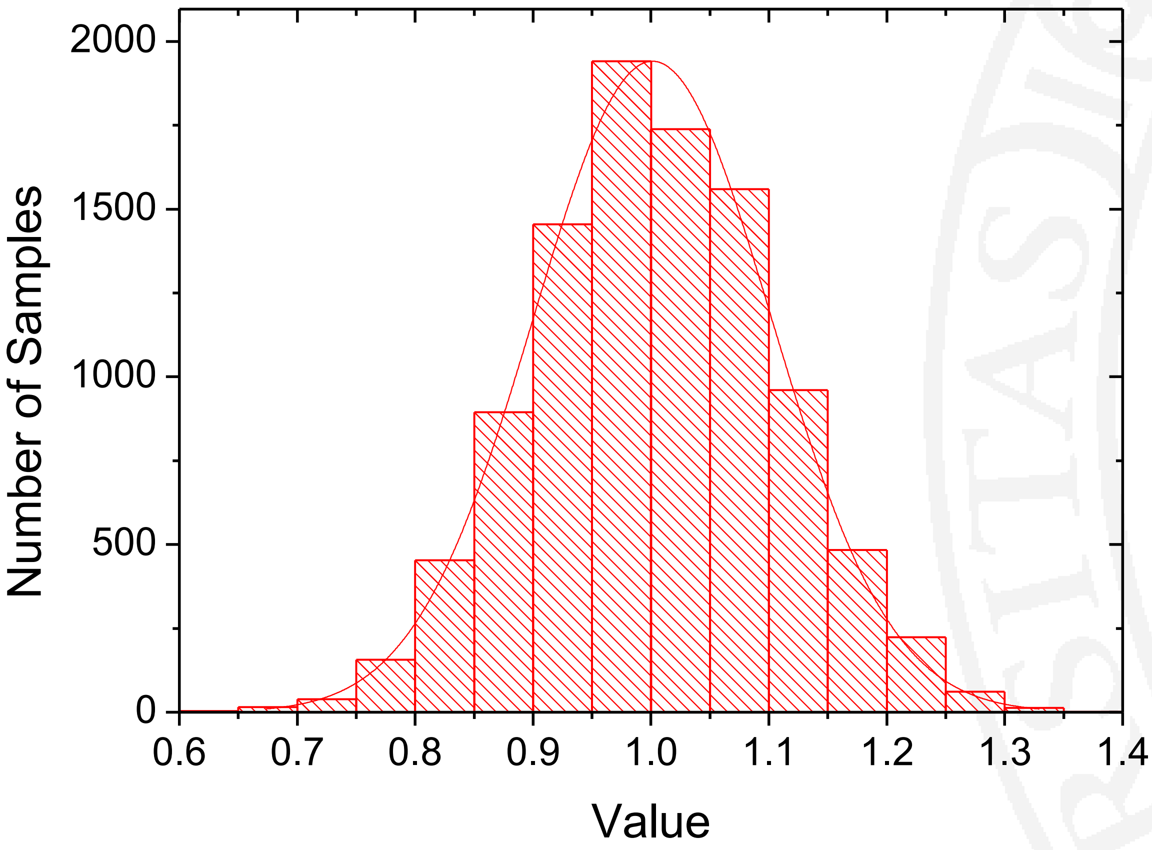
- Supponiamo ora di ripetere la misura ripetuta del pacco di zucchero con una bilancia avente la risoluzione del mg.
- Ripetiamo la misura:
  - 10 volte;
  - 50 volte;
  - 100 volte;
  - 1000 volte;
  - 10000 volte.

Distribuzione limite



- Quello che notiamo è che in nessuno dei casi si ottiene f = 1, benché ciascun valore compaia più volte;
- La curva assume un andamento a campana, con un **massimo** corrispondente al valore che compare più spesso (x_c); gli **scarti** ($x-x_c$) tendono a zero al distanziarsi di x da x_c, ovvero diventano sempre meno frequenti;
- Per un numero infinito di misure, si ottiene la distribuzione limite, che viene detta normale (o gaussiana)

Distribuzione limite



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-x_c)^2}{2\sigma^2}\right]$$

- **x_c** è il centro della gaussiana;
- **σ** è la **confidenza**, e rappresenta l'ampiezza della curva;
- **f(x)** rappresenta la **probabilità** (**normalizzata**) che la misura ricada in un certo intervallo (x, x+dx)
- La probabilità è **massima** in x = x_c, che è quindi la migliore stima di x.

Intervalli di confidenza

r	$P_{interna}$ (%)	$P_{esterna}$ (%)
0.674	50	50
1	68	32
2	95.4	4.6
3	99.7	0.3
4	99.99	0.01

- La probabilità di trovare una misura all'interno di un intervallo $(x_c-r\sigma, x_c+r\sigma)$ si ricava mediante integrazione, e definisce diversi intervalli di confidenza;
- Normalmente si fa riferimento alla confidenza di σ, che comporta un livello di confidenza del 68%; negli intervalli $x_c \pm 2\sigma$ e $x_c \pm 2\sigma$ tale probabilità sale al 95.4% e 99.7% rispettivamente.

Criterio di Chauvenet

- Gli intervalli di confidenza forniscono anche un utile strumento con cui «ripulire» le misure da valori particolarmente diversi dalla media;
- Se indichiamo con x_{SOS} un valore particolarmente «sospetto», e con $|x_{SOS}-x_m|$ la sua distanza relativa dal valore medio, il rapporto

$$\frac{|x_{sos} - x_m|}{\sigma}$$

  definisce in quale intervallo di incertezza questo valore cade, e quindi consente di determinare con quale probabilità questo valore sarà esterno alla banda di confidenza;
- Moltiplicando $P_{esterna}$ per il numero di misure N, si ricava un valore *n*; convenzionalmente, se questo valore è < 0.5, allora la misura può essere scartata

Criterio di Chauvenet

- Esempio:
  - Consideriamo un insieme di N = 100 misure avente $x_m = 1$ e $\sigma = 0.1$, e sia $x_{SOS} = 0.7$;
  - $|x_{SOS}-x_m| = 0.3$, e $0.3/\sigma = 3$; la misura ricade nell'intervallo 3σ, in cui $P_{esterna} = 0.3\% = 0.003$;
  - $n = N \times P_{esterna} = 100 \times 0.003 = 0.3 < 0.5$
  - Il dato è trascurabile!

DEALAB

Momenti della gaussiana

- Come si ricavano i valori di x_c e σ?
  - x_c è il **<u>valore medio</u>** delle misure, x_m

$$x_c = x_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

  - la **<u>miglior stima</u>** di σ è la **<u>deviazione standard</u>**, σ_x

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - x_m)^2}{N-1}}$$

Momenti della gaussiana - media

$$x_c = x_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

- La media ha un errore minore di quello associato alle singole misure; questo errore diminuisce al crescere di N, ma è sempre vincolato alla precisione dello strumento utilizzato.

DEALAB

Media pesata

- Se esistono determinazioni diverse del misurando, caratterizzate da diversi valori di incertezza, allora la miglior stima è ben fornita dalla **media pesata** dei x_i per le incertezze dx_i.

$$x_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i}, \text{con } w_1 = \frac{1}{dx_i^2}$$

DEALAB

Media pesata

- Se esistono determinazioni diverse del misurando, caratterizzate da diversi valori di incertezza, allora la miglior stima è ben fornita dalla **media pesata** dei x_i per le incertezze dx_i.

$$x_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i}, \text{con } w_1 = \frac{1}{dx_i^2}$$

Momenti della gaussiana – deviazione standard

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_m)^2}{N-1}}$$

- La deviazione standard rappresenta la media degli scarti al quadrato; gli scarti rappresentano la distanza di ciascuna misura dalla media. Gli scarti hanno sempre media nulla, per quello si elevano al quadrato!
- La deviazione standard fornisce un **indice di dispersione della misura**, ma **non** l'errore associato al valore medio;

DEALAB

Momenti della gaussiana – errore della media

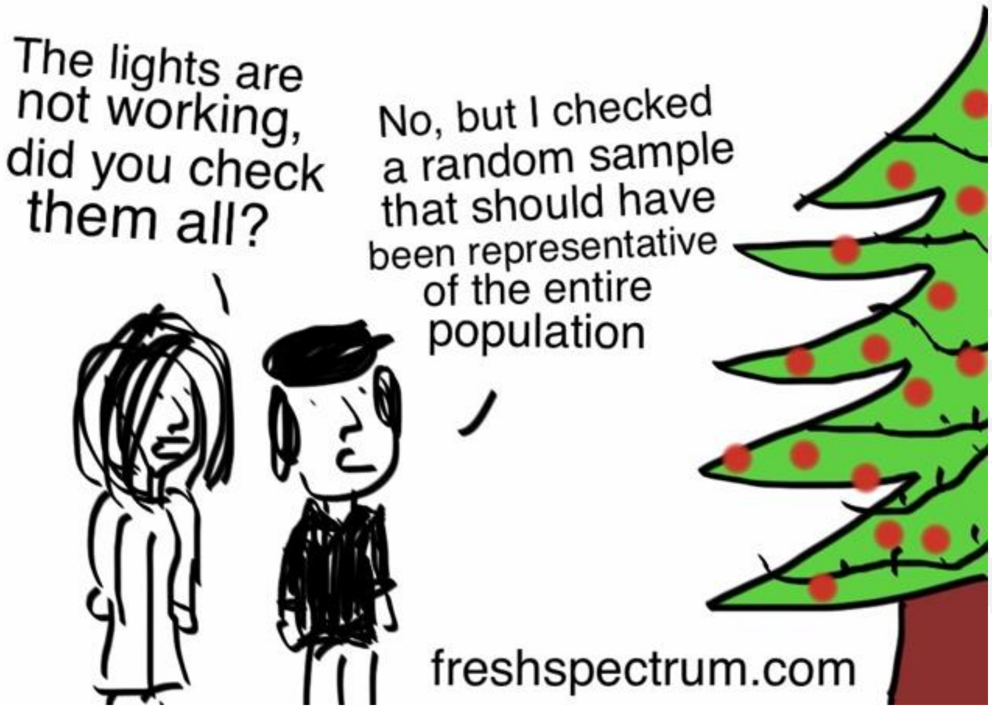
$$dx_m = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

- Rappresenta l'incertezza da associare al valore medio;
- Il risultato della serie di misure quindi si rappresenta come

$$X = x_m \pm dx_m$$

DEALAB

Misure dirette ripetute su campioni NON statistici



- Nelle ultime slide abbiamo trattato la rappresentazione **statistica** dei dati;
- Non sempre, tuttavia, è possibile compiere misure su un insieme statisticamente rilevante, per cui l'utilizzo dei momenti non è sempre la cosa più corretta.

DEALAB

Misure dirette ripetute su campioni NON statistici

$$x_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

$$dx_m = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - x_m)^2}{N-1}}}{\sqrt{N}} & N \geq 10 \\ \dfrac{x_{max} - x_{min}}{2} & N \leq 3 \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - x_m|}{N} & 3 < N < 10 \end{cases}$$

- In questi casi, la **<u>media</u>** resta sempre un indicatore della migliore stima;
- Per quanto riguarda l'incertezza, invece, si considera valido l'utilizzo dell'**<u>errore statistico</u>** della media se il numero di misure è **<u>N ≥ 10</u>**;
- Per **<u>N ≤ 3</u>**, si assume come incertezza la **<u>semidispersione massima</u>**;
- Per **<u>3 < N < 10</u>** si considera come incertezza l'**<u>errore medio</u>**.

Utile schemino riassuntivo

calcolo media : $x_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$

N ≤ 3 → $dx_m : \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$

3< N < 10 → $dx_m : \frac{\sum_{i=1}^{N} |x_i - x_m|}{N}$

N ≥ 10 ↓

calcolo dev. standard : $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - x_m)^2}{N-1}}$

↓

Posso scartare punti? (principio di Chauvenet)

NO → $dx_m : \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$

SI ↓

Scarto punti

(→ calcolo media)

Misure indirette

- Una grandezza fisica f viene misurata indirettamente se il suo valore dipende matematicamente dal valore di una serie di grandezze fisiche direttamente accessibili

$$\mathbf{f(x_1, x_2, \ldots, x_N)}$$

- Nel caso in cui una grandezza fisica non sia direttamente misurabile, è necessario capire come ricavare l'incertezza a partire dalla conoscenza dell'incertezza di ciascuna componente.

DEALAB

Propagazione delle incertezze

- La composizione delle incertezze in forma statistica è più complessa, e dipende dal numero di misure compiute, dalle condizioni in cui queste sono state compiute e dalla natura fisica del misurando;
- Riconosciamo due forme fondamentali:
  - Propagazione degli errori statistica (o in quadratura)
  - Propagazione dell’errore massimo.

Propagazione in quadratura delle incertezze

- Se la misura di ciascuna x_i è stata compiuta su un campione statisticamente rilevante ($N \geq 10$), allora l'incertezza associata a $f(x_1,\ldots,x_N)$ è data dalla relazione

$$df\left(x_1,\ldots,x_N\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 dx_i^2+2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_{ij}}$$

Termine che dipende dalle incertezze delle singole componenti (indipendenti)

Termine che dipende dalla eventuale correlazione tra le componenti

Propagazione dell'errore massimo

- La propagazione dell'errore massimo viene usata nei seguenti casi:
  - Ciascun x_i misurato con uno strumento inadeguato (risoluzione troppo bassa);
  - Se si ha ragione di credere che le incertezze di x_i non tendono a compensarsi;
  - Non tutti gli x_i siano stati misurati su campioni statistici (incertezza definita mediante semiscarto massimo o errore medio);

Propagazione dell'errore massimo

- In questi casi, l'incertezza di $f(x_1,\dots,x_N)$ è

$$df\left(x_1,\dots,x_N\right)=\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|dx_{mi}$$

- Questa formula definisce necessariamente una stima pessimistica dell'incertezza (sarà sempre maggiore o uguale all'incertezza in quadratura corrispondente;
- Nel caso in cui alcuni xi siano conosciuti statisticamente, è bene non usare l'incertezza sulla media per questi valori ma l'errore massimo (semiscarto massimo o errore medio).

Esercizi – rappresentazione dei numeri

- $v = 8.123456 \pm 0.0312$ m/sec
  - $v = (81.2 \pm 0.3) \times 10^{-1}$ m/sec
- $l = 3.1234 \times 10^{4} \pm 2$ m
  - $l = (3.1234 \pm 0.0002) \times 10^{4}$ m
- $m = 5.6789 \times 10^{-7} \pm 3 \times 10^{-9}$ kg
  - $m = (5.68 \pm 0.03) \times 10^{-7}$ kg
- $\lambda = 0.000000563 \pm 0.00000007$ m
  - $\lambda = (56 \pm 7) \times 10^{-8}$ m
- $t = 1234567 \pm 54321$ sec
  - $t = (123 \pm 5) \times 10^{4}$ sec

Esercizio 1

Per trovare la velocità di un carrello che si muove su una rotaia, uno studente misura la distanza d percorsa e il tempo t impiegato:

$d = 5.10 \pm 0.01$ m; $t = 6.02 \pm 0.02$ sec

- Quale è la miglior stima per v, e la sua incertezza (considerando gli errori indipendenti e casuali)
- Se la massa del carrello è $m = 0.711 \pm 0.002$ kg, quale sarà la quantità di moto e la relativa incertezza?

Esercizio 1

1)

$$v = \frac{s}{t} = 0.847176 \qquad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{t} = 0.166113 \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{s}{t^2} = 0.14072$$

$$dv = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial d}\right)^2 (ds)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 (dt)^2} = 0.003268$$

$$v = 0.847 \pm 0.003\ m/\sec$$

2)

$$q = mv = 0.602342$$

$$\frac{\partial q}{\partial m} = v = 0.847176 \qquad \frac{\partial q}{\partial v} = m = 0.711$$

$$dq = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial m}\right)^2 dm^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2 dv^2} = 0.428269$$

$$q = 0.6 \pm 0.4$$

Esercizio 2

- Si misura il diametro di un disco circolare come $d = 6.0 \pm 0.1$ cm e si usa questo valore per calcolare la circonferenza $c = \pi d$ e raggio $r = d/2$. Calcolare la miglior stima e l'incertezza.
- Usare stima e incertezza del raggio per calcolare stima e incertezza sul volume di una sfera avente quello come raggio.

Esercizio 2

1)

$$c = \pi d = 18.84956\ cm$$

$$\frac{\partial c}{\partial d} = \pi$$

$$dc = \sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial d}\right)^2 dd^2} = 0.314159\ cm$$

$$c = 18.8 \pm 0.3\ cm$$

$$r = \frac{d}{2} = 3\ cm$$

$$\frac{\partial r}{\partial d} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$dr = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial d}\right)^2 dd^2} = 0.05\ cm$$

$$r = 3 \pm 0.05\ cm$$

2)

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 113.0973\ cm^3$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{4}{9}\pi r^2 = 12.55637\ cm^2$$

$$dV = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 dr^2} = 0.628319$$

$$V = 113.1 \pm 0.6\ cm^3$$

Esercizio 3

Uno studente vuole verificare la resistenza di un resistore misurando il voltaggio V e la corrente I, e poi calcolando al resistenza come R = V/I.

Misura quattro valori diversi di V e I:

V	11.2	13.4	15.1	17.7 (V)
I	4.67	5.46	6.28	7.22 (A)

- Quale è la miglior stima di R e la componente casuale della sua incertezza?
- Lo studente scopre che tutti gli strumenti che ha usato hanno un errore sistematico del 2% in eccesso. Quale è il risultato finale?

Esercizio 3

1)

$$V_m = 14.35 \text{ V} \qquad \text{dV} = \frac{\sum_{i=1}^{4} |V_i - V_m|}{4} = 2.05\ V$$

$$I_m = 5.9075 \text{ A} \qquad \text{dA} = \frac{\sum_{i=1}^{4} |V_i - V_m|}{4} = 0.8425\ A$$

$$R_m = \frac{V_m}{I_m} = 2.429116\ \Omega$$

$$\frac{\partial R_m}{\partial V_m} = \frac{1}{I_m} \qquad \frac{\partial R_m}{\partial I_m} = -\frac{V_m}{I_m^2}$$

$$dR_m = \left|\frac{\partial R_m}{\partial V_m}\right| dV_m + \left|\frac{\partial R_m}{\partial I_m}\right| dI_m = 0.69344\ \Omega$$

$$R_m = 2.4 \pm 0.7\ \Omega$$

Esercizio 3

- L'errore sistematico non modifica la miglior stima della resistenza, se è in eccesso sia sulla tensione che sulla corrente: infatti

$$R_m = \frac{V_m'}{I_m'} = \frac{\sum_{i=1}^{N} 0.98V_i}{\sum_{i=1}^{N} 0.98I_i} = \frac{0.98V_m}{0.98I_m} = R_m$$

- Anche le singole incertezze massime vengono sovrastimate:

$$dV_m' = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(V_m' - 0.98V_i\right)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(0.98V_m - 0.98V_i\right)}{N} = 0.98\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(V_m - V_i\right)}{N} = 0.98dV_m$$

$$dI_m' = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(I_m' - 0.98I_i\right)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(0.98I_m - 0.98I_i\right)}{N} = 0.98\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(I_m - I_i\right)}{N} = 0.98dI_m$$

- Applicando la propagazione dell'errore massimo:

$$dR_m' = \left|\frac{\partial R_m'}{\partial V_m'}\right| dV_m' + \left|\frac{\partial R_m'}{\partial I_m'}\right| dI_m' = \frac{1}{I_m'}dV_m' + \frac{V_m'}{\left(I_m'\right)^2}dI_m' = \frac{1}{0.98I_m}0.98dV_m + \frac{0.98V_m}{0.98^2 I_m^2}0.98dI_m = \frac{1}{I_m}dV_m + \frac{V_m}{I_m^2}dI_m = dR_m$$

DEALAB

Esercizio 4

- Una stessa resistenza viene misurata con tre strumenti differenti, che consentono di ottenere i seguenti risultati:

  $R_1 = 11 \pm 1\ \Omega$, $R_2 = 12 \pm 1\ \Omega$, $R_3 = 10 \pm 3\ \Omega$

- Calcolare la miglior stima di R, e la sua incertezza

Esercizio 4

$$w_1 = \frac{1}{(dR_1)^2} = 1 \quad w_2 = \frac{1}{(dR_2)^2} = 1 \quad w_3 = \frac{1}{(dR_3)^2} = \frac{1}{9}$$

$$R_m = \frac{w_1 R_1 + w_2 R_2 + w_3 R_3}{w_1 + w_2 + w_3} = \frac{11 + 12 + \frac{10}{9}}{2 + \frac{1}{9}} = 11.42\ \Omega$$

- L'incertezza si calcola usando la propagazione dell'errore, in cui la relazione di R_m è ovviamente quella della media pesata:

$$\frac{\partial R_m}{\partial R_i} = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i}$$

$$dR_m = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial R_m}{\partial R_i}\right)^2 dR_i^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(w_i dR_i)^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} w_i\right)^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{dR_i^2} dR_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} w_i\right)^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{dR_i^2}}{\left(\sum_{i=1}^{N} w_i\right)^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} w_i}{\left(\sum_{i=1}^{N} w_i\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} w_i}} = \frac{1}{\sqrt{1+1+\frac{1}{9}}} = 0.69\ \Omega$$

$$R_m = 11.4 \pm 0.7\ \Omega$$

DEALAB

Esercizio 5

- Si compiono 10 acquisizioni di lunghezza (in cm): 12, 13, 18, 13, 19, 26, 21, 18, 17, 18. Si valuti la possibilità di escludere il valore 26 cm.
  - Calcoliamo la media e la deviazione standard di tale insieme: $x_m = 17.5$ cm e $\sigma_x = 4.2$ cm.
  - Il rapporto $|26\text{-}x_m|/\sigma_x$ vale circa 2, per cui dai valori tabulati si ricava $P_{esterna} = 0.046$
  - Si ottiene $n = N \times P_{esterna} = 0.46 < 0.5$, quindi il punto può essere escluso.

DEALAB

Esercizi

1. Di un triangolo rettangolo sono note la base $b = 5.1 \pm 0.1$ cm e l'altezza $h = 2.2 \pm 0.2$ cm; ricavare la miglior stima e l'incertezza per l'area (assumendo le incertezze su b e h di tipo statistico);
2. Uno studente trova l'indice di rifrazione n di un pezzo di vetro misurando l'angolo critico θ per la luce al passaggio tra vetro e aria. Se ricava $\theta = 41 \pm 1°$, sapendo che $n = 1/\sin\theta$, ricavare la miglior stima di n, l'incertezza statistica associata e l'errore massimo.
3. Si vuole determinare la quantità di calore prodotto da una corrente $I = 5$ A che passa per un tempo $t = 600$ sec in una resistenza $R = 10\ \Omega$ con un errore relativo $dQ = 6\%$. Determinare la precisione relativa richiesta agli strumenti necessari alla valutazione di I, R e t, assunte identiche.

Grazie per l'attenzione!