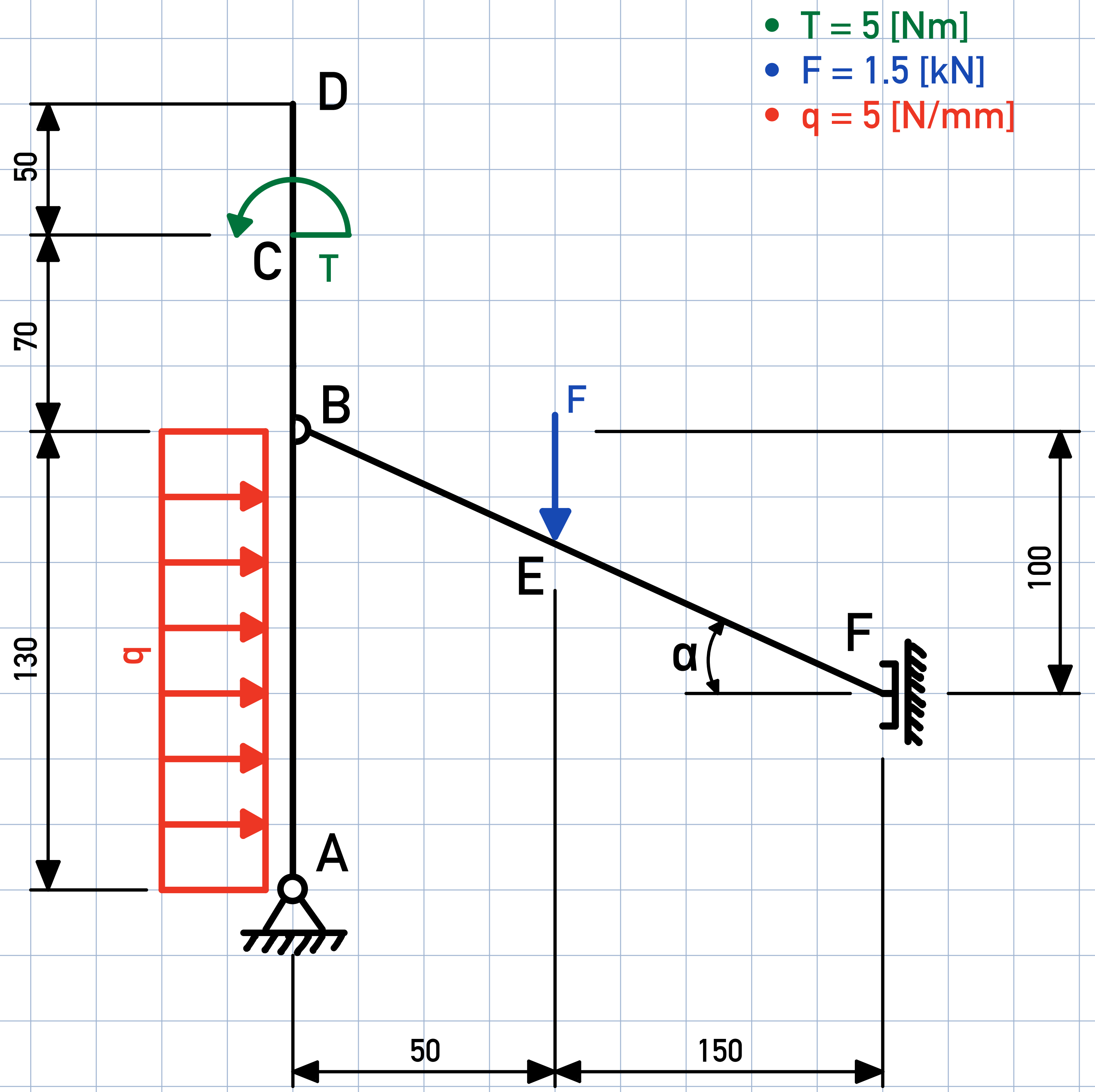
Esercizio 1



Si chiede di studiare la struttura proposta secondo lo schema:

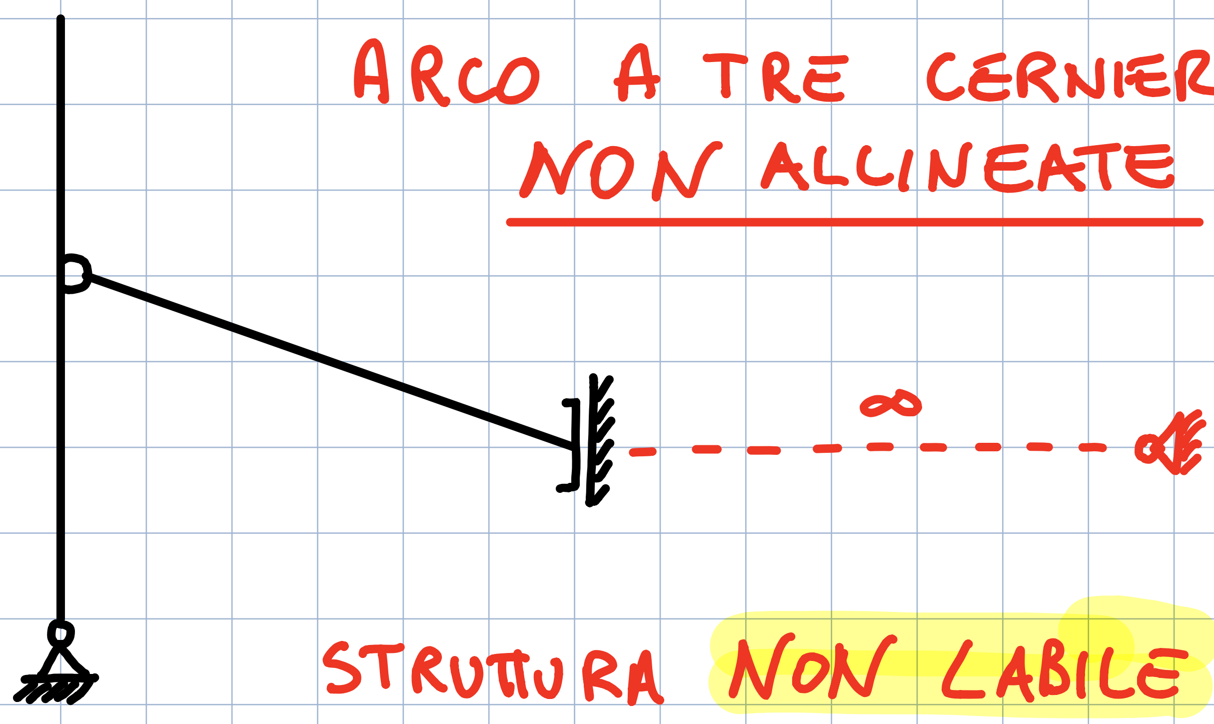
- Analisi cinematica
- Calcolo delle reazioni vincolari
- Calcolo e disegno delle azioni interne

ANALISI CINEMATICA

Gradi di libertà : GDL $\rightarrow 3 \cdot \overset{\text{n° aste}}{m} \rightarrow 6$

Gradi di vincolo : GDV $\rightarrow \left.\begin{array}{l} A: 2 \\ B: 2(m-1) = 2 \\ F: 2 \end{array}\right\} 6$

ISOSTATICA

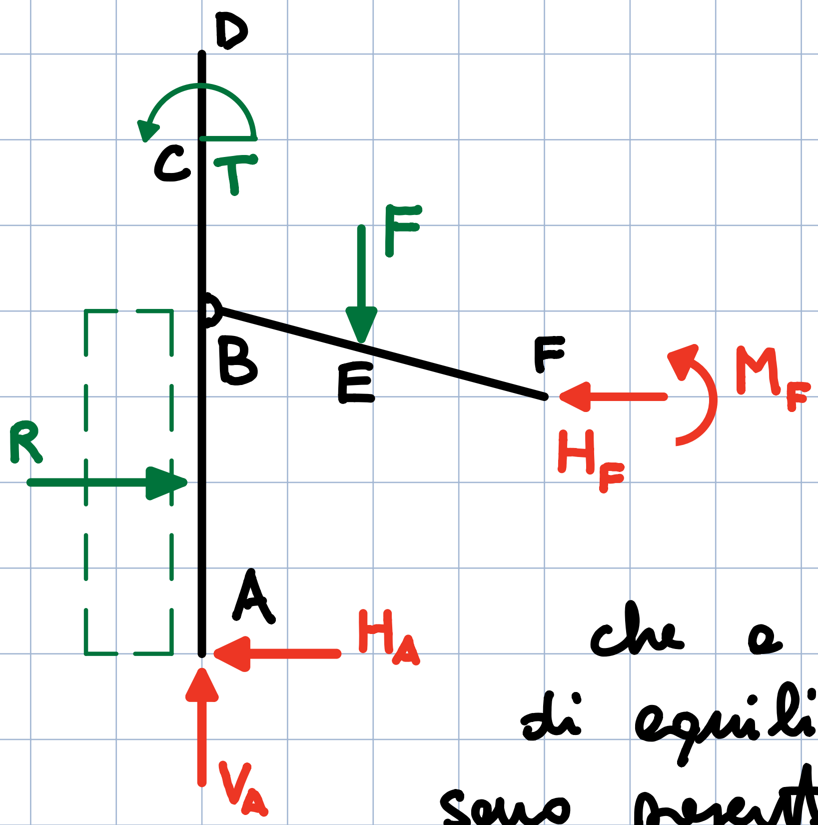


ARCO A TRE CERNIERE NON ALLINEATE

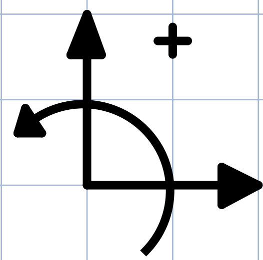
STRUTTURA NON LABILE

N.B.: meglio controllare sempre con ATTENZIONE l'eventuale labilità delle strutture.

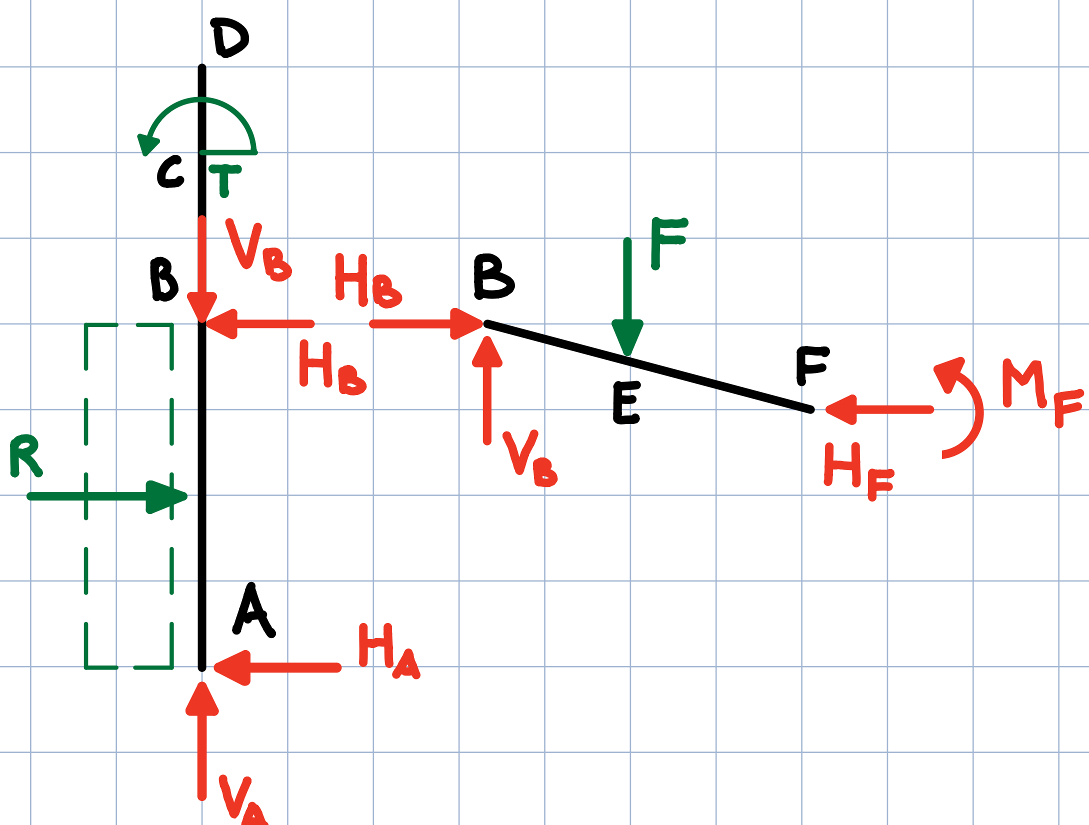
REAZIONI VINCOLARI



CONVENZIONE



Si nota subito che a fronte di 3 eq. di equilibrio disponibili sono presenti 4 reazioni incognite: è quindi necessario svincolare le aste $\overline{AD}$ e $\overline{BF}$.



Prima di procedere con gli equilibri di corpo rigido è necessario calcolare la risultante del carico distribuito q

$$R = \int_\ell q(s)\, ds$$

In generale, la funzione $q = q(s)$, descrive come varia il carico in funzione della coordinata curvilinea s (che a sua volta descrive l'asse della trave nello spazio).

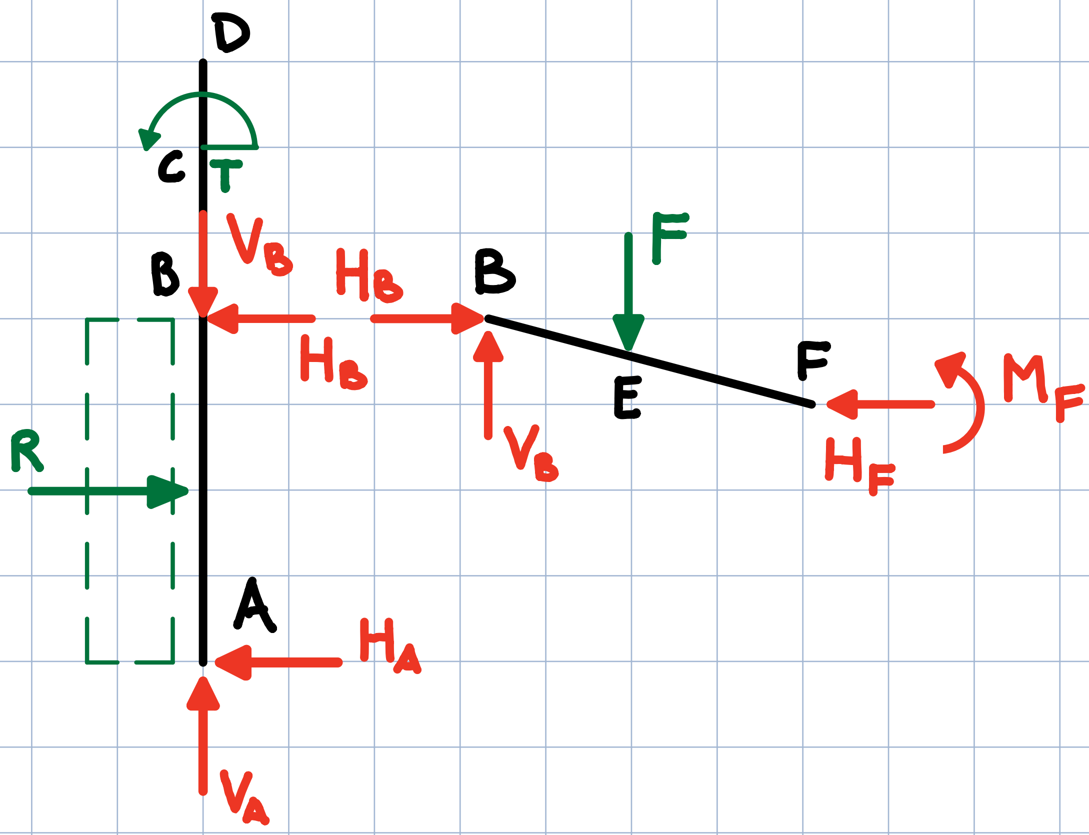
La retta d'azione di tale risultante passa attraverso il BARICENTRO della funzione che definisce il carico

$$\tilde{s} = \frac{\int_\ell q(s)\, s\, ds}{R}$$

Nel nostro caso:

$$R = q \cdot L_{AB} = 5 \cdot 130 = 650\ N$$

$$\tilde{s} = \frac{L_{AB}}{2} = 65\ mm$$



ASTA $\overline{AD}$

$\xrightarrow{+}$ $H_A + H_B = R$

$\uparrow^{+}$ $V_A - V_B = \emptyset$

$\circlearrowleft^{+}$ (A) $T + H_B \cdot L_{AB} - R \cdot \frac{L_{AB}}{2} = \emptyset$

$$\bullet\ H_B = \frac{\frac{R\,L_{AB}}{2} - T}{L_{AB}} = \frac{\frac{(650)(130)}{2} - 5000}{130} = 286.54\,N$$

$$\to H_A = R - H_B = 650 - 286.54 = 363.46\ N$$

Per calcolare V_A e V_B utilizziamo l'asta $\overline{BF}$

ASTA $\overline{BF}$

$\xrightarrow{+}$ $H_B = H_F = 286.54\,N$

$\uparrow^{+}$ $V_B = F = 1500\,N = V_A$

$\circlearrowleft^{+}$ (F) $M_F + F \cdot L_{EF,\parallel} - V_B L_{BF,\parallel} - H_B L_{BF,\perp} = \emptyset$

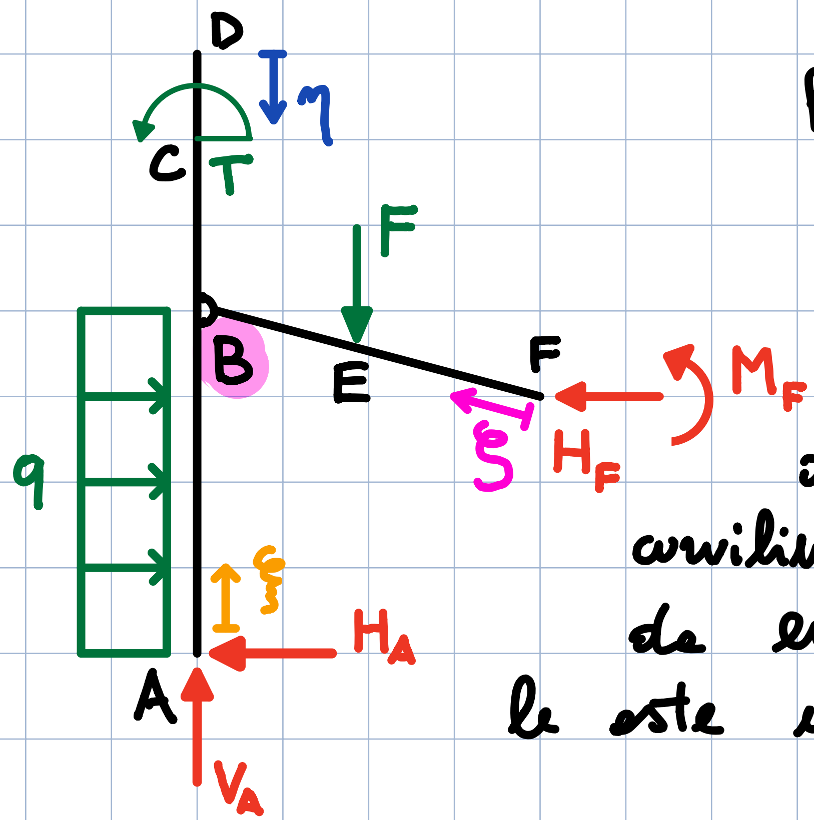
$M_F = + V_B L_{BF,\parallel} + H_B L_{BF,\perp} - F \cdot L_{EF,\parallel} =$

$= 103\,653.85\,Nmm$

N.B.: siamo stati fortunati, abbiamo scelto a priori un sistema di reazioni coerente al carico. Non è sempre così!
Se avessimo ottenuto nei calcoli una reazione NEGATIVA avremmo dovuto cambiarla di segno e contemporaneamente cambiare VERSO al vettore corrispondente nel diagramma di corpo libero.

L'altra alternativa consiste nel portarsi dietro una reazione negativa: può essere scomodo.

AZIONI INTERNE



Per studiare in modo efficiente le azioni interne è conveniente posizionare l'origine delle diverse coordinate curvilinee ξ η ζ in modo da evitare di svincolare le aste nel punto B.

Prima di avventurarci nel calcolo delle azioni è bene effettuare alcuni calcoli preliminari.

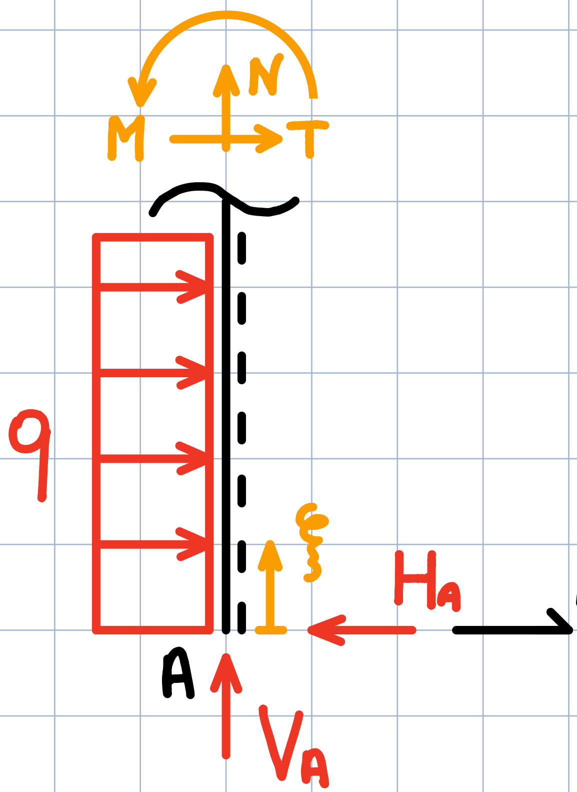
$$\alpha = \arctan\left(\frac{100}{200}\right) = 26.565°$$

$$L_{EF} = \sqrt{(150)^2 + (150 \cdot \tan(\alpha))^2} =$$
$$= 167.705 \text{ mm}$$

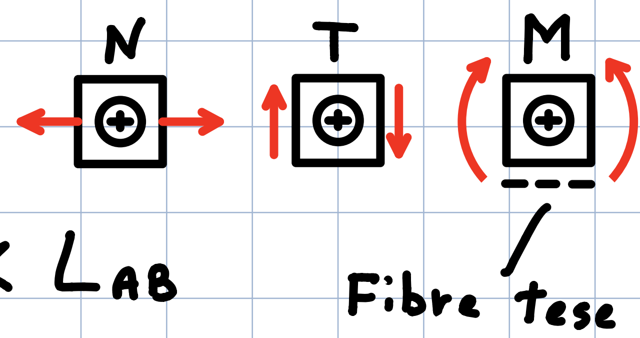
$$L_{EB} = \sqrt{(50)^2 + (25)^2} = 55.902 \text{ mm}$$

$$L_{BF} = \sqrt{(200)^2 + (100)^2} = 223.607 \text{ mm}$$

TRATTO A⟶B



CONVENZIONI



$0 < \xi < L_{AB}$

$N_{AB} = -V_A = -1500\ N$

$T_{AB} = H_A - q\xi$

$T_{AB}(\emptyset) = H_A = +363.46\ N$

$T_{AB}(L_{AB}) = -\ 286.54\ N$

$T_{AB} = \emptyset \longrightarrow \bar{\xi} = \frac{H_A}{q} = 72.692\ mm$

$M_{AB} = H_A\,\xi - \underbrace{q(\xi)}_{R(\xi)}\underbrace{\frac{\xi}{2}}_{\text{braccio}} = H_A\,\xi - \frac{q\,\xi^2}{2}$

$M_{AB}(0) = \emptyset$

$T = \frac{dM}{d\xi}$

$M_{AB}(L_{AB}) = 5000\ Nmm$

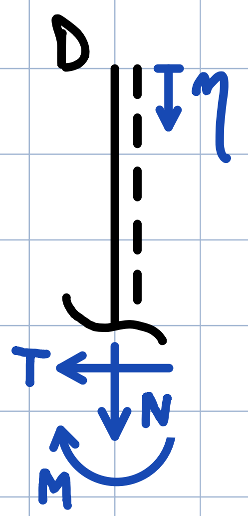
$\frac{dM_{AB}}{d\xi} = -q\,\xi + H_A \longrightarrow \xi\Big|_{M'_{AB}=\emptyset} = \frac{H_A}{q}$

$\frac{d^2M_{AB}}{d\xi^2} = -q < \emptyset$

In $\xi = \bar{\xi}$ M_{AB} è STAZIONARIO e in particolare è MASSIMO $\left(\frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} < \emptyset\right)$

$M_{AB}^{MAX} = 13210.4\ Nmm$

TRATTO D → C



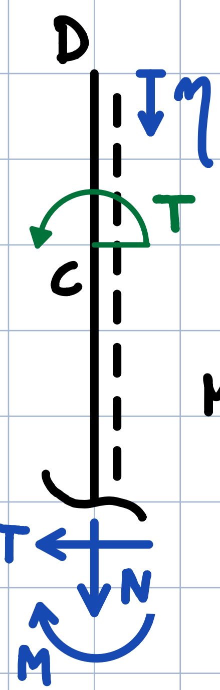
$0<\eta<L_{DC}$

$N_{DC}=\emptyset$

$T_{DC}=\emptyset$

$M_{DC}=\emptyset$

TRATTO C → B



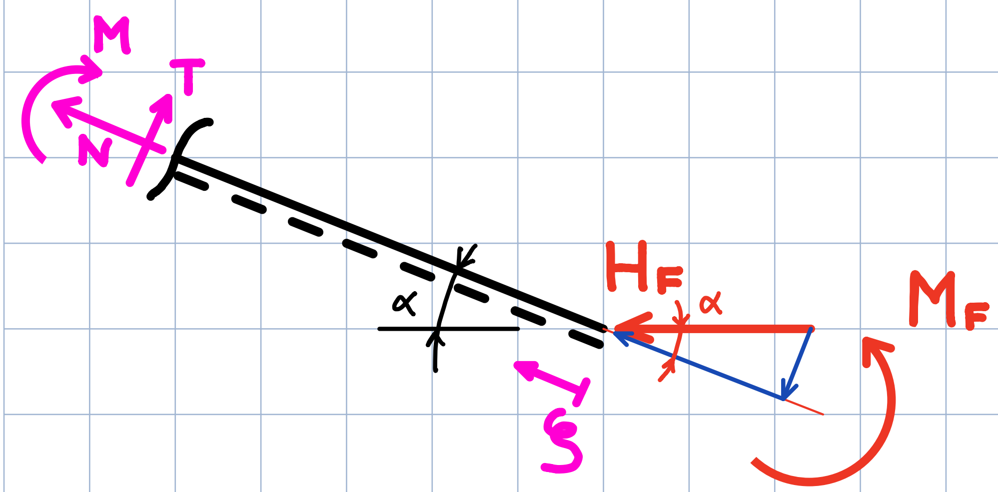
$L_{DC}<\eta<L_{DB}$

$N_{CB}=\emptyset$

$T_{CB}=\emptyset$

$M_{CB}=5000\ Nmm$

TRATTO F → E



$0<\xi<L_{EF}$

$N_{EF}=-H_F\cos(\alpha)$
$=-256.29N$

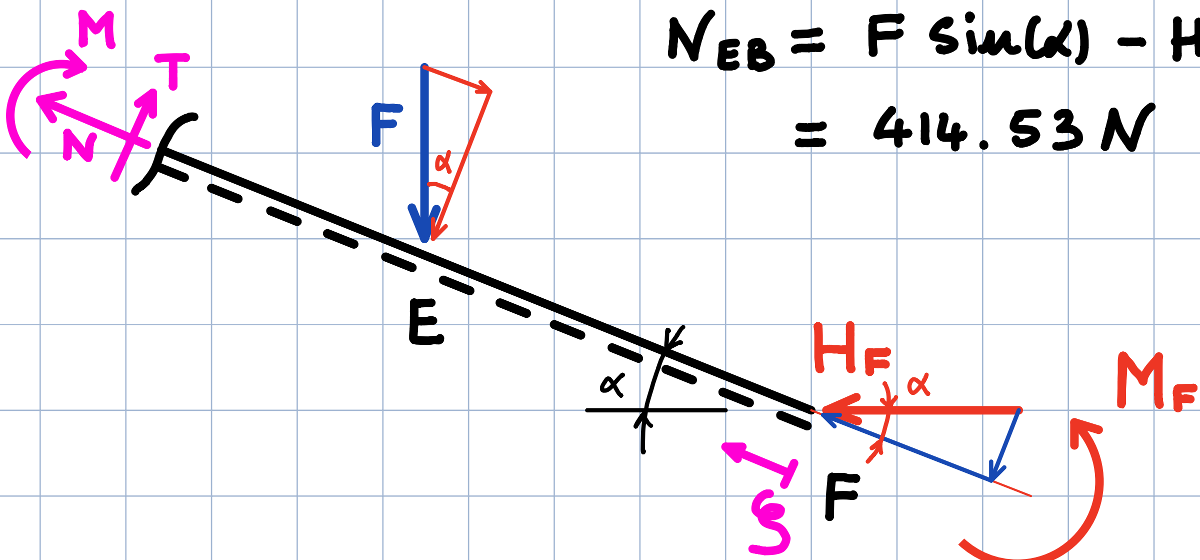
$T_{EF}=H_F\sin(\alpha)=128.144N$

$M_{EF}=M_F-H_F\sin(\alpha)\,\xi$

$$\left.\begin{array}{l} M_{EF}(\emptyset)=M_F=103653.85\ Nmm \\ M_{EF}(L_{EF})=82163.5\ Nmm \end{array}\right\}$$ Non cambia segno, quindi non si annulla nell'intervallo $\overline{EF}$. La derivata di M_{EF} è costante poichè la relazione è LINEARE

TRATTO E $\longrightarrow$ B

$$L_{EF} < \xi < L_{FB}$$



$$N_{EB} = F\sin(\alpha) - H_F\cos(\alpha) =$$
$$= 414.53\ N$$

$$T_{EB} = H_F\sin(\alpha) + F\cos(\alpha) = 1469.78\ N$$

$$M_{EB} = M_F - H_F\sin(\alpha)\,\xi - F\cos(\alpha)(\xi - L_{EF})$$

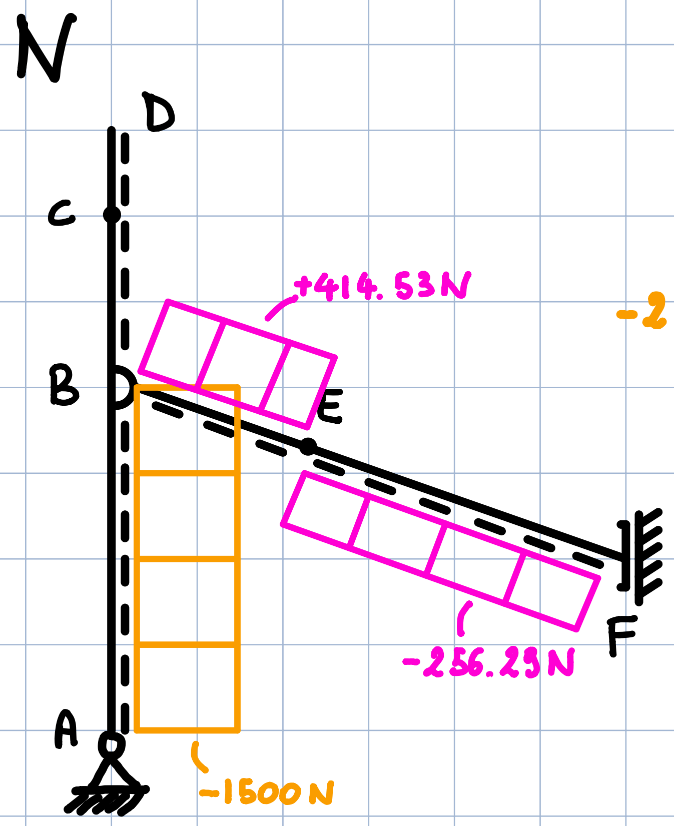
$$M_{EB}(L_{EF}) = 82163.5\ Nmm = M_{EF}(L_{EF})$$

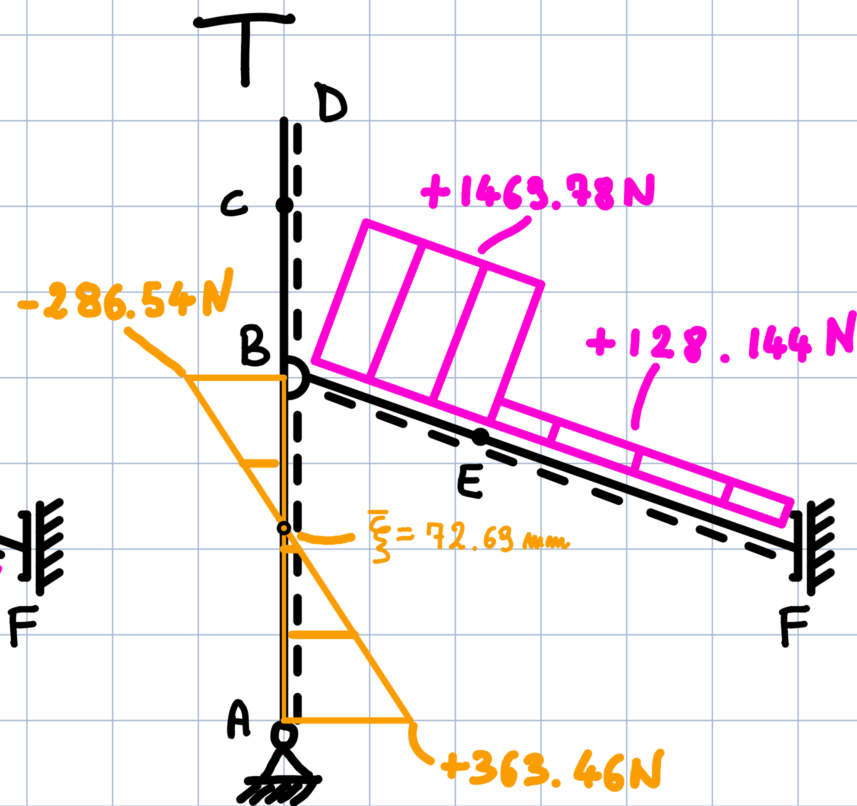
Il momento deve essere continuo, quindi siamo sulla strada giusta. È bene abituarsi a fare queste verifiche in corso d'opera.

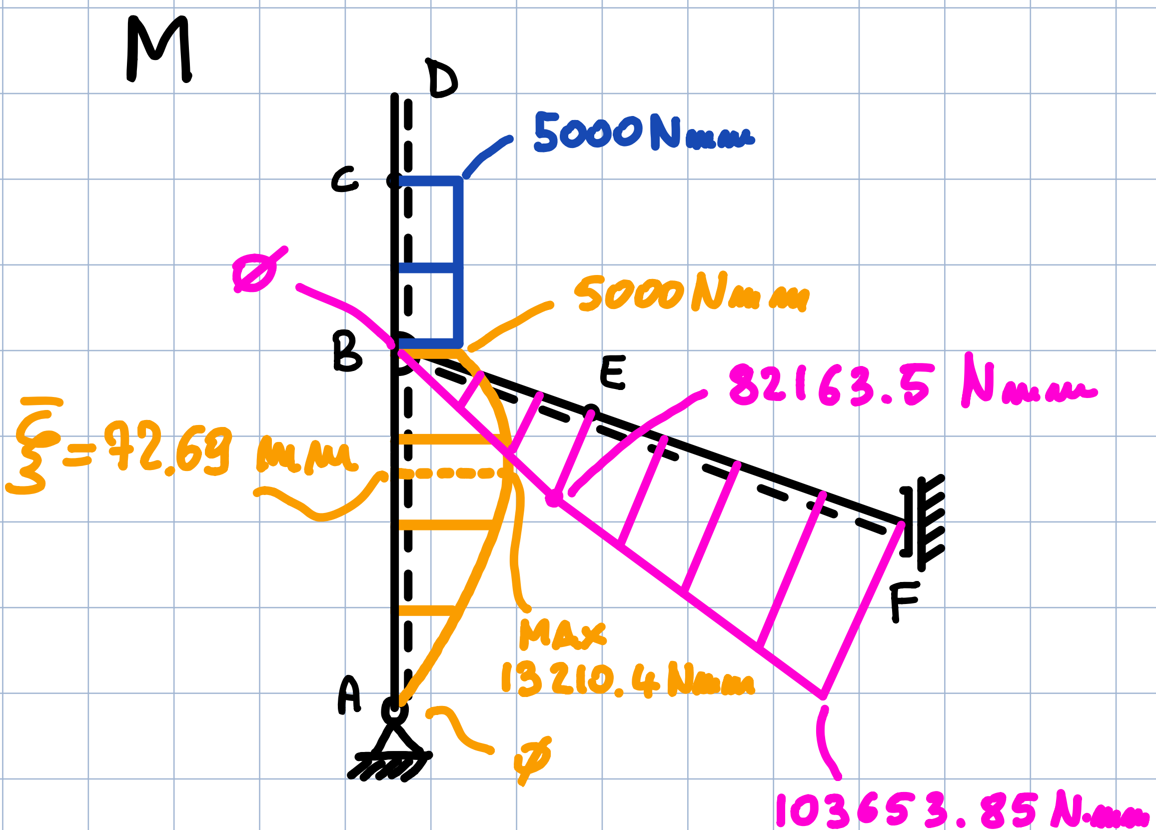
$$M_{EB}(L_{EB}) = -2.91 \times 10^{-11} \approx \emptyset$$

Il momento è nullo in corrispondenza della cerniera interna B poiché questa permette la rotazione della trave $\overline{BF}$ rispetto alla trave $\overline{AD}$.

DIAGRAMMI AZIONI INTERNE







COMMENTI

- L'unica azione interna che possiede un vincolo circa la rappresentazione grafica è il momento flettente. Difatti: questo va riportato, quando POSITIVO, dalla parte delle FIBRE TESE. Per le altre azioni non vi è una convenzione: tuttavia è preferibile usare la convenzione inversa a quella utilizzata per il momento.

- La prima verifica da condurre è sulla continuità del diagramma del momento flettente. Questo difatti risulta continuo, tranne nel punto C: qui agisce una coppia T, che provoca un "salto" nel momento pari esattamente al valore di quest'ultimo.

N.B. Anche le discontinuità dei diagram

di taglio e azione normale sono localizzate nei punti di applicazione di forze rispettivamente perpendicolari o parallele all'asse della trave. In questo caso, la discontinuità è pari al valore della forza concentrata.

- I momenti flettenti debbono essere nulli in corrispondenza delle cerniere, poiché queste permettono la rotazione.
  Il momento MAB è nullo in A, ma non è nullo in B. Come mai?
  Il punto B permette la rotazione relativa tra le aste $\overline{AD}$ e $\overline{BF}$, mentre NON permette la rotazione tra le aste $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$. Tale vincolo viene chiamato impropriamente "CERNIERA PASSANTE". Nel punto B dell'asta $\overline{BF}$ invece il momento è nullo, proprio in virtù del discorso precedente.