RISOLUZIONE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI 2° ORDINE OMOGENEE A COEFFICIENTI NON COSTANTI

$$a(x)\, u'' + b(x)\, u' + c(x)\, u = 0$$

- SI RICONDUCE L'EDO AD UNA EQUAZIONE AGLI AUTOVALORI PER UN OPERATORE CHE AGISCE IN UNO SPAZIO DI HILBERT $L^2(a,b)$

$$Tu = \lambda u$$

STRURM - LIOUVILLE

- SOLUZIONE LOCALE (INTORNO DI UN PUNTO) TRAMITE SVILUPPO IN SERIE

METODO DI FROBENIUS

$$f = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL II° ORDINE E PROBLEMI DI STURM-LIOUVILLE

- La teoria degli spazi di Hilbert (in particolare spazi $L^2(I)$) può essere usata per risolvere ODE del II° ordine lineari omogenee a coefficienti costanti riconducendole ad un problema agli autovalori.

  IN UNO SPAZIO $L^2(a,b)$ $\quad a,b,c \in \mathbb{R}$

- $a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = 0 \qquad u \in L^2(\alpha,\beta)$

  Possiamo sempre riscriverla nella forma

  FORMA AUTOAGGIUNTA $\qquad \alpha \le x \le \beta \subset \mathbb{R}$

$$\frac{1}{C(x)}\left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) - q(x)\right]u + \lambda u = 0$$

$$a(x) = \frac{p}{C} \;; \quad b(x) = \frac{p'}{C} \qquad c(x) = -\frac{q}{C} + \lambda$$

La funzione $u(x)$ deve soddisfare condizioni al bordo del tipo

$$u(\alpha) = u(\beta) = 0 \qquad \text{o simili.}$$

- Possiamo risolvere l'ODE come un'equazione agli autovalori detta problema di STURM-LIOUVILLE introducendo l'operatore

$$T = -\frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) - q\right]$$

$$\boxed{Tu = \lambda u}$$

- L'operatore T in genere è un operatore non limitato nello spazio $L^2(\alpha, \beta)$ che generalizza l'operatore $P = -\frac{d^2}{dx^2}$

- Assumiamo che

  $p(x)$ derivabile con derivata continua

  $q(x) \geq 0 \quad \rho(x) > 0$, e continue

- Definiamo ora il prodotto scalare

$$\langle f | g \rangle_\rho = \int_\alpha^\beta f^* g \, \rho(x) \, dx$$

~~spazio delle funzioni~~ $L^2_\rho(I)$

che soddisfa ($\rho > 0$) tutte le proprietà del prodotto scalare

- Il prodotto scalare $\langle f|g\rangle_\rho$ è una generalizzazione del usuale prodotto scalare: la generalizzazione introduce la FUNZIONE PESO $\rho(x)$
- Spazio delle funzioni $L^2_\rho(\alpha,\beta)$
- Si dimostra facilmente che P è hermitiano nel sottoinsieme di $L^2(\alpha,\beta)$ derivabili due volte e che soddisfano le condizioni al contorno:

$$\langle f|P|g\rangle_\rho = \int_\alpha^\beta \rho f^* P g =$$

$$-\int_\alpha^\beta f^* \frac{d}{dx}\left[p\frac{d}{dx} - q\right] g =$$

$$= \underbrace{-f^*\left[p\frac{d}{dx}\right] g\Big|_\alpha^\beta}_{=0} + \int_\alpha^\beta \frac{df^*}{dx}\left(p\frac{dg}{dx}\right) + f^* q g$$

$$= \underbrace{g\, p\, \frac{df^*}{dx}\Big|_\alpha^\beta}_{=0} - \int_\alpha^\beta g\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) - q\right] f^*$$

$$= \left(\int_\alpha^\beta g^* \rho \left\{-\frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) - q\right]\right\} f\right)^*$$

$$= \langle g|P|f\rangle_\rho^*$$

- Segue che: λ sono reali ≥ 0

le soluzioni u_i sono ortogonali rispetto al prodotto scalare definito rispetto alla funzione peso ϱ

$$\langle u_i | u_j \rangle_\varrho = 0$$

$$\int_\alpha^\beta \varrho u_i^* u_j(x)\, dx = \delta_{ij}$$

- Si può anche mostrare che le autofunzioni $\{|u_n\rangle\}$ di P rappresentano un SISTEMA ON COMPLETO RISPETTO ALLA NORMA INDOTTA DAL PRODOTTO SCALARE

$$\langle f | g \rangle_\varrho$$

- Questo significa che ogni funzione f tale che

$$\int_\alpha^\beta \varrho |f|^2\, dx < \infty$$

può essere sviluppata in serie di Fourier di u_n

$$f = \sum_{n=1}^\infty c_n u_n$$

- nel senso usuale che per $n \to \infty$

$$\int_\alpha^\beta C \left| f - \sum_{n=1}^{n} a_n u_n \right|^2 dx \to 0$$

con $a_n = \int_\alpha^\beta C \, u_n^* \, f \, dx$

- Esempio molto importante di operatore P

equazione di Schrödinger in meccanica quantistica

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] = \lambda u$$

Alcune proprietà

1. $\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_n$ sono crescenti $\lambda_n \to \infty$
2. se λ_1 è il più piccolo u_1 si annulla solo in α, β
3. la soluzione n-sima corrispondente a λ_n ha $n-1$ zeri cioè $n+1$ se si includono α, β

TEOREMA DEI NODI

- Le funzioni c, p, q sono regolari. (cont. lin.) I punti in cui esse non lo sono si chiamano punti di singolarità. Anche in questo CASO si può impostare il problema di SL nello stesso modo e le autofunzioni sono comunque un set ON completo.

- EDO con punti di singolarità sono importanti anche perché esse consentono di definire i

POLINOMI ORTOGONALI CLASSICI
COME L'INSIEME DELLE SOLUZIONI DI UN PROBLEMA DI STURM LIOUVILLE

1) POLINOMI DI HERMITE

PARTIAMO dall'equazione

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2 + \lambda\right) u = 0 \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

Punti singolari $x = \pm\infty$

(OSCILLATORE ARMONICO QUANTISCO)

Per grandi x la soluzione si comporta come $u \sim e^{\pm\frac{x^2}{2}}$ infatti

$$\frac{du}{dx} = \pm x u \quad \frac{d^2u}{dx^2} = x^2 u + o(u)$$

mentre l'EDO da $\frac{d^2u}{dx^2} - x^2 = O(1)$

PONIAMO $u = e^{-\frac{x^2}{2}} H$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[e^{-\frac{x^2}{2}} H\right] - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} H + \lambda e^{-\frac{x^2}{2}} H = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{-\frac{x^2}{2}} H\right) = \frac{d}{dx}\left[e^{-\frac{x^2}{2}} H' - x H e^{-\frac{x^2}{2}}\right]$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}\left[H'' - 2xH' - H + x^2 H\right]$$

sostituendo

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\left[H'' - 2xH' + \overbrace{(\lambda - 1)}^{2m} H\right] = 0$$

$$\boxed{H'' - 2xH' + 2mH = 0}$$

$a = 1 \qquad b = -2x \qquad c = 2m$

$a = \frac{p}{\rho} \qquad b = \frac{p'}{\rho} \qquad c = -\frac{q}{\rho} + \cancel{\lambda}$

$\frac{p'}{p} = \frac{b}{a} \qquad \ln p = \int \frac{b}{a} = -\int 2x = -x^2$

$\Rightarrow p = e^{-x^2}$

$\rho = e^{-x^2} \qquad q = \rho\left(-c + \cancel{\lambda}\right)$

$= e^{-x^2}\left(-2m + \cancel{\lambda}\right)$

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) - q\right] H_n + \cancel{\lambda} H_n = 0$$

RISOLUZIONE: METODO POLINOMI ORT CLASSICI

POLINOMI DI HERMITE

EQUAZIONE DIFF. ASSOCIATA

$$\boxed{H''_n - 2x H'_n + 2n H_n = 0} \qquad (1)$$

FORMULA DI RODRIGUES

$$\boxed{H_n = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}} \qquad (2)$$

RELAZIONE DI RICORRENZA

$$H_{n+1} = -2n H_{n-1} + 2x H_n \qquad (3)$$

DIMOSTRAZIONE VEDI

FORMULA DELLE DERIVATE

$$\boxed{H'_n = 2n H_{n-1}} \qquad (4)$$

DIM:

- DA (2) ABBIAMO DERIVANDO

$$H'_n = 2x H_n - H_{n+1} \qquad (5)$$

- USANDO (3) SEGUE (4)

DIMOSTR. 1

- DERIVANDO LA 5

$$H''_n = 2H_n + 2x H'_n - H'_{n+1} \quad (6)$$

- DALLA 4 CON $n \to n+1$

$$H'_{n+1} = 2(n+1) H_n$$

SOSTITUENDO NELLA 6

$$H''_n = 2x H'_n - 2n H_n$$

CHE È LA 1

ORTOGONALITÀ

$$\langle H_n | H_m \rangle_e = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n H_m \, dx = h_n \delta_{nm}$$

$$h_n = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

RICORRENZA

$$= H_{n+1} = (-1)^{n+1} e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2}$$

$$= -(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left[-2x e^{-x^2}\right]$$

$$= 2(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left[x e^{-x^2}\right]$$

$$= 2(-1)^n e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[e^{-x^2} + x \frac{d}{dx} e^{-x^2}\right]$$

$$= -2 H_{n-1} + 2(-1)^n e^{x^2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[x \frac{d}{dx} e^{-x^2}\right]$$

$$= -2 H_{n-1} + 2(-1)^n e^{x^2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left[\frac{d}{dx} e^{-x^2} + x \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2}\right] = -4 H_{n-1} +$$

$$2(-1)^n e^{x^2} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left[x \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2}\right]$$

FACENDO PASSARE TUTTE LE DERIVATE

$$= -2n H_{n-1} + 2x H_n$$

$$\boxed{H_{n+1} = -2n H_{n-1} + 2x H_n} \quad (1)$$

ORTOGONALITÀ

$$\langle H_n | H_m \rangle_e = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n H_m \, dx = h_n \delta_{nm}$$

$$h_n = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

FORMULA <u>DERIVATO</u>

OSCILLATORE ARMONIC

MQ

$$\Psi_n = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n$$

$$\langle \Psi_n | \Psi_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_n|^2 dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2 dx = \langle H_n | H_n \rangle_e$$

FUNZIONE GENERATRICE
DEI POLINOMI OC

$$F(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n P_n(x) \frac{z^n}{n!} \qquad |z|<1$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}\Big|_0 = k_1 P_1$$

$$\frac{\partial^n F}{\partial z^n}\Big|_0 = k_n P_n$$

POLINOMI DI HERMITE

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cancel{H}_n(x) \frac{z^n}{n!} = e^{2xz - z^2}$$

$F(0)=1$

$H_0 = 1$

$H_1 = 2x$

$H_2 = 2-2x^2$

PRIMI POLINOMI DI HERMITE

$H_0 = 1$, $H_1 = 2x$, $H_2 = 4x^2 - 2$ ...

$H_n \to$ polinomio parità $(-1)^n$

H_n sistema completo ON per $L^2_\varrho(-\infty, \infty)$

con peso $\varrho = e^{-x^2}$

$\forall\, f(x) \in L^2_\varrho(-\infty, \infty)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x)$$

Relaz. di ON

$h_n = 2^n n! \sqrt{\pi}$

$$\langle H_m | H_n \rangle_\varrho = \int_{-\infty}^{\infty} H_m H_n e^{-x^2} dx = h_n \delta_{mn}$$

$\boxed{\text{VEDI ESERCIZI}}$

$\Rightarrow$ Funzione peso $\varrho = e^{-x^2}$ legato al comportamento asintotico funz. d'onda

$$c_n = \frac{1}{h_n} \langle H_n | f \rangle_\varrho = \frac{1}{h_n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n f(x)\, dx$$

Relazione di completezza

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 h_n = \langle f | f \rangle_\varrho$$

Integrale gaussiano

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$I'(\alpha) = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, \alpha^{-3/2}$$

PROPRIETÀ GENERALI POLINOMI ORTOGONALI $L^2_\rho(\alpha,\beta)$

DATA

$$F_n(x) = \frac{1}{K_n}\frac{1}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\rho\, s^n\right) \qquad n = 0,1,2\ldots$$

FORMULA DI RODRIGUES

DOVE

1. $s(x)$ polinomio grado ≤ 2 con RADICI REALI
2. $\rho(x) > 0$ tale che $\rho(\alpha)s(\alpha) = \rho(\beta)s(\beta) = 0$

SI PUÒ MOSTRARE CHE

1. F_n sono un polinomi di grado n ortogonali peso ρ in $L^2_\rho(\alpha,\beta)$

$$\langle F_n | F_m \rangle_\rho = \int_\alpha^\beta \rho\, F_n F_m\, dx = 0 \quad n \neq m$$

2. F_n soddisfano una EDO ASSOCIATA

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}\left[\rho\, s \frac{dF_n}{dx}\right] = \lambda_n F_n$$

CHE SI RICONDUCE AD un problema di Sturm-Liouville

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dx}\, p\, \frac{dF_n}{dx}\right] = \lambda_n F_n$$

$$T F_n = \lambda_n F_n$$

(3) SODDISFA UNA RELAZIONE DI RICORRENZA

$$F_{n+1} = (\alpha_n x + \beta_n) F_n(x) + \gamma_n F_{n-1}(x)$$

(4) SODDISFA UNA FORMULA PER LE DERIVATE

CLASSIFICAZIONE

(5) A SECONDA DELLA SCELTA DI $s(x)$ e $\mathbb{C}$

(6) SISTEMI COMPLETI IN $L^2_{\mathbb{C}}(\alpha, \beta)$

(2) UNICITÀ

CLASSIFICAZIONE POLINOMI ORT. CLASSICI

- FORMULA DI RODRIGUEZ
- EQUAZIONE DIFFERENZIALE
- RELAZIONE RICORRENZA
- FORMULA PER LE DERIVATE
- FUNZIONE GENERATRICE

SAME

- POLINOMI DI JACOBI $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$

- POLINOMI DI GEGENBAUER $C_n^{\lambda}(x)$
  (LEGENDRE $\lambda = \frac{1}{2}$) $P_n(x)$
  (TCHEBICHEFF) $\lambda = 0, 1$ $T_n(x)$

- POLINOMI DI LAGUERRE $L_n(x)$

- POLINOMI DI HERMITE $H_n(x)$

PER OGNI POLINOMIO SI PUÒ DARE

- EQUAZIONE DIFFERENZIALE
- FORMULA DI RODRIGUES
- RELAZIONE DI RICORRENZA
- FORMULA PER LA DERIVATA
- FUNZIONE GENERATRICE

POLINOMI ORTOGONALI CLASSICI

CLASSIFICAZIONE $\quad x \in (a, b)$ FINITO $(-1, 1)$

(1) $\quad S(x) = (1 - x^2) \qquad p(x) = (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta}$

$\alpha, \beta > -1$ $\qquad$ $\boxed{\text{JACOBI}}$

CASI PARTICOLARI
- GEGENBAUER
- TCHEBICHEF
- LEGENDRE

(2) $\quad x \in (0, \infty)$

$S(x) = x \qquad P(x) = e^{-x} x^{\alpha} \quad \alpha > -1$

$\boxed{\text{LAGUERRE}}$

$x \in (-\infty, \infty)$

(3) $\quad S(x) = 1 \qquad P = e^{-x^2}$

HERMITE

(2) Polinomi di Legendre ed armoniche sferiche

Partiamo dall' equazione

$$\left(\Delta - V(r) + \lambda\right) u(x,y,z) = 0 \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{LAPLACIANO}$$

Equazione di Schrödinger per un potenziale centrale $V(r)$

- Introduciamo coordinate polari sferiche

$$x = r \sin\theta \sin\varphi \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$y = r \sin\theta \cos\varphi \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$
$$z = r \cos\theta$$

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - V(r) + \lambda\right] u(r,\theta,\varphi) = 0$$

- Nell' equazione si possono separare le variabili:

$$u(r,\theta,\varphi) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$$

e si ottengono 3 ODE

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\phi}{d\varphi^2} = -m^2\phi \qquad \Phi(\varphi+2\pi) = \Phi(\varphi) \quad (*) \\[2ex] \left[\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d}{d\theta}\right) - \dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta) + l(l+1)\Theta = 0 \quad (*)(*) \\[2ex] \left[\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{d}{dr}\right) - \dfrac{l(l+1)}{r^2} - V(r) + \lambda\right]R = 0 \quad *** \end{cases}$$

- La $(*)$ si integra subito

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

- Le soluzioni della $(*)(*)$ sono i Polinomi di Legendre $\Theta_l^m(\theta)$

PUNTI SINGOLARI $\theta = 0, \pi$

Essi rappresentano un set completo ON per $L^2(0,\pi)$ con funzione peso $\sin\theta$ $\quad -l \leq m \leq l$

$$\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \, \Theta_l^m \, \Theta_{l'}^{m'} = \delta^{mm'} \delta_{ll'}$$

$$\Theta_l^m = K(l,m) P_l^m \qquad K(l,m) = (-1)^m \left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2}$$

- $$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \Theta_l^m(\theta) e^{im\varphi}$$

sono le FUNZIONI ARMONICHE SFERICHE

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{l,m} c_{lm} Y_{lm}$$

Y_{lm} sono un set ON COMPLETO SULLA SFERA $L^2(S)$ $c_{lm} = ?$

Sono ON RISPETTO ALLA FUNZIONE PESO angolo solido $d\Omega = d\theta\, d\varphi \sin$

$$\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \sin\theta \, Y_{lm} Y_{l'm'} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

$\Rightarrow$ Forma generale per di Rodrigues

(3) La terza equazione si chiama equazione Radiale

posto $V(r) = -\frac{2}{r}$ potenziale coulombiano

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2}{r} + \lambda\right] R = 0$$

PUNTI SINGOLARI SONO $r = 0, \infty$

- IMPONENDO LE CONDIZIONI AL CONTORNO

$$\lim_{r\to\infty} R(r) = 0$$

si trovano soluzioni del tipo

$$R^{(l)}_n(r) = e^{-\frac{\alpha r}{n}} L^{(l)}_n(r)$$

$\forall\, l = 0$ POLINOMI DI LAGUERRE

$R^{(0)}_n(r)$ è un sistema ON COMPLETO in $L^2(0,\infty)$ rispetto alla funzione peso r^2

$$\int_0^\infty dr\, r^2\, L_n L_m = \delta_{nm}$$

FUNZIONI DI BESSEL

EQUAZIONE DI D'ALEMBERT IN 2D

$$\left(\Delta + k^2\right) W = 0$$

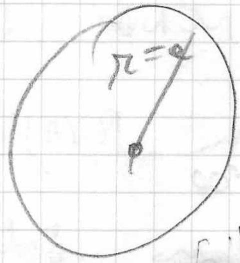
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Passando a coordinate polari (r, φ) si ottiene

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + k^2\right] W(r,\theta) = 0$$

condizioni al contorno

$$W(a, \varphi) = 0$$



separando le variabili $W = R(r)\Phi(\theta)$

si ha

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{d\theta^2}\phi = -m^2 \Phi & \Phi(\theta+2\pi) = \Phi(\theta) \\ \left[\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{d}{dr}\right) - \dfrac{m^2}{r^2} + k^2\right] R = 0 \end{cases}$$

La prima risolta da

$$\phi = \sin m\theta \qquad m = 0, 1, 2 \dots$$

La seconda posto $\quad x = kr$

$f(x) = R\left(\frac{x}{k}\right)$

$$f'' + \frac{f'}{x} - \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) f = 0$$

EQUAZIONE DI BESSEL

PUNTI SINGOLARI $\quad x = 0 \quad x = \infty$

Le soluzioni regolari in $x = 0$
si chiamano FUNZIONI DI BESSEL
DI PRIMA SPECIE

$$J_m(x)$$

HANNO ANDAMENTO OSCILLANTE SMORZATO
CON INFINITI ZERI NON EQUIDISTANTI

Posto $u = \cos\theta$ l'EDO delle funzioni di Legendre diventa

$$\frac{d}{du}\left[(1-u^2)\frac{dP_l^m}{du}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-u^2}\right]P_l^m = 0$$

Equaz differenziale di Legendre

$\boxed{\text{Formula di Rodrigues}}$

$$\cancel{(-1)^m \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,P}$$

$$P_l^m(u) = (-1)^{l+m}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{(1-u^2)^{-m/2}}{2^l\, l!}$$

$$\frac{d^{l-m}}{du^{l-m}}\left[(1-u^2)^l\right]$$

Esempio

$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ $\qquad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$

$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, e^{i\varphi}\sin\theta$