DIPENDENZA ED INDIPENDENZA LINEARE DI UN SISTEMA DI VETTORI

- DATO IL SISTEMA DI VETTORI

$$\{ |v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots |v_N\rangle \} \in \mathbb{V}$$

ESSI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE

$$\sum_i c_i |v_i\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad c_i = 0$$

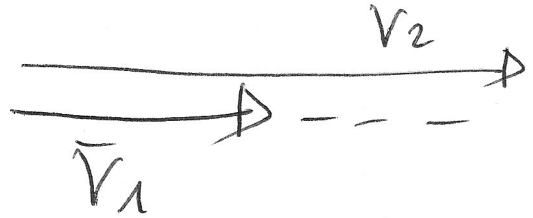
$c_i \in \mathbb{C}$

- GENERALIZZAZIONE DEL CONCETTO DI INDIPENDENZA LINEARE IN $\mathbb{R}^2$

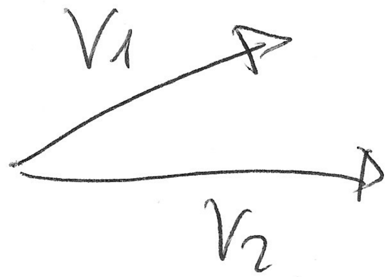
$\{ \bar{v}_1, \bar{v}_2 \} \in \mathbb{R}^2$ SONO LIN. DIP.

SE $\quad \bar{V}_1 = \lambda V_2 \Rightarrow c_1 \bar{V}_1 + c_2 \bar{V}_2 = 0$

$c_1, c_2, \lambda \in \mathbb{R}$ NON NULLI,



LIN. DIP

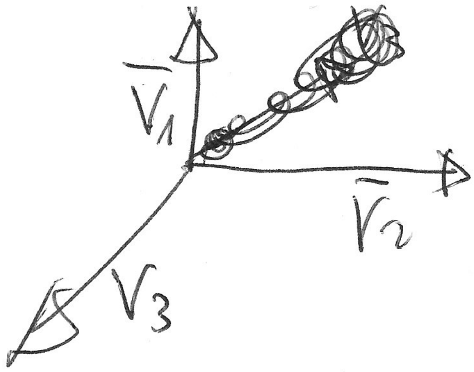


LIN. IND.

DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

NUMERO MASSIMO DI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI CHE POSSONO ESSERE TROVATI NELLO SPAZIO

ESEMPIO $\mathbb{R}^3$



3 VETTORI LIN. IND.

DIMENSIONE SPAZIO VETTORIALE = 3

BASI

- SU V^N N VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI $\{|u_i\rangle\}$ $i = 1 .. N$

$\boxed{\text{GENERANO}}$ LO SPAZIO:

$$\forall |a\rangle \in V^N \Rightarrow |a\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i |u_i\rangle$$

CON $c_i \in \mathbb{C}$

RAGIONANDO PER ASSURDO:

SE L'EQUAZIONE $c_0|\varphi\rangle + \sum_{i=1}^{N} c_i|u_i\rangle = 0$

AMMETTESSE LA SOLUZIONE $c_0 = c_i = 0$

ALLORA LO SPAZIO VETTORIALE SAREBBE

DI DIMENSIONE $N+1$.

QUINDI L'EQUAZIONE AMMETTE SOLUZIONI

CON ALMENO UN $c_i \neq 0$ $\Rightarrow |\varphi\rangle = \sum_{i=1} c_i|u_i\rangle$

- GLI N VETTORI LIN. IND. SI CHIAMANO $\boxed{\text{BASE}}$ DI V^N

- PER IL MOMENTO CONSIDERIAMO $N=$ FINITO

- GENERALIZZAZIONE A $N=\infty$ SPAZI DI HILBERT

- BASE ORTONORMALE $\{|e_i\rangle\}$ $i=1..N$

SE $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$

ORTOGONALI $\langle e_i|e_j\rangle = 0$ SE $i\neq j$

NORMALI $\langle e_i|e_i\rangle = 1 \Rightarrow \||e_i\rangle\| = 1$

TEOREMA

SE $\{|e_i\rangle\}$ SONO ORTOGONALI

$\Longrightarrow$ SONO LIN. IND

NON VALE IL VICEVERSA

DIMOSTRAZIONE

IPOTESI $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$

CONSIDERIAMO

$$\sum_{i=1}^{N} c_i|e_i\rangle = 0$$

MOLTIPLICHIAMO PER IL BRA $\langle e_j|$

$$\sum_{i=1}^{N} c_i\langle e_j|e_i\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i\delta_{ji} = c_i = 0$$

$|e_i\rangle$ SONO LINEARMENTE IND.

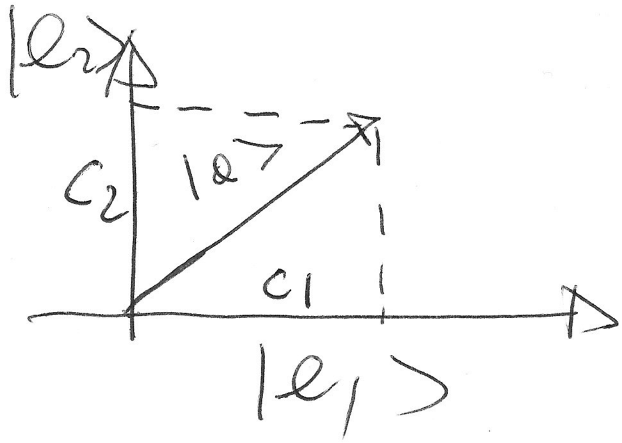
- PER UNA BASE ON SI HA

$|e\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i|e_i\rangle$ MOLTIPLICHIAMO SCALARMENTE PER $\langle e_j|$

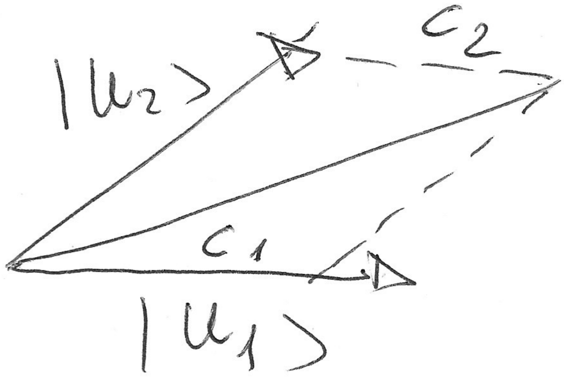
$$\langle e_j|e\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i\langle e_j|e_i\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i\delta_{ij}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{c_J = \langle e_J | e \rangle}$$

GEOMETRICAMENTE: SE LA BASE È ON LE COMPONENTI DI $|e\rangle$ SONO LE PROIEZIONI SUGLI ASSI (VERSORI)



NON VALE SE LA BASE NON È ON



DEFINIZIONI EQUIVALENTI DI BASE SISTEMA COMPLETO

1) DATO UN INSIEME DI N VETTORI L. IND. $|u_i\rangle \in V^N$ DICIAMO CHE $\{|u_i\rangle\}$ È BASE O SISTEMA COMPLETO SE I VETTORI GENERANO V

$\forall |a\rangle \in V \quad |a\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i |u_i\rangle$

$c_i \in \mathbb{C}$

2) SE $\{|u_i\rangle\}$ SONO ON È UNA BASE SE L'UNICO VETTORE ORTOGONALE A TUTTI GLI $|u_i\rangle$ È IL VETTORE NULLO

DIMOSTRAZIONE: PER ASSURDO
SE $\exists\ |b\rangle \in V^N$ TALE CHE

$\langle b|u_i\rangle = 0 \quad \forall i$

DIMENSIONE $(V) = N+1$

3) CNS AFFINCHÈ $\{|u_i\rangle\}$ SIA COMPLETO
$\forall |a\rangle \in V^N$

$$\boxed{\langle a|a\rangle = \sum_i |c_i|^2}$$

RELAZIONE DI COMPLETEZZA

IP: $\{|l_i\rangle\}$ COMPLETO

$\forall |a\rangle$ $\quad |a\rangle = \sum_i c_i |l_i\rangle$

$$\langle a| = \sum_i \langle l_i| c_i^*$$

$$\langle a|a\rangle = \sum_i \sum_j \langle l_i|l_j\rangle c_i^* c_j$$

$$= \sum_i \sum_j \delta_{ij} c_i^* c_j = \sum_i c_i^* c_i$$

$$= \sum_i |c_i|^2 \Rightarrow \langle a|a\rangle = \sum_i |c_i|^2$$

IP. $\quad \sum_i |c_i|^2 = \langle a|a\rangle \quad \forall |a\rangle$

$$\sum_i c_i^* c_i = \langle a|a\rangle$$

$$\sum_i c_i \langle a|l_i\rangle = \langle a|a\rangle$$

$$= \langle a|\left[\sum_i c_i |l_i\rangle\right] = \langle a|a\rangle$$

$$\Rightarrow |a\rangle = \sum_i c_i |l_i\rangle$$

SIGNIFICATO FISICO IN MQ $\quad$ PROBABILITÀ

$$|\psi\rangle = c_1 |\uparrow\rangle + c_2 |\downarrow\rangle$$

$|c_1|^2 = P_\uparrow \qquad |c_2|^2 = P_\downarrow \qquad \langle\psi|\psi\rangle = 1$

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 \qquad \boxed{P_\uparrow + P_\downarrow = 1}$$

SOTTOSPAZI VETTORIALI

SIA $H^M \subset V^N$ $\quad M \leq N$

H^M È SOTTOSPAZIO V. DI V^N

SE PER H^M SONO VERIFICATI TUTTI GLI ASSIOMI PE LO S. VETT (IN PARTICOLARE CHIUSURA DI + E $\exists$ ELEMENTO NEUTRO

- SIANO $|u_i\rangle \in H^M$ $i=1 \ldots M$ VETTORI L. IND $|u_i\rangle$ SONO GENERATORI DI H^M (BASE)

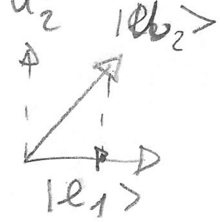
$\forall |a\rangle \in H^M$

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^{M} c_i |u_i\rangle$$

ORTOGONALIZZAZIONE DI GRAHAM SCHMIDT

$\{u_1, u_2 \ldots u_N\}$ L. IND

Dobbiamo scrivere e $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$



- $|e_1\rangle = \dfrac{|u_1\rangle}{|u_1|}$

$$|u_2'\rangle = |u_2\rangle - \langle e_1|u_2\rangle |e_1\rangle$$

$$\langle e_1 | u_2' \rangle = 0$$

- $|e_2\rangle = \dfrac{1}{|u_2'|}\left(|u_2\rangle - \langle e_1|u_2\rangle |e_1\rangle\right)$

$$|u_2'|^2 = \left(\langle u_2| - \langle e_1| \langle e_1|u_2\rangle^*\right)\left(|u_2\rangle - \langle e_1|u_2\rangle |e_1\rangle\right) = |u_2|^2 - 2|\langle e_1|u_2\rangle|^2 + |\langle e_1|u_2\rangle|^2$$

$$= |u_2|^2 - |\langle e_1|u_2\rangle|^2$$

NB
$|u_2|^2 - |\langle e_1|u_2\rangle|^2 > 0$
PER DIS. SCHWARTZ

$$|u_3'\rangle = |u_3\rangle - \langle e_1|u_3\rangle |e_1\rangle - \langle e_2|u_3\rangle |e_2\rangle$$

$$\langle e_1|u_3'\rangle = \langle e_2|u_3'\rangle = 0$$

$$|e_3\rangle = \frac{1}{|u_3'|}\left(|u_3\rangle - \langle e_1|u_3\rangle |e_1\rangle - \langle e_2|u_3\rangle |e_2\rangle\right)$$

$$|u_3'|^2 = |u_3|^2 - |\langle e_1|u_3\rangle|^2 - |\langle e_2|u_3\rangle|^2$$

— — — —

$$|u'_N\rangle = |u_N\rangle - \langle e_1|u_N\rangle|e_1\rangle - \langle e_2|u_N\rangle|e_2\rangle$$

$$- \langle e_{N-1}|u_N\rangle|e_{N-1}\rangle$$

$$|e_N\rangle = \frac{1}{|u'_N|}\left(|u_N\rangle - \langle e_1|u_N\rangle|e_1\rangle \cdots\cdots\right)$$

$$|u'_N|^2 = |u_N| - |\langle e_1|u_N\rangle|^2 \cdots - |\langle e_{N1}|u_N\rangle|^2$$

ESEMPIO

$\mathbb{C}^1$ SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{C}$

$z = |z\rangle \in \mathbb{C}^1 \quad z^* = \langle z| \in \mathbb{C}^{1*}$

$\forall\, z \in \mathbb{C}^1 \quad z = \alpha 1 \quad \alpha \in \mathbb{C}$

BASE $|e_1\rangle = 1$

$|z\rangle = z \cdot 1 = z$

$\langle z|z\rangle = z^* z = |z|^2$

Norm

$\|z\| = |z|$

SECONDO ESEMPIO $\mathbb{C}^2$

$\mathbb{C}^2$: COPPIE ORDINATE DI NUMERI COMPLESSI

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad (z_1, z_2) \in \mathbb{C}$$

$$\langle a| = (z_1^*, z_2^*)$$

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{PRODOTTO SCALARE}}$

$$\langle b|a\rangle = (y_1^* \; y_2^*) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = y_1^* z_1 + y_2^* z_2$$

$\boxed{\text{NORMA}}$ $\|a\|^2 = \langle a|a\rangle = (z_1^* \; z_2^*) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{BASI}}\boxed{\text{ON}}$ $\boxed{\text{CANONICA}}$

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|e'_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad |e'_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

GENERALIZZAZIONE A $\mathbb{C}^N$

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix}$$ N-PLE DI NUMERI COMPLESS

$$\langle a| = (z_1^* \; z_2^* \; - \; z_N^*) \; , \quad |b\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}$$

$$\langle b|a\rangle = \sum_{i=1}^{N} y_i^* z_i$$ $\boxed{\text{PRODOTTO SCALARE}}$

$$\|a\|^2 = \langle a|a\rangle = \sum_{i=1}^{N} |z_i|^2$$ $\boxed{\text{NORMA}}$

BASE CANONICA

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad |e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |e_N\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

TEOREMA

TUTTI GLI SPAZI VETTORIALI LINEARI DI DIMENSIONE N SUL CAMPO COMPLESSO SONO ISOMORFI A $\mathbb{C}^N$

(DISCUTIAMO MEGLIO IN SEGUITO)

STATI DI SPIN PER PARTICELLA SPIN $\frac{1}{2}$

$S_z = -\frac{1}{2} \quad +\frac{1}{2}$

$|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

$|\psi\rangle = c_1 |\uparrow\rangle + c_2 |\downarrow\rangle$

BASE $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$|\psi\rangle = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$|c_1|^2 \Rightarrow$ PROBABILITÀ DI TROVARE $S_z = \frac{1}{2}$

$|c_2|^2 \Rightarrow$ PROBABILITÀ DI TROVARE $S_z = -\frac{1}{2}$

$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ RELAZIONE COMPLETEZZA

$\Rightarrow$ PROBABILITÀ TOTALE (SOMMA)

$= 1$

UNITARIETÀ DELLA MQ

ESEMPIO N° 3

SPAZIO H^2 DELLE SOLUZIONI DELLA EDO LINEARE $\quad y(x) \quad x \in [0, 2\pi]$

$x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + m^2 y = 0 \qquad y \in \mathbb{C} \quad m \in \mathbb{Z}$$

SOLUZIONI LIN. IND.

$$y_1 = e^{imx} \qquad y_2 = e^{-imx}$$

GENERICA SOLUZIONE

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

H^2 HA DIMENSIONE 2
(ISOMORFO A $\mathbb{C}^2$)

$\boxed{\text{PRODOTTO SCALARE}}$

$$\langle y|z\rangle = \int_0^{2\pi} y^* z \, dx$$

$\boxed{\text{NORMA}}$

$$\langle y|y\rangle = \|y\|^2 = \int_0^{2\pi} |y|^2 dx$$

BASE ON $|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}$

$|e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-imx}$

$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$

$$\langle e_1 | e_1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix} e^{ix} dx = 1$$

$$\langle e_2 | e_2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix} e^{-xi} dx = 1$$

$$\langle e_1 | e_2 \rangle = \int_0^{2\pi} e^{-2ix} dx = 0 = \langle e_1 | e_2 \rangle$$

$|e_1\rangle, |e_2\rangle$ GENERANO H^2

$\forall y \in H^2$ POSSIAMO SCRIVERE

$$y = \sum_{i=1}^{2} c_i |e_i\rangle = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

ISOMORFISMO CON $\mathbb{C}^2$

POSSIAMO RAPPRESENTARE y CON IL VETTORE

$$|y\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$ NELLA BASE SCELTA

ESEMPIO FISICO

NECCESSITÀ DI GENERALIZZAZIONE DELLA STRUTTURA DI SPAZIO VETTORIALE SUL CAMPO REALE AL CAMPO COMPLESSO

- DESCRIZIONE FENOMENI PERIODICI
  - CORRENTI
  - ONDE
  - FENOMENI PERIODICI GENERICI

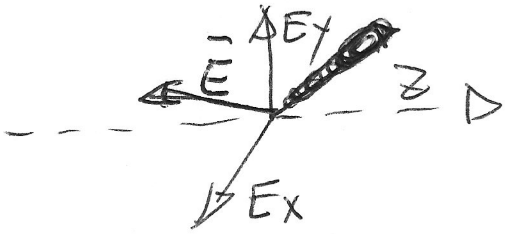
- MECCANICA QUANTISTICA

ESEMPIO STATO DI POLARIZZAZIONE DELLA LUCE

- LUCE È ONDA ELETTROMAGNETICA

DESCRITTA DA $\bar{E}(z,t) = (E_x, E_y)$

ONDA PIANA PERPENDICOLARE DIREZIONE PROPAGAZIONE z



ONDA ARMONICA RAPPR. COMPLESSA

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 e^{i(kz-\omega t)} \\ E_2 e^{i(kz-\omega t+\phi)} \end{pmatrix}$$

$K = \frac{2\pi}{\lambda}$ VETTORE D'ONDA

$\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ PERIODO $\phi \to$ SFASAMENTO

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 e^{i\phi} \end{pmatrix} e^{i(kz - \omega t)}$$

- STATI DI POLARIZZAZIONE $\Rightarrow$ CURVA DESCRITTA DAL VETTORE $\bar{E}$

- $\phi = 0$ POLARIZZAZIONE RETTILINEA (RETTA)

- $\phi = \frac{\pi}{2}$ POLARIZZAZIONE CIRCOLARE (CIRCONFERENZA)

- ϕ GENERICO POLARIZZAZIONE ELLITTICA

GENERICO STATO DI POLARIZZAZIONE

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 e^{i\phi} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

PUÒ ESSERE SCRITTO COME

$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|e_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\bar{E} = E_1 |e_1\rangle + E_2 |e_2\rangle$$

$\phi = 0$

$\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ BASE POL. LINEARE

$$\bar{E} = E_1 |e_+\rangle + E_2 |e_-\rangle$$

$\{|e_+\rangle, |e_-\rangle\}$ BASE POL. CIRCOLARE

$$|e_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad |e_-\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$\phi = \pi/2$