SPAZI VETTORIALI LINEARI SUL CAMPO COMPLESSO

- ESTENSIONE AL CAMPO COMPLESSO $\mathbb{C}$ DEGLI SPAZI VETTORIALI LINEARI SUL CAMPO REALE $\mathbb{R}$

- BASE FISICA (E NON SOLO FISICA...)

LINEARITÀ ~ PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

SE UNA CAUSA O PERTURBAZIONE $\bar{V}$ GENERA UN EFFETTO $H(\bar{V})$

ALLORA $\bar{W} = \alpha \bar{V}_1 + \beta \bar{V}_2$

SODDISFA

$$\boxed{H(\alpha \bar{V}_1 + \beta \bar{V}_2) = \alpha H(\bar{V}_1) + \beta H(\bar{V}_2)}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

ESEMPIO: FORZA LINEARE

$F(x) = -k(x - x_0)$ → PUNTO DI EQUILIBRIO

$U(x) = \frac{1}{2} k x^2$

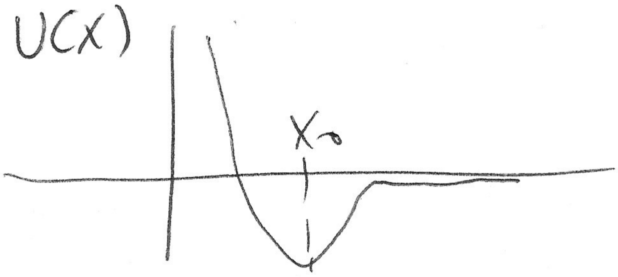
PERTURBAZIONE: SPOSTAMENTO DAL PUNTO DI EQUILIBRIO x_0

RISPOSTA: $y = \alpha x_1 + \beta x_2$

$$F(y) = F(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha F(x_1) + \beta F(x_2)$$

- FORZA LINEARE DESCRIVE OSCILLATORE ARMONICO.

- PIÙ IN GENERALE ANCHE SE LA FORZA NON È LINEARE



NELL'INTORNO DI x_0 (EQUILIBRIO) POSSIAMO SCRIVERE $U(x) = U(x_0) + \frac{1}{2} U''(x_0)(x-x_0)^2 + O((x-x_0)^3)$

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\underbrace{k}_{U''(x_0)}(x - x_0)$$

VALE PER DEFORMAZIONI PICCOLE

$$\frac{x - x_0}{L} \ll 1$$

SISTEMI DINAMICI LINEARI

LINEARITÀ VALE IN TANTISSIMI SISTEMI DI VARIA NATURA (FISICA, CHIMICA, TEORIA DEI SISTEMI, (RISPOSTA), BIOLOGIA, FINANZA ...

- SISTEMI LINEARI IN FISICA
  - OSCILLATORE ARMONICO
  - PROPAGAZIONE ONDE
  - MECCANICA QUANTISTICA
  - ......
-
- DINAMICA POPOLAZIONI
- CRESCITA FINANZIARIA (PIL)
- DIFFUSIONE MALATTIE VIRALI

$y(t)$
- POPOLAZIONE AL TEMPO T
- INFETTI AL TEMPO T

$$dy = (\alpha - \beta)\, y \, dt$$

α → COEFFICIENTE CONTAGGIO

β → // RIMOZIONE

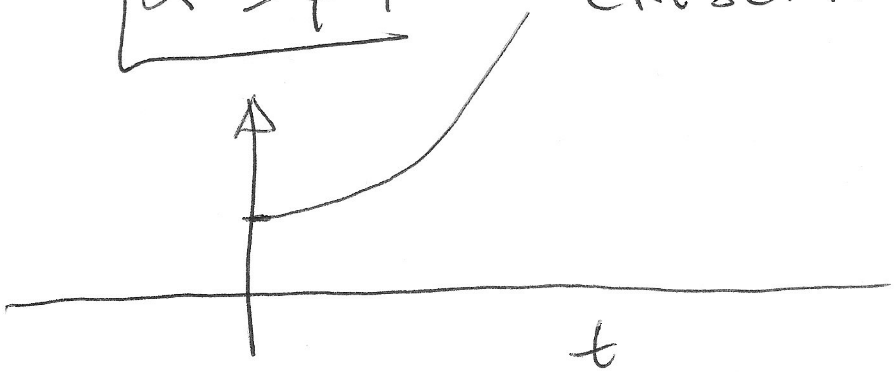
$$\frac{dy}{dt} = (\alpha-\beta)\, y \Rightarrow \frac{dy}{y} = (\alpha-\beta)\, dt$$

$$y = y_0 \, e^{(\alpha-\beta)t}$$

y_0 ↓ INFETTI A $t=0$

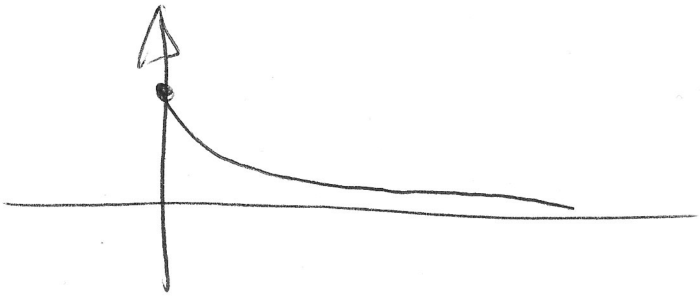
$\boxed{\alpha > \beta}$ CRESCITA ESPONENZIALE

ESPLOSIONE
MALATTIA VIRALE
DEMOGRAFICA
ETC



$\boxed{\alpha < \beta}$ DECADIMENTO ESPONENZIALE

- ESTINSIONE



LIMITI MODELLO LINEARE

- VALE SOLO PER PICCOLE PERTURBAZIONI, VICINO ALL' EQUILIBRIO
- FEED-BACK DELL'AMBIENTE (BACK-REACTION)

ESEMPIO MODELLO EPIDEMIOLOGICO (SI)

N - INDIVIDUI

S - SUSCETTIBILI AL VIRUS

I - INFETTI

α - PARAMETRO INFETTIVITÀ

$$S(t) + I(t) = N$$

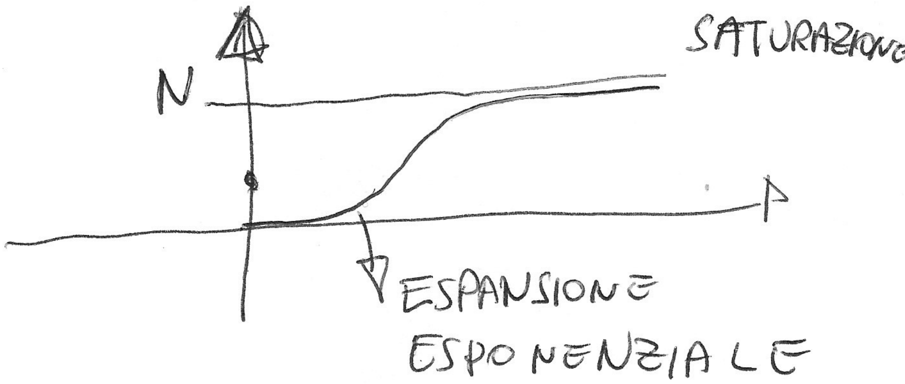
$$\frac{dS}{dt} = -\alpha S I \qquad \frac{dI}{dt} = \alpha S I$$

MAPPA LOGISTICA

$$\frac{dI}{dt} = \alpha I (N - I) = \underbrace{\alpha N I}_{\text{TERMINE LINEARE}} - \underbrace{\alpha I^2}_{\text{FEED BACK}}$$

$$\frac{dI}{I(N-I)} = \alpha \, dt \qquad I(t) = \frac{N}{1 + C_0 e^{-\alpha t}}$$

$$= \frac{N e^{\alpha t}}{e^{\alpha t} + C_0}$$



MODELLO SIR

- INTRODUCE RIMOSSI R (DECEDUTI, GUARITI, NON PIÙ INFETTABILI)

  $\beta \rightarrow$ PARAMETRO RIMOZIONE

$\frac{1}{\beta} \sim$ N. GIORNI MEDI IN CUI INDIVIDUO È CONTAG.

$$N = S(t) + I(t) + R(t)$$

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha S I$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha S I - \beta I$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

$$\Gamma = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} = I\alpha\left(S - \frac{\beta}{\alpha}\right) = I\alpha(S - \Gamma)$$

- EPIDEMIA È UN FENOMENO A SOGLIA!

SE $\frac{S}{\Gamma} > 1$ $\quad \frac{dI}{dt} > 0$ SI SCATENA EPIDEMIA

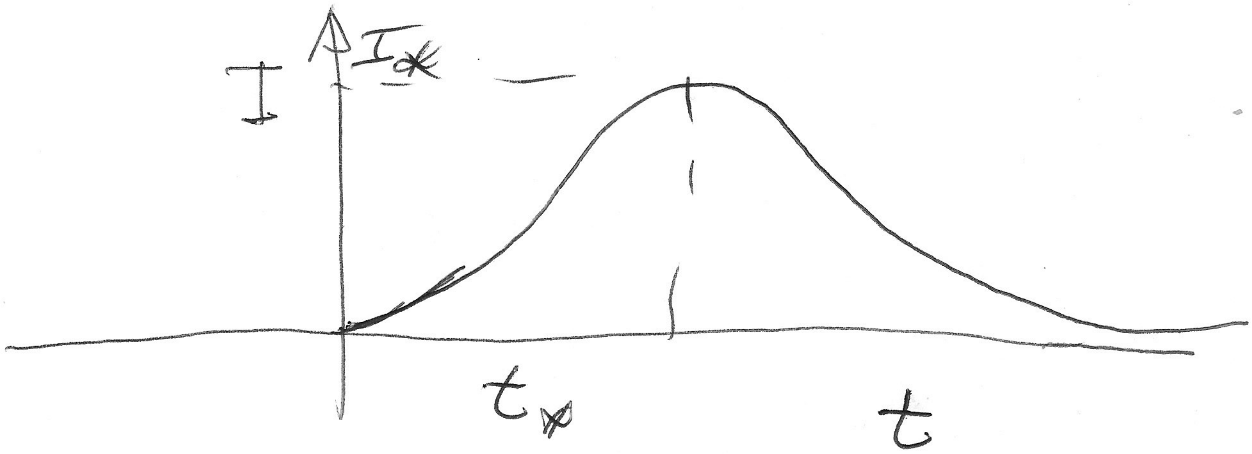
SE $\frac{S}{\Gamma} < 1$ $\quad \frac{dI}{dt} < 0$ L'EPIDEMIA NON PARTE!!

- PER NON FAR PARTIRE L'EPIDEMIA POSSIAMO

(1) DIMINUIRE S: DIVIDIAMO LA REGIONE IN PARTI PIÙ PICCOLE NON COMUNICANTI

(2) AUMENTARE Γ — DIMINUIRE α / AUMENTARE β

- SE L'EPIDEMIA PARTE $(S > \Gamma)$ S COMUNQUE DIMINUIRÀ FINCHE $S(t) < \Gamma$ (MASSIMO)



- NELLA PRIMA FASE DI CRESCITA ESPONENZIALE POSSIAMO COMUNQUE CERCARE DI ~~[illegible]~~ DIMINUIRE LA CRESCITA AGENDO SU α, β

$$\frac{dI}{dt} = \alpha(N-I-R)I - \beta I \sim (\alpha N - \beta) I$$

+ TERMINI LINEARI

- SE ABBASSIAMO IL PICCO I^* ALLUNGHIAMO t_*

GLI SPAZI VETTORIALI (LINEARI) SONO LA STRUTTURA ALGEBRICA CHE DESCRIVE LA LINEARITÀ

ABBIAMO BISOGNO DI DUE INGREDIENTI

- UNA STRUTTURA ALGEBRICA A CHE CI CONSENTA DI COSTRUIRE COMBINAZIONI LINEARI:

$$\forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in A \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2 = \bar{v}_3 \in A$$

- MAPPE LINEARI (NOI LI CHIAMEREMO OPERATORI) H

$$H(\alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2) = \alpha H(\bar{v}_1) + \beta H(\bar{v}_2)$$

1. RICHIAMI DI ANALISI VETTORIALE

- LA NOZIONE ELEMENTARE DI $\boxed{\text{VETTORE}}$ HA UN' ORIGINE FISICA:

GRANDEZZA FISICA CARATTERIZZATA DA

- MODULO
- DIREZIONE
- VERSO

$\bar{V}$

(FORZA, VELOCITÀ ETC)

- GENERALIZZA LA NOZIONE DI GRANDEZZA SCALARE

- DATO UN INSIEME DI VETTORI SI DEFINISCE NELL' INSIEME UNA OPERAZIONE DI SOMMA CHE È $\boxed{\text{ASSOCIATIVA}}$ E $\boxed{\text{COMMUTATIVA}}$

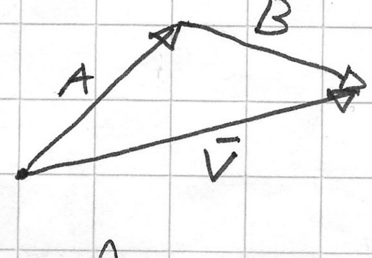
$$\bar{D} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

$$\bar{D} = \bar{A} + (\bar{B} + \bar{C}) = (\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C}$$

$$= (\bar{B} + \bar{A}) + \bar{C}$$

GRAFICAMENTE

$$\bar{V} = \bar{A} + \bar{B}$$

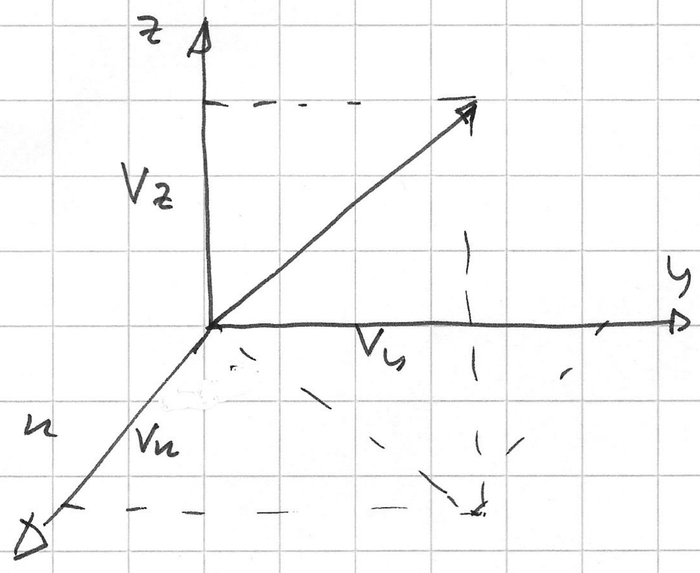


GEN. STRUTTURA ALGEBRICA

VETTORI NELLO SPAZIO EUCLIDEO 3D

- DATO UN VETTORE $\bar{V}$ ED UN SISTEMA DI COORDINATE CARTESIANO (x, y, z) POSSIAMO ASSOCIARE A V LE SUE COMPONENTI NEL SISTEMA (PROIEZIONI SUGLI ASSI)

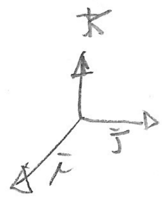
$$\boxed{\bar{V} \longleftrightarrow (V_x, V_y, V_z)}$$



- SECONDA DEFINIZIONE DI VETTORE

TERNA ORDINATA DI NUMERI REALI

INTRODUCENDO I VERSORI $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ <u>ON</u>



BASE ON

$$\bar{V} = V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k} \qquad \bar{V} \to \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

GENERALIZZAZIONE SPAZIO EUCLIDEO N-DIM.

N-PLA (NUMERI REALI

$$V \to (V_1, V_2 \ldots V_N) \to V_i \qquad i = 1 \ldots N$$

BASE ON $e_1, e_2, \ldots e_N$

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i e_i$$

$\boxed{\text{PRODOTTO SCALARE}}$ $\bar{V}, \bar{W}$

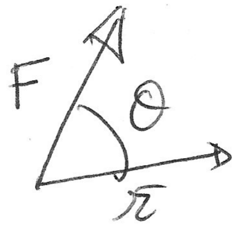
ASSOCCIA AD OGNI COPPIA DI VETTORI

UN ~~[illegible]~~ NUMERO REALE (PIÙ IN GENERALE

COMPLESSO.

ESEMPIO LAVORO COMPIUTO DA UNA

FORZA



$$L = |F||r| \cos\theta$$

IN COMPONENTI

$$\bar{V} \cdot \bar{W} = \sum_{i=1}^{3} V_i W_i$$

- COME VEDREMO IN DETTAGLIO PIÙ AVANTI IL PRODOTTO SCALARE CONSENTE DI DEFINIRE IL MODULO (NORMA) DI UN VETTORE $\|V\| = \sqrt{\bar{V} \cdot \bar{V}}$

E DALLA NORMA UNA DISTANZA (METRICA)

$$d(V_1, V_2) = \|\bar{V}_1 - \bar{V}_2\|$$

SPAZI VETTORIALI SUL CAMPO COMPLESSO

- LA NOZIONE DI SPAZIO VETTORIALE ~~NASCE~~ SUL CAMPO COMPLESSO NASCE DALLA GENERALIZZAZIONE DELLE NOZIONI INTUITIVE PRECEDENTI

- DATO UN INSIEME ASTRATTO DI ELEMENTI $\bar{V}$ DICIAMO CHE ESSI FORMANO (O SU DI ESSI È DEFINITA) UNA STRUTTURA ALGEBRICA DI **SPAZIO VETTORIALE LINEARE SUL CAMPO COMPLESSO** SE SONO SODDISFATTE LE PROPRIETÀ SEGUENTI

$V = \{a, b, c \ldots\}$

1. È DEFINITA UN' OPERAZIONE DI SOMMA CHE È ASSOCIATIVA E COMMUTATIVA

$\forall a, b \in V \Rightarrow a+b = c \in V$

CON $a+b = b+a$, $(a+b)+c = a+(b+c)$

2. È DEFINITA UN' OPERAZIONE DI MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE (NUMERO COMPLESSO) CHE È ASSOCIATIVA E DISTRIBUTIVA RISPETTO ALL' ADDIZIONE

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\forall a, b \in V$

- $\alpha a \in V$, $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta) a$
- $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$

3. ESISTE ELEMENTO NEUTRO 0

$a + 0 = a \quad \forall a \in V$

4. ESISTE ELEMENTO INVERSO DI a

$-a$

$a + (-a) = 0 \quad \forall a \in V$

- PER INDICARE I VETTORI USEREMO LA NOTAZIONE DI DIRAC

$$a \Rightarrow |a\rangle \quad \text{VETTORE } \boxed{\text{KET}}$$

E PER ESEMPIO SCRIVEREMO

$$|a\rangle \in V$$

$$|a\rangle + |b\rangle = |b\rangle + |a\rangle \quad \text{(PROP. COMM.)}$$
$$\alpha(|a\rangle + |b\rangle) = \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle \quad \text{(PROP. DISTR.)}$$

- DIMENSIONE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

NUMERO MASSIMO DI VETTORI $\in V$ LINEARMENTE INDIPENDENTI:

$$\sum_i c_i |a_i\rangle = 0 \Rightarrow c_i = 0$$

$$c_i \in \mathbb{C} \qquad |a_i\rangle \in V$$

- INDICHIAMO IL VETTORE NULLO CON $|0\rangle$

$$|a\rangle + |0\rangle = |a\rangle$$

PRODOTTO SCALARE

SU UNO SPAZIO VETTORIALE LINEARE SU $\mathbb{C}$ DEFINIAMO UN PRODOTTO SCALARE COME UNA CORRISPONDENZA CHE ASSOCIA AD OGNI COPPIA ORDINATA DI VETTORI $(|a\rangle, |b\rangle)$ UN NUMERO COMPLESSO

$$(|a\rangle, |b\rangle) \rightarrow \alpha \in \mathbb{C}$$

$|a\rangle, |b\rangle \in \mathbb{C}$

CORRISPONDENZA

$$V \otimes V \rightarrow \mathbb{C}$$

INDICHIAMO IL PRODOTTO SCALARE CON LA NOTAZIONE

$$\langle a|b\rangle$$

[SE NON SI USA LA NOTAZIONE DI DIRAC SI INDICA CON

$$(a, b)$$

QUESTA CORRISPONDENZA DEVE SODDISFARE LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

1. $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$

2. $\langle a|a\rangle = 0 \iff |a\rangle = 0$

3. $\langle a|a\rangle \geq 0$

NB. DA 1. SEGUE $\langle a|a\rangle = \langle a|a\rangle^*$

$\Rightarrow \langle a|a\rangle \in \mathbb{R}$

4. LINEARITÀ:

SE $|c\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$

$$\langle d|c\rangle = \alpha\langle d|a\rangle + \beta\langle d|b\rangle$$

- $\boxed{\text{ORTOGONALITÀ}}$

LA NOZIONE DI PRODOTTO SCALARE CONSENTE DI DEFINIRE DUE VETTORI $|a\rangle, |b\rangle \neq |0\rangle$ ORTOGONALI SE

$$\langle a|b\rangle = 0$$

SPAZI E VETTORI DUALI

POSSIAMO PENSARE AL SIMBOLO

$\langle b|$ CHE COMPARE NELLA

DEFINIZIONE DEL PRODOTTO SCALARE COME

ELEMENTO $\boxed{\text{DUALE}}$ a $|b\rangle$

ED ALLO SPAZIO RELATIVO COME

$\boxed{\text{SPAZIO DUALE}}$ V^*

NELLA NOTAZIONE DI DIRAC

$\langle b|$ È UN VETTORE

$\boxed{\text{BRA}}$

$\boxed{\text{BRA}}\,\boxed{\text{KET}} = \langle b|a\rangle$

PARENTESI IN INGLESE

N.B. SE

$$|c\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$$

$$\langle c| = \langle a|\alpha^* + \beta^*\langle b|$$

SEGUE DA:

$$\langle c|d\rangle = \langle d|c\rangle^* = [\langle d|(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle)]^*$$
$$= [\alpha\langle d|a\rangle + \beta\langle d|b\rangle]^* = \alpha^*\langle d|a\rangle^*$$
$$+ \beta^*\langle d|b\rangle^* = \alpha^*\langle a|d\rangle + \beta^*\langle b|d\rangle$$
$$= (\alpha^*\langle a| + \beta^*\langle b|)\,|d\rangle$$
$$\Rightarrow \quad \langle c|$$

LA NOZIONE DI DUALE È L'EQUIVALENTE DELLA NOZIONE DI CONIUGAZIONE COMPLESSA PER $\mathbb{C}$

- SE SU UNO SPAZIO VETTORIALE È DEFINITO UN PRODOTTO SCALARE. QUESTO SPAZIO È AUTOMATICAMENTE DOTATO DI UNA NORMA QUINDI DI UNA METRICA DIVENTA QUINDI UNO SPAZIO VETTORIALE LINEARE METRICO

DIMOSTRIAMO ORA $\boxed{\text{NORMA INDOTTA DA P. SCALARE}}$ CHE UNO SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{C}$ IN CUI È DEFINITO UN PRODOTTO SCALARE È ANCHE UNO SPAZIO METRICO CIOÈ È IN ESSO È AUTOMATICAMENTE DEFINITA UNA DISTANZA

$$V = \{ |x\rangle, |y\rangle \ldots \}$$

- PARTIAMO DALLA DEFINIZIONE DI NORMA

$\|x\|$ $f: V \to \mathbb{R}$ TALE CHE

(1) $\|x\| \geq 0$

(2) $\|x\| = 0 \iff |x\rangle = 0$

(3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ $\quad \lambda \in \mathbb{C}$

(4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

SPAZIO VETTORIALE $\boxed{\text{NORMATO}}$ ESEMPI: $\mathbb{R}^n$ NORMA EUCLIDEA / $|\sup v_i|$

- DIMOSTRIAMO CHE IN UNO SPAZIO V IN CUI È DEFINITA UNA NORMA ALLORA POSSIAMO SEMPRE DEFINIRE UNA DISTANZA

$$d(w, z) = \|w - z\|$$

INFATTI

- $d(w, z) \in \mathbb{R}^+$ SEGUE DA $\|x\| \geq 0$
- $d(w, z) = 0 \iff |w\rangle = |z\rangle$
SEGUE DA (2)
- $d(w, z) = d(z, w)$ SEGUE da (3) con $\lambda = -1$
- $d(w, z) \leq d(w, v) + d(v, z)$
SEGUE DA 4 con
$|x\rangle = |w\rangle - |v\rangle$
$|y\rangle = |v\rangle - |z\rangle$

• DIMOSTRIAMO ORA CHE SE DEFINIAMO

$$\|X\| = \sqrt{\langle X|X\rangle}$$ (NORMA INDOTTA DA PRODOTTO SCALARE

ALLORA SONO VERIFICATE LE (1) .. (4)

• LE PROPRIETÀ (1) (2) (3) SEGUONO IMMEDIATAMENTE DALLE PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE

• PER DIMOSTRARE LA (4) (DISEGUAGLIANZA TRIANGOLARE) DIMOSTRIAMO PRELIMINARMENTE LA

DISEGUAGLIANZA DI SCHWARZ

$$\forall\, |a\rangle, |b\rangle \in V$$

$$|\langle a|b\rangle| \leq \|a\|\,\|b\|$$

DEFINIAMO $|c\rangle = |a\rangle - \lambda\,\alpha\,|b\rangle$

$$\alpha = \langle b|a\rangle$$

$$\forall\, |a\rangle, |b\rangle \qquad \langle c|c\rangle = \|c\|^2 \geq 0$$

$$\left(\langle a| + \lambda\,\alpha^*\langle b|\right)\left(|a\rangle + \lambda\,\alpha|b\rangle\right)$$

$$= \langle a|a\rangle + \lambda\alpha\langle a|b\rangle + \lambda\alpha^*\langle b|a\rangle + \lambda^2|\alpha|^2\langle b|b\rangle \qquad \forall\lambda$$

$$= \|a\|^2 + 2\lambda|\alpha|^2 + \lambda^2|\alpha|^2\,\|b\|^2 \geq 0$$

$$\Delta = 4|\alpha|^4 - 4|\alpha|^2\|a\|^2\|b\|^2 \leq 0$$

$$|\alpha|^2 \leq \|a\|^2\|b\|^2$$

$$\Rightarrow \quad |\langle a|b\rangle| \leq \|a\|\,\|b\| \qquad \text{cvd}$$

- DIMOSTRIAMO ORA LA DISEGUAGLIANZ TRIANGOLAR

$$\|x+y\|^2 = \left(\langle x| + \langle y|\right)\left(|x\rangle + |y\rangle\right)$$

$$= \langle x|x\rangle + \langle y|y\rangle + \langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x|y\rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x|y\rangle|$$

(ESSENDO $\mathrm{Re}\, z \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$)

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = \left(\|x\| + \|y\|\right)^2$$

(DA $|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$)

SEGUE

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

SPAZIO VETTORIALE DOTATO DI PRODOTTO SCALARE $\Rightarrow$

SPAZIO METRICO