Spazi vettoriali

(1) Determinare se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\} \\
B &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z + 1\} \\
C &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z^2\} \\
D &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = (y,x,x)\} \\
E &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\} \\
F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - z^2 = 0; x + z = 0\}
\end{aligned}$$

(2) Sia S il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$v = (1,0,-1) \qquad\qquad w = (0,0,1)$$

Scrivere S come spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

(3) Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono formati da vettori linearmente indipendenti:

$$\begin{aligned}
S &= \{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (2,-2,9)\} \\
T &= \{(2,1,3),\ (1,1,2),\ (3,2,5)\} \\
U &= \{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\} \\
V &= \{(a,b,0)\ :\ a,b \in R\}
\end{aligned}$$

(4) Provare che l'insieme

$$S = \{(1,1,0),\ (1,1,1),\ (2,1,0),\ (1,0,-1)\}$$

è un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$. Estrarre una base di $\mathbb{R}^3$ dagli elementi di S.

(5) Determinare una base del sottospazio S di $\mathbb{R}^3$ formato dalle soluzioni dell'equazione

$$x - 2y + 2z = o$$

(6) Sia W il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito come

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ (x,y,z) = (z,y,x)\}.$$

- Provare che W un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.
- Calcolare la dimensione di$W$ e determinare una sua base $\mathcal{B}$.
- Provare che il vettore $w = (3,2,3)$ appartiene a W e determinare le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(7) Sia

$$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

un sottoinsieme di vettori linermente indipendenti in uno spazio vettoriale reale V. Provare che anche

$$S' = \{2v_1, 2v_2, \ldots, 2v_n\}$$

è un sottoinsieme di vettori linearmente indipendenti.

(8) Determinare i valori del parametro reale k per i quali i tre vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1,1,0,1) \qquad\qquad v_2 = (k,2,1,1) \qquad\qquad v_3 = (-1,1,1,0)$$

sono linearmente dipendenti. Per tali valori esprimere uno dei tre vettori come combinazione lineare degli altri due.

(9) Determinare la dimensione e una base dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} S &= L\{(1,1,1),(1,3,5)\}; \\ T &= L\{(0,0,1),(1,2,-1),(-3,-6,-4)\}; \\ W &= L\{(3,4,6),(1,0,1),(0,1,1)\}. \end{aligned}$$

(10) Dati i vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (4,19,7,-1) \qquad v_2 = (0,2,4,-4) \qquad v_3 = (0,3,1,1) \qquad v_4 = (1,1,3,-5)$$

sia V il sottospazio

$$V = L\{v_1, v_2, v_3, v_4\}.$$

Determinare una base di V.

(11) Sia S il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(1,1,0),\ (0,1,1)\}.$$

Determinare i valori del parametro reale q per i quali

$$(1,1,q) \in LS.$$

(12) Siano dati i vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1,2,-1) \qquad v_2 = (-2,k-2,k+4) \qquad v_3 = (1,2,k-2) \qquad v_4 = (3,5,k-1)$$

- Determinare, al variare del parametro reale k, la dimensione e una base del sottospazio V generato da v_1, v_2 e v_3.
- Determinare per quali valori del parametro reale k il vettore v_4 appartiene a V e, in tal caso, scrivere v_4 come combinazione lineare degli elementi di una base di V.

(13) Determinare i valori del parametro q per cui la somma dei sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W = L\{(1,2,0),(q,1,1)\} \qquad \text{e} \qquad U = \{(x,x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

è una somma diretta.

(14) Provare che se $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ sono basi di due sottospazi W eW' di $\mathbb{R}^n$ tali che $W \cap W' = \{0\}$, allora $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ base di $W \oplus W'$.

(15) Date le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

provare che l'insieme $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ è un insieme linearmente indipendente nello spazio delle matrici 2×3 a coefficienti reali.

(16) Provare che le seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono una base del sottospazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali formato dalle matrici simmetriche