SPAZI DI FUNZIONI

CONSIDERIAMO

$$f(x) \in H \subseteq \mathbb{C} \qquad x \in D \subset \mathbb{R}$$

H PUÒ ESSERE

1. SPAZIO DELLE FUNZIONI CONTINUE

$H = C^0$

2. SPAZIO DELLE FUNZIONI GENERALMENTE CONTINUE $H = GC$

CONTINUE TRANNE CHE IN UN NUMERO FINITO DI PUNTI x_0 TALI CHE

$$\lim_{x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \pm\infty$$

ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

3. SPAZIO FUNZIONI CONTINUE FINO ALLA DERIVATA n-SIMA

$$H = C^n$$

4. SPAZIO FUNZIONI CONTINUE CON TUTTE LE DERIVATE

$H = C^{\infty}$ ESEMPIO : $f(x) = e^{ix}$

5. SPAZIO DELLE FUNZIONI INTEGRABILI SECONDO RIEMANN NELL' INTERVALLO $[a,b]$

$$H = \mathcal{R}(a,b)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{FINITO}$$

6. SPAZIO $L^p(a,b)$ $H = L^p(a,b)$

$f(x) \in L^p(a,b)$ SE

$$\int_a^b |f|^p\,dx = \text{FINITO}$$

CASI PARTICOLARI IMPORTANTI

7. $p = 1$ $\quad H = L(a,b)$

$$\int_a^b |f| \, dx = \text{FINITO}$$

8. $p = 2$ $\quad H = L^2(a,b)$

$$\int_a^b |f|^2 \, dx = \text{FINITO}$$

GERARCHIA

$$C^\infty(a,b) \subseteq C^M(a,b) \subseteq C^0(a,b) \subseteq$$
$$GC(a,b) \subseteq \mathcal{R}(a,b)$$

$L^p(a,b)$ NON HA GERARCHIA CHIARA

- SU TUTTI QUESTI SPAZI LE OPERAZIONI DI SOMMA TRA FUNZIONI E MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE DEFINISCONO UNA STRUTTURA DI SPAZIO VETTORIALE SU $\mathbb{C}$

ESEMPIO

$f_1(x), f_2(x) \in C^0 \Rightarrow \alpha f_1 + \beta f_2 \in C^0$

PER $L^p(a,b)$ NON IMMEDIATO

VERRÀ DIMOSTRATO IN SEGUITO

PER $L^2(a,b)$

POSSIAMO QUINDI USARE NOTAZIONE DI DIRAC

$$f(x) \rightarrow |f\rangle$$

$$f^*(x) \rightarrow \langle f|$$

$\boxed{\text{PRODOTTO SCALARE}}$

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f^* g \, dx \qquad \int_a^b f^* g \, dx = \left(\int_a^b g^* f \, dx\right)^*$$

- $\langle f|g\rangle = \langle g|f\rangle^* \Leftarrow$
- > 0
- $\langle f|f\rangle \geq 0 \Leftarrow \int_a^b |f|^2 dx \geq 0$

- $\langle f|f\rangle = 0 \Rightarrow f=0$

$$\Leftarrow \int |f|^2 dx = 0 \Rightarrow f = 0$$

- LINEARITÀ

$$\langle f(\alpha|g\rangle + \beta|h\rangle) = \alpha\langle f|g\rangle + \beta\langle f|h\rangle$$

$$\Leftarrow \int [f^*(\alpha g + \beta h)] dx$$

$$= \alpha \int_a^b f^* g\, dx + \beta \int_a^b f^* h\, dx$$

- UNA VOLTA CHE ABBIAMO UN PRODOTTO SCALARE ABBIAMO UNA NOZIONE DI ORTOGONALITÀ E NORMA DI FUNZIONI

$\langle f|g\rangle = 0 \quad \int_a^b f^* g\, dx = 0$ ORTOGONALITÀ

$\langle f|f\rangle = \|f\|^2 = \int_a^b |f|^2 dx$ NORMA

QUINDI UN SISTEMA ON DI FUNZIONI

$$\{f_n(x)\}$$

$$\langle f_n | f_m \rangle = \int_a^b f_n^*(x)\, f_m(x)\, dx = \delta_{nm}$$

$$n = 1 \; \ldots \; \infty$$

$\boxed{\text{PROBLEMA}}$ $\Rightarrow$ COMPLETEZZA DI

$$\{f_n(x)\}$$

DISTANZE E NORME
SU SPAZI DI FUNZIONI

- DISTANZA EUCLIDEA

$$d_E(f, g) = |f - g| = \| f - g \|_E$$

- DISTANZA SUP

$$\| f - g \|_\infty = d_\infty(f, g) = \sup_D |f - g|$$

- DISTANZA MODULO P

$$d_p(f, g) = \| f - g \|_p = \left(\int_a^b |f - g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$p = 1, 2 \; - \; n$$

CASI PARTICOLARI IMPORTANTI

$\boxed{p=1}$

$$d_1(f,g) = \|f-g\|_1 = \int_a^b |f-g|\,dx$$

$\boxed{p=2}$ $$d_2(f,g) = \left(\int_a^b |f-g|^2 dx\right)^{1/2} = \|f-g\|_2$$

SOLO $$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2 dx\right)^{1/2}$$

È INDOTTA DAL PRODOTTO SCALARE!

$$\|f\|_2 = \int_a^b |f|^2 dx = \left(\langle f, f\rangle\right)^{1/2}$$

DISTANZA TRA FUNZIONI

$$d(f,g) = \|f-g\|$$

$$d_E(f,g) = |f-g|$$

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in I} |f-g|$$

$$d_p(f,g) = \left(\int_I dx\, |f-g|^p\right)^{1/p}$$

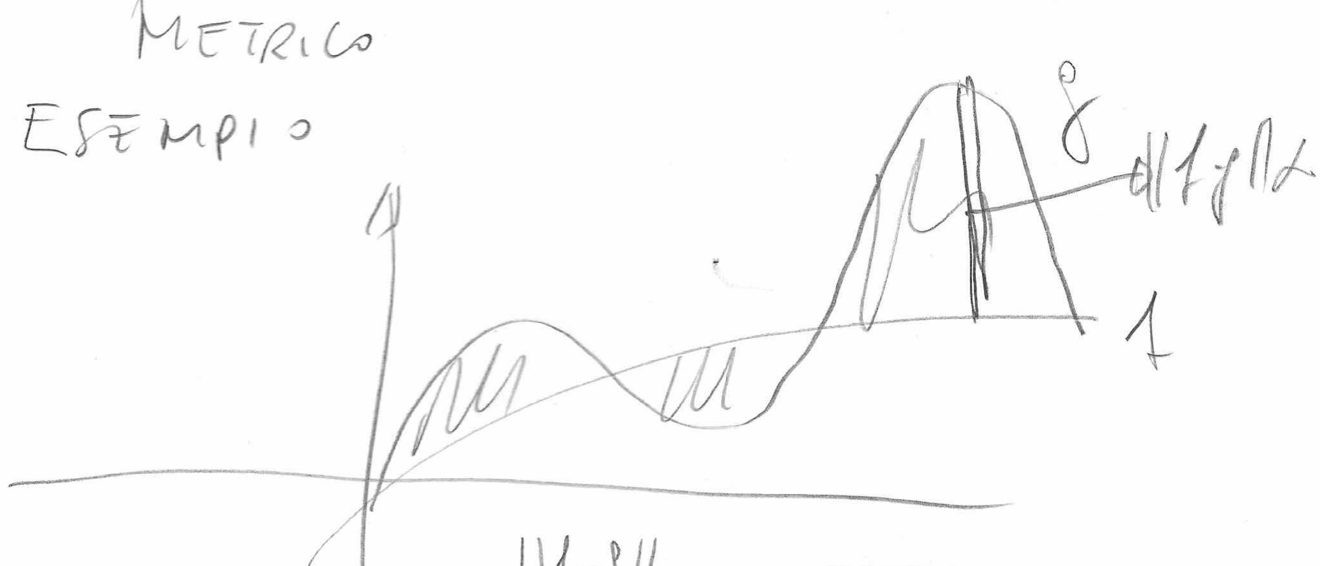
CONSIDEREMO solo $p=1$ e $p=2$

$$d_1(f,g) = \int_I dx\, |f-g|$$

$$d_2(f,g) = \left(\int_I dx\, |f-g|^2\right)^{1/2}$$

SPAZIO DI FUNZIONI $\Rightarrow$ SPAZIO METRICO

ESEMPIO



$\|f-g\|_1 =$ aree

INTEGRALE SECONDO LEBESGUE

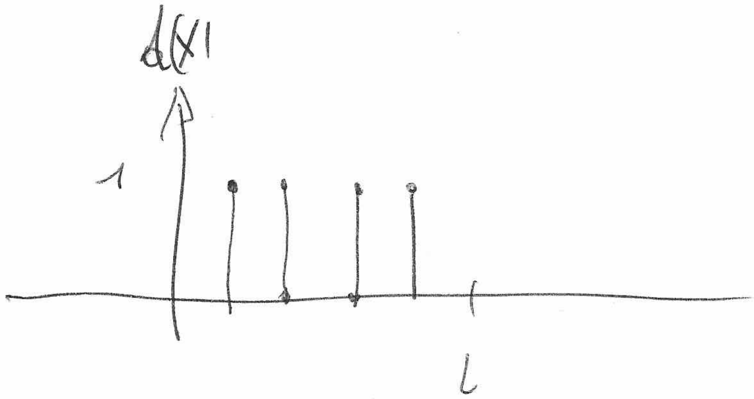
- FUNZIONE DI DIRICHLET

$$d(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \text{IRRAZIONALI} \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq L$$

$$\int_0^L d(x)\, dx = \,?$$

NON È INTEGRABILE SECONDO RIEMANN



PARTIZIONE ARBITRARIA $\Delta_i x$ $i = 1, 2 \ldots N$

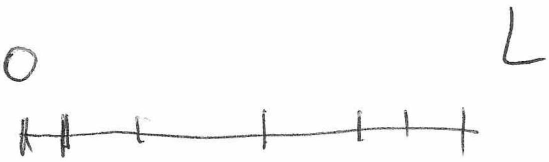
SCEGLIERE $f_i(x_i)$

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} f_i \Delta_i x = \text{ESISTE FINITO}$$

PER $d(x)$ NON ESISTE LIMITE

L_2
E

MISURA DI LEBESQUE DI UN INSIEME



~~RICOPRIMENTI DI E~~

$E \cup E' = (0, L)$

$E \cap E' = \emptyset$

• SI CONSIDERANO TUTTI I RICOPRIMENTI DI E R, POI LA MISURA ESTERNA

$$\mu_{ES}(E) = \min \mu(R)$$

MISURA INTERNA $\quad R'$ RICOPRIMENTI DI E'

$$\mu_{INT}(E) = L - \min \mu(R')$$

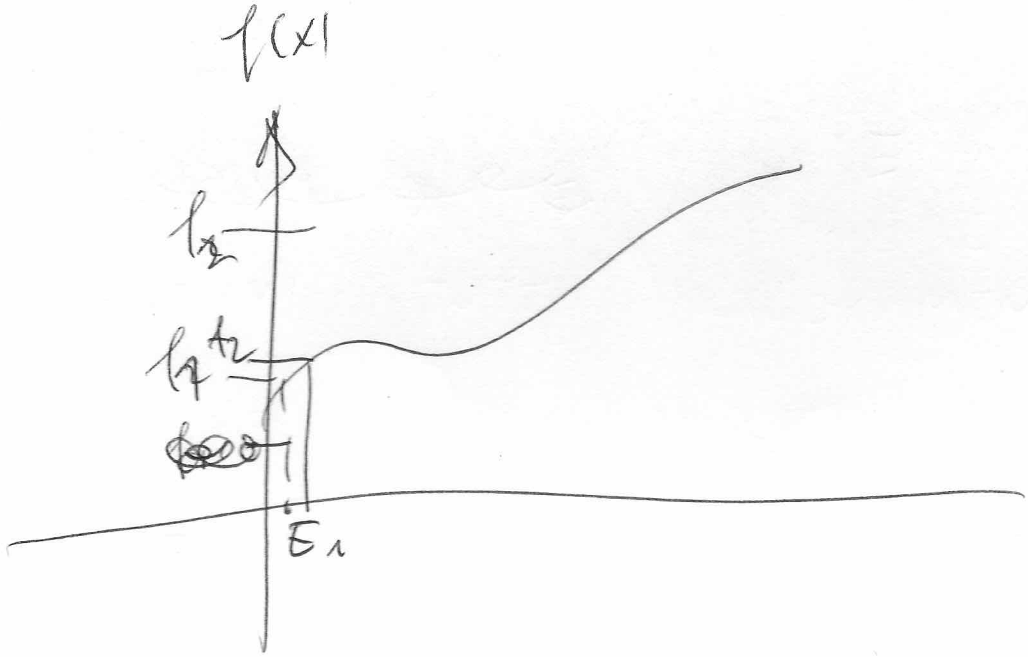
E MISURABILE SECONDO LEBESGUE

SE $\boxed{\mu_{INT} = \mu_{EST}}$

PER $\cancel{\delta}(x)$

$$\mu_{INT} = \mu_{EST} = 0$$

INTEGRALE SECONDO LEBESGUE



- SI CONSIDERANO PARTIZIONI f_i SULL'ASSE Y E CORRISPONDENTI E_i SULL'ASSE X

$$\int_{LEB} f(x)\,dx = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} f_i\, \mu(E_i)$$

$$\int_{LB} d(x)\, dx = 0$$

FUNZIONI Q.D.N

$$\int_{LEB} f(x)\,dx = 0 \not\Rightarrow f(x) = 0$$

COME È NELL' INTEGRALE RIEMANNIANO

PROBLEMI

1) COMPLETEZZA DELLO SPAZIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n \Rightarrow \text{CONVERGE DENTRO } H?$$

$\forall\, u_n \in H$

$c_n \in \mathbb{C}$

2) COMPLETEZZA DEL SISTEMA

ON $\{f_n(x)\}$

$\forall\, f(x) \in H$

POSSO SCRIVERE

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$$

I DUE PROBLEMI SONO LEGATI MA DIVERSI

APPLICHIAMO QUESTE NOZIONI ALLA CONVERGENZA DI SERIE E SUCCESSIONI DI FUNZIONI

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$ RIDOTTA N-SIMA

CONVERGENZA SERIE SI RIDUCE A CONVERGENZA SUCCESSIONE

- PER VALUTARE LA CONVERGENZA

$$\lim_{N \to \infty} S_N(x) = S(x)$$

BISOGNA VALUTARE LA DISTANZA TRA S_N E S

$$d(S_N, S) \qquad \boxed{\lim_{N \to \infty} d(S_N, S) = 0}$$

- DISTANZA DIPENDE DALLA NORMA $\Rightarrow$

CONVERGENZA DI S_N

DIPENDE DALLA NORMA CHE USIAMO

CONVERGENZA PUNTUALE $\Leftrightarrow$ NORMA EUCLIDEA

$$\lim_{N \to \infty} d_E(S_N, F) = 0$$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \; N_0(\varepsilon, x)$ TALE CHE

$N > N_0 \qquad |S_N - S(x)| < \varepsilon$

$$\left(d_E(S_N - S(x)) = 0 \right)$$

CONVERGENZA UNIFORME $\Leftrightarrow$ NORMA

$\|S_N - S\|_\infty$

$$\lim_{N \to \infty} \|S_N - S\|_\infty = \lim_{N \to \infty} \sup_D |S_N - S| = 0$$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \; \exists \; N_0(\varepsilon)$ TALE CHE

PER $N > N_0$

$$|S_N(x) - S(x)| < \varepsilon$$

CONVERGENZA MEDIA ORDINE p

$$\| S_N(x) - S(x) \|_p$$

$$\lim_{N \to \infty} d_p(S_N - S) = \left(\int_a^b |S_N - S|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

ALTRI TIPI DI CONVERGENZA

(∞)

- CONVERGENZA ASSOLUTA

$$\lim_{N \to \infty} |S_N| = S(x)$$

- CONVERGENZA TOTALE

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_\infty = S(x)$$

$$\lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sup_D |f_n(x)| - S \right) = 0$$

$\Rightarrow$ ESISTE UNA SERIE NUMERICA $\sum_n a_n$ TALE CHE

$$f_n(x) \leq |a_n|$$

CRITERIO DI CAUCHY

SE $S_N(x)$ CONVERGE ALLORA

$$\lim_{N,M \to \infty} \| S_N - S_M \| = 0$$

$S_N(x)$ SI CHIAMA SUCCESSIONE DI CAUCHY

N.B. COND. NEC. MA NON SUFF.

CI POSSONO ESSERE SUCCESSIONI DI CAUCHY CHE $\boxed{\text{NON}}$

CONVERGONO IN H!