# SPAZI DI HILBERT

GENERALIZZAZIONE INFINITO-DIMENSIONALE DEL FORMALISMO DEGLI SPAZI VETTORIALI A DIMENSIONE FINITA

**FISICA**

PASSAGGIO DA UN SISTEMA DI N PUNTI MATERIALI (PER ESEMPIO OSCILLATORI ARMONICI)

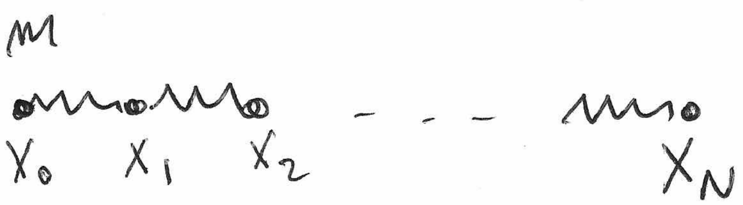
A SISTEMA CONTINUO $\Rightarrow$ CORDA VIBRANTE

**ESEMPIO MOLECOLA $CO_2$**


3 GRADI DI LIBERTÀ

3 MODI NORMALI

- MODELLO DISCRETO DI UNA CORDA VIBRANTE




N GRADI DI LIBERTÀ

SISTEMA CONTINUO (CORDA VIBRANTE)

$N \to \infty$

- IN ENTRAMBI I CASI IL SISTEMA È DESCRITTO DA OPERATORI LINEARI (EQUAZIONI LINEARI)

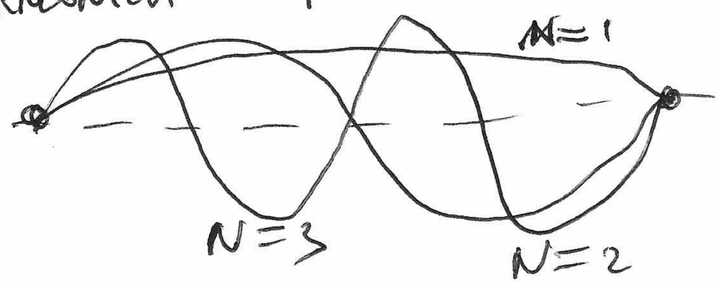
$$H|x\rangle = \omega^2 |x\rangle$$

- NEL PRIMO CASO NUMERO DISCRETO N DI MODI NORMALI

- NEL SECONDO CASO $\boxed{N \to \infty}$

NUMERO INFINITO DI MODI NORMALI (MODI DI VIBRAZIONE DELLA CORDA)

ARMONICA PRINCIPALE + ARMONICHE SUCCESSIVE




- - - -

SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI DELLA CORDA VIBRANTE = SPAZIO VETTORIALE LINEARE A DIMENSIONE INFINITA

ALTRI ESEMPI IN FISICA

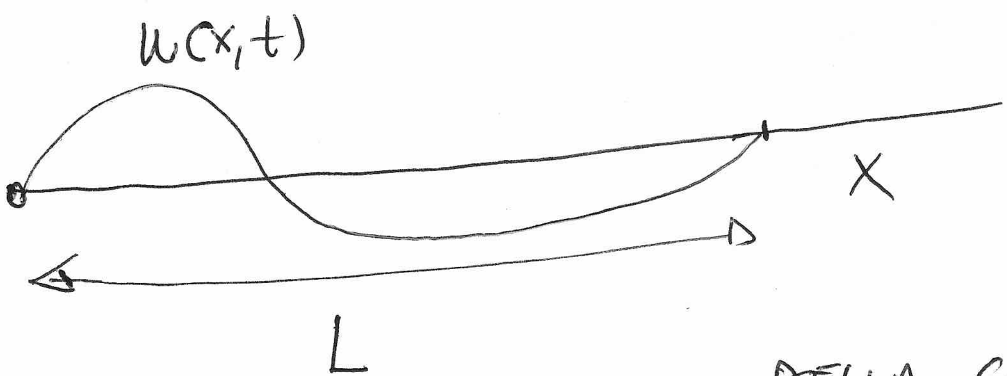
- TEORIE DI CAMPO CLASSICHE (SISTEMI CONTINUI)
  → CAMPO EM / ONDE EM /
- ONDE NEI MEZZI ELASTICI ... ETC

- MECCANICA QUANTISTICA
  → FUNZIONE D'ONDA DI UNA PARTICELLA
  → OSCILLATORE ARMONICO QUANTISTICO

- - - - - - -

$$\boxed{\text{CORDA VIBRANTE}}$$

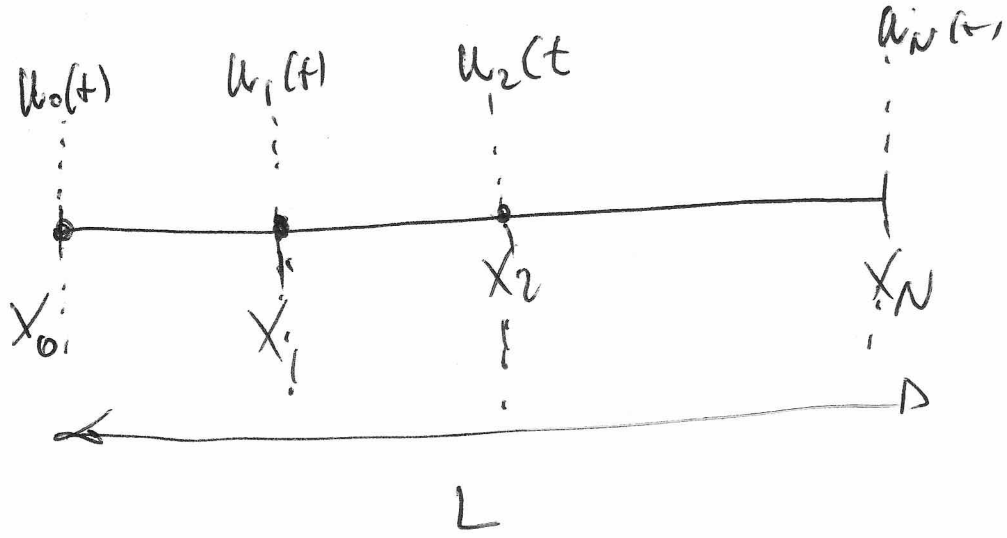
CORDA ELASTICA FISSATA A DUE ESTREMI (UNIDIMENSIONALE)




$u(x,t)$ → CONFIGURAZIONE DELLA CORDA

SI PUÒ PENSARE ALLA CORDA COME AD UN SISTEMA COSTITUITO DA UN NUMERO INFINITO DI OSCILLATORI ARMONICI $\boxed{\text{TRASVERSALI}}$

(SI POSSONO ANCHE USARE OSCILLAZIONI LONGITUDINALI, NON CAMBIA NIENTE)




OSCILLAZIONE RISPETTO ALL'EQUILIBRIO

$\boxed{\text{EQUAZIONE D'ONDA DI D'ALEMBERT}}$

$u(x,t)$ DETERMINATA DALLA PDE (PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

$$V = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

$V \rightarrow$ VELOCITÀ PROPAZIONE ONDA

$\tau \rightarrow$ TENSIONE

$\rho \rightarrow$ DENSITÀ LINEARE

$$\rho = \frac{dm}{dx}$$

PDE LINEARE OMOGENEA 2° ORDINE

⇒ EQUAZIONI IMPORTANTISSIME IN FISICA

- PROPAGAZIONE ONDE
- // CALORE
- FENOMENI DI DIFFUSIONE
- EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER (MQ)

CLASSIFICAZIONE PDE LINEARI OMOGENEE 2° ORDINE 1+N-DIMENSIONI

COORDINATE SPAZIALI $X_0, X_1, X_2 \dots X_N$

$u(x_0, x_1 \dots x_N)$

NOTAZIONE $u_{x_1} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ $u_{x_1 x_2} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1 \partial x_2}$

ETC

GENERICA PDE LINEARE OM. 2 ORDINE

$a_{00} u_{x_0 x_0} + a_{01} u_{x_0 x_1} \dots$ + TERM.

1° ORDINE ⇒

$\Rightarrow \sum_{ij} a_{ij} u_{x_i x_j}$ + TERMINI 1° ORDINE ⇒

$a_{ij} \rightarrow$ MATRICE $A$ $(N+1) \times (N+1)$

TROVIAMO AUTOVALORI DI $A$

TROVIANO AUTOVALORI DI A

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{N+1} \end{pmatrix}$$

CLASSIFICAZIONE

- EQUAZIONI $\boxed{\text{ELLITTICHE}}$
  TUTTI $\lambda_i$ POSITIVI (NEGATIVI)
  $\boxed{\lambda_i > 0}$
- EQUAZIONI $\boxed{\text{IPERBOLICHE}}$
  NON TUTTI $\lambda_i$ POSITIVI
  MA $\lambda_i \neq 0$
- EQUAZIONI $\boxed{\text{PARABOLICHE}}$
  ALMENO UN $\lambda_i = 0$

EQUAZIONE D'ALEMBERT
$\boxed{\text{IPERBOLICA}}$

PER LA RISOLUZIONE DI UNA PDE ABBIAMO BISOGNO O DI CONDIZIONI INIZIALI OPPURE DI CONDIZIONI AL CONTORNO

- CONDIZIONI INZIALI (PROBLEMA DI CAUCHY)

DETERMINARE $u(x,t)$ NOTO

(1) $u(x, t=0) = \phi(x)$ $\Rightarrow$ PROFILO INIZIALE CORDA A $t=0$

(2) $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t=0) = \psi(x)$ $\Rightarrow$ PROFILO VELOCITÀ INIZIALE

- SE IL PROBLEMA DI CAUCHY È BEN POSTO LA SOLUZIONE È UNICA PER CONDIZIONI INIZIALI DATE

(PER LE PDE LINEARI IPERBOLICHE ESSO LO È)

# CONDIZIONI AL CONTORNO

(1) DIRICHLET $u(x=0,t) = u(x=L,t) = 0$

(2) NEWMANN $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0$

MISTE: DIRICHLET PER $x=0$

NEWMANN " $x=L$

## METODO DI RISOLUZIONE PDE LINEARI 2 ORDINE

SEPARAZIONE VARIABILI

$\sum_{ij} a_{ij} u_{x_i x_j} = 0$ DIAGONALIZZANDO A

$\Rightarrow \lambda_0 u_{x_0 x_0} + \lambda_1 u_{x_1 x_1} + \dots \lambda_N u_{x_N x_N} = 0$

PONIAMO $u(x_0, x_1 \dots x_N) = F_0(x_1) F_1(x_1) \dots F_N(x_N)$

PDE SI RICONDUCE AD UN SISTEMA DI N $\boxed{ODE}$ ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

PROCEDIMENTO PER $N=1$ $\qquad x_0 = t \quad x_1 = x$

$$a \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

$u(x,t) = F(x)\,G(t)$ SOSTITUIAMO

$$a\,G(t) \frac{d^2 F(x)}{dx^2} + b\,F(x) \frac{d^2 G}{dt^2} = 0$$

DIVIDIAMO PER $F\,G$

$$\underbrace{a \frac{1}{F} \frac{d^2 F(x)}{dx^2}}_{f(x)} + \underbrace{b \frac{d^2 G(t)}{dt^2} \frac{1}{G}}_{g(t)} = 0$$

UNICA SOLUZIONE POSSIBILE

$f(x) = p \qquad g(t) = -p$

$$\begin{cases} a \dfrac{1}{F} \dfrac{d^2 F(x)}{dx^2} = p \\[2ex] b \dfrac{1}{F} \dfrac{d^2 G(t)}{dt^2} = -p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2 F(x)}{dx^2} - \dfrac{p}{a} F = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2 G(t)}{dt^2} + \dfrac{p}{a} G = 0 \end{cases}$$

PDE ~ SISTEMA DI DUE EDO LINEARI OMOGENEE A COEFFICIENTI COSTANTI

- USANDO LE CONDIZIONI AL CONTORNO SI TROVA IN GENERE

$$P = P_n \qquad n = 1 \ldots \infty$$

INFINITÀ NUMERABILE DI SOLUZIONI MODI NORMALI

$$u_n(x,t) = F_n(x)\, G_n(t)$$

$\boxed{\text{SPETTRO DISCRETO}}$

- SENZA USARE CONDIZIONI AL CONTORNO → INFINITÀ NON NUMERABILE DI ~~MODI~~ MODI NORMALI $P \in R$

$$u_p(x,t) = F_p(x)\, G_p(x)$$

$\boxed{\text{SPETTRO CONTINUO}}$

- GENERALIZZAZIONE METODO
  - → EQUAZIONI CON TERMINE DEL 1° ORDINE $u_x$ $u_t$
  - → EQUAZIONI NON OMOGENEE

# RISOLUZIONE EQUAZIONE D'ONDA

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

CONDIZIONE CONTORNO DI DIRICHLET

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$T\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{v^2} X \frac{d^2 T}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2 T}{dt^2} = -c^2$$

$\rightarrow$ PERCHÉ -?

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2 X}{dx^2} + c^2 X = 0 \\[2ex] \dfrac{d^2 T}{dt^2} + c^2 v^2 T = 0 \end{cases}$$

SISTEMA EDO 2° ORDINE COEFFICIENTI COSTANTI

RISOLVIAMO

$$X = A\cos cx + B\sin cx$$

CONDIZIONI AL CONTORNO

$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$X(L) = 0 \Rightarrow B\sin cL = 0$

NB: NON ESISTONO SOLUZIONI CHE SODDISFANO LE CONDIZIONI AL CONTORNO SE $C^2 < 0$

$$\boxed{X_m = A \sin k_m x = A \sin \frac{m\pi}{L} x}$$

$\Rightarrow$ MODI NORMALI, $\Rightarrow$ MODI DI VIBRAZIONE DELLA CORDA (INFINITÀ NUMERABILE!!)

$\Rightarrow$ ONDE STAZIONARIE

$K_m$ VETTORE D'ONDA

$$\lambda_m = \frac{2\pi}{K_m} = \frac{2L}{N} \quad \text{LUNGHEZZA D'ONDA}$$

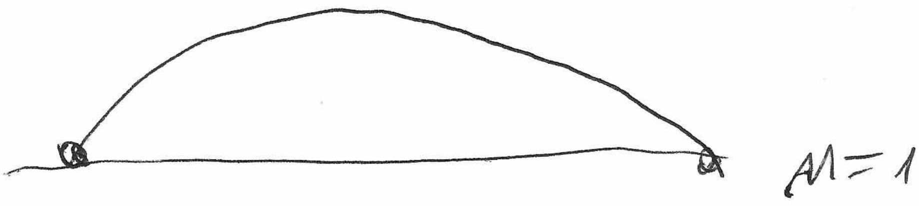
$$\omega_m = K_m V = \frac{m\pi V}{L} \quad \text{FREQUENZA}$$

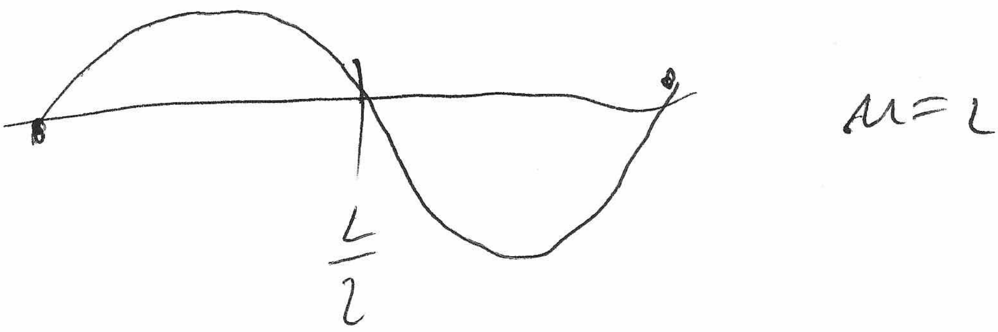
$\Rightarrow$ FISICA ACUSTICA

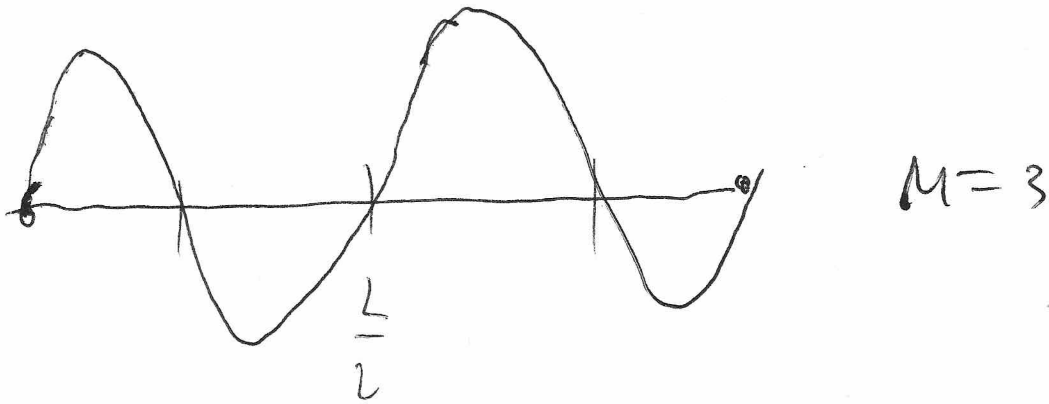
$m=1$ ARMONICA FONDAMENTALE

$m>1$ // SUCCESSIVE

PRIMI MODI NORMALI




<u>NODI</u>

- RISOLUZIONE EQUAZIONE INT

$T(t) = E_n \cos(\omega_n t + \delta_n)$

$$\boxed{u_n(x,t) = E_n \sin k_n x \; \sin(\omega_n t + \delta_n)}$$

$n = 1 \ldots \infty$

INFINITÀ NUMERABILE DI MODI NORMALI

ASSUMIAMO ORA (PROVA RIGOROSA IN SEGUITO)

CHE $u_n(x,t)$ SIA UN SISTEMA COMPLETO $\boxed{\text{INFINITO DIMENSIONALE}}$

ALLORA $\forall\ u(x,t) \in$ CONF. DELLA CORDA

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) =$$

$\boxed{\delta = 0}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin k_n x \sin(\omega_n t)$$

$c_n \Rightarrow$ COEFFICIENTI DELLO SVILUPPO

DETERMINATI DALLE CONDIZIONI INIZIALI (CAUCHY)

PROFILI INIZIALI

$$u(x,0) = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin k_n x$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n c_n \sin k_n x$$

$|C_n|^2 \Rightarrow$ PESO CON CUI SINGOLE ARMONICHE ENTRANO NELLA SOVRAPPOSIZIONE

$\Rightarrow$ IN GENERE $|C_n|^2 \sim$ ALMENO COME $\frac{1}{n^2}$

ARMONICHE SUCCESSIVE PESANO MENO

$\boxed{\text{TIMBRO SUONO}}$

EVOLUZIONE TEMPORALE

MODI $\boxed{\text{STAZIONARI}}$ $u_n(x,t) \sim X(x)\,T(t)$

ONDE

$\Downarrow$

SE CONOSCIAMO IL PESO $|C_n|^2$ CON CUI QUESTA ARMONICA ENTRA AL TEMPO $t=0$ ~~CONOS~~ CONOSCIAMO ANCHE CHE ENTRA ALLO STESSO MODO AL TEMPO GENERICO $t$ (RISOLUZIONE PROBLEMA DI CAUCHY)

- SE PER ESEMPIO SAPPIAMO CHE A $t=0$ $C_n=0$ $n \neq 1,2,3$

ANCHE $\forall t$ LE ARMONICHE SUPERIORI A 3 NON ENTRERANNO NELLO SVILUPPO

EQUAZIONE DI D'ALEMBERT:

- IMPORTANTISSIMA IN FISICA E FISICA MATEMATICA ⇒ DESCRIVE PROPAGAZIONE ONDE LINEARI (MEZZI ELASTICI, EM ETC)

GENERALIZZAZIONE A 3D

- $\square u(t, x, y, z) = 0$

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

OPERATORE D'ALAMBERTIANO

- FONDAMENTALE IN FISICA ACUSTICA

- INVARIANZA RELATIVISTICA

- ONDE NON LINEARI (SOLITONI)

ES

- $\square u = k \sin u$ SINE GORDON

# SOLUZIONE GENERALE

$$\boxed{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0} \quad (1)$$

CONDIZIONI INIZIALI DI CAUCHY

$$u(x,0) = \phi(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$$

INTRODUCIAMO COORDINATE DI CONO LUCE

$$x_+ = x + vt \qquad x_- = x - vt$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x_+}\frac{\partial x_+}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x_-}\frac{\partial x_-}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x_+} + \frac{\partial u}{\partial x_-}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x_+}\frac{\partial x_+}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_-}\frac{\partial x_-}{\partial t} = v\left(\frac{\partial u}{\partial x_+} - \frac{\partial u}{\partial x_-}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_+^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_+\partial_-} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_-^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_+^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_+\partial x_-} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

$$(1) \Rightarrow \quad 4\frac{\partial^2 u(x_+, x_-)}{\partial x_+\partial x_-} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u(x_+, x_-) = F(x_+) + G(x_-)}$$

SOLUZIONE GENERALE SOVRAPPOSIZIONE DI ONDE PROGRESSIVE E REGRESSIVE

$$u(x,t) = F(x+vt, x-vt)$$

CONDIZIONI INIZIALI

$$\begin{cases} u(x,0) = F(x) + G(x) = \phi(x) \Rightarrow \text{PROFILO INIZIALE DATO} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v\left(F'(x) - G'(x)\right) = \psi(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ INTEGRAZIONE

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{v}\int_{x_0}^{x} dx' \, \psi(x') + c$$

RISOLVENDO IN F E G

$$F(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2v}\int \psi(x')\,dx'$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2v}\int \psi(x')\,dx'$$

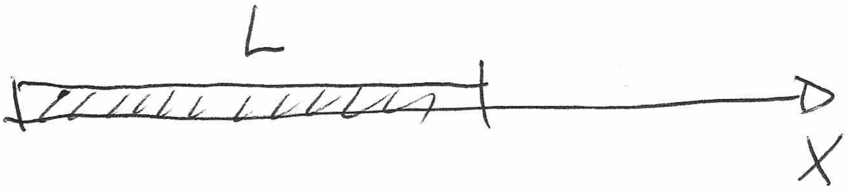
$$u(x,t) = F(x+vt) + G(x-vt) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\phi(x+vt) + \phi(x-vt)\right] + \frac{1}{v}\int_{x-vt}^{x+vt} \psi(x')\,dx'$$

SOLUZIONE GENERALE CON COND. INIZIALI DATE DA $\phi(x)$ e $\psi(x)$

# EQUAZIONE DI DIFFUSIONE DEL CALORE

SBARRA UNIDIM. DI LUNGHEZZA L




$u(x,t)$ CAMPO DI TEMPERATURA

$u$ = TEMPERATURA DELLA SBARRA NELLA POSIZIONE $x$ AL TEMPO $t$

EQUAZIONE DI DIFFUSIONE

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = k \frac{\partial u}{\partial t}$$

$k$ → COEFFICIENTE DI DIFFUSIONE

DIPENDE DA: CONDUCIBILITÀ TERMICA E CAPACITÀ TERMICA DEL MATERIALE

CLASSIFICAZIONE $\lambda_0 = 0$

EQUAZIONE PARABOLICA

CONDIZIONI AL CONTORNO

DIRICHLET

$$u(0,t) = u(L,t) = c = \text{cost.}$$

ESTREMI TERMOSTATATI

• PONIAMO PER SEMPLICITÀ $c=0$

SEPARAZIONE DELLE VARIABILI

$$u(x,t) = X(x)\, T(t)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 X}{dx^2} = -\hat{\lambda}^2 X \\[2ex] \dfrac{dT}{dt} = -\dfrac{1}{k}\hat{\lambda}^2 T \end{cases}$$

$$X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

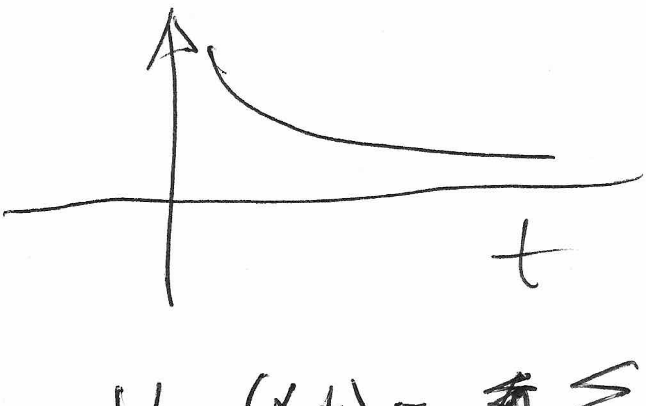
$$X(0) = X(L) = 0 \Rightarrow B=0$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$$

$$X_n = B \sin\frac{n\pi}{L} x$$

$$T = D\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{kL^2} t}$$

DECADIMENTO ESPONENZIALE NEL TEMPO CARATTERISTICO




DELLA DISSIPAZIONE

$$u_n(x,t) = \sum_n a_n \sin\frac{n\pi}{L} x\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2 k} t}$$

$$t \to \infty \quad u_n(x,t) = 0$$

AMPIEZZA DECADE CON $t$

EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial u}{\partial t}$$

PDE PARABOLICA IN $\mathbb{C}$

SEPARAZIONE $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

$$\frac{dT}{dt} = -i\frac{n^2\pi^2}{L^2\hbar}T \Rightarrow T = D\,e^{-\frac{in^2\pi^2}{L^2\hbar}t}$$

$\Downarrow$

OSCILLANTE!!

COMPLETAMENTE DIVERSO DAL COMPORTAMENTO DIFFUSIVO DOVUTO A PRESENZA UNITÀ IMMAGINARIA

$i$

$\Rightarrow$ INTERPRETAZIONE PROBABILISTICA DELLA FUNZIONE D'ONDA $u(x,t)$

EQUAZIONE DI LAPLACE

$$\nabla^2 \varphi = 0 \qquad \varphi(x, y, z)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$\varphi \rightarrow$ FUNZIONE ARMONICA

VEDI ANGILELLA CAP. 3 PAG 149 - 181

SOMMARIO

ANALOGIE CON $V^N$

(1) L'EQUAZIONE DI D'ALEMBERT È LINEARE $\Rightarrow$ VALE PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE $\Rightarrow$ SPAZIO DELLE SOLUZIONI SPAZIO VETTORIALE LINEARE $V$ : SE $u_1, u_2 \in V$

$\alpha u_1 + \beta u_2 \in V$

(2) I MODI NORMALI $u_n(x,t)$ SONO UN NUMERO INFINITO DI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

$$\forall \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$$

$V \Rightarrow$ SPAZIO VETTORIALE INFINITO DIMENIONALE ??

$V^{\infty}$

USANDO NOTAZIONE DIRAC

$$|u\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |u_n\rangle$$

(3) MODI NORMALI $u_n$ POSSONO ESSERE CONSIDERATI COME AUTOVETTORI DI UN OPERATORE

$$H = -\frac{d^2}{dx^2}$$

$$H|u_n\rangle = +k_n^2 |u_n\rangle$$

LIMITI ANALOGIA

- SOVRAPPOSIZIONE | SERIE INFINITA
  - ⇒ (CONVERGENZA DELLA SERIE) ?
  - ⇒ TIPO DI CONVERGENZA DELLA SERIE ?
- $\{u_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ È SISTEMA COMPLETO (BASE) DI $V^\infty$ ?
  - | COMPLETEZZA BASE |
- $V^\infty$ È UNO SPAZIO COMPLETO ?
  - | COMPLETEZZA DELLO SPAZIO |
- $u_n(x)$ SONO FUNZIONI | SPAZIO DI FUNZIONI |