LIMITI ANALOGIA $\mathbb{C}^N \sim \mathbb{C}^\infty$

① IN $\mathbb{C}^N$ PRES $\forall M$ [redacted] E GENERIC

VETTORI $|X_i\rangle \in \mathbb{C}^N \Rightarrow \sum_{i=1}^{M} c_i |X_i\rangle \in \mathbb{C}^N$

$\mathbb{C}^N$ È $\boxed{\text{COMPLETO}}$

$\Rightarrow$ TUTTE LE SUCCESSIONI CONVERGONO DENTRO $\mathbb{C}^N$

② IN UNO SPAZIO V^∞ $|X_i\rangle \in V^\infty$

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i |X_i\rangle \in V^\infty$$

NON È GARANTITO

PROBLEMA N° 1

$\boxed{\text{COMPLETEZZA DELLO SPAZIO}}$

③ IN $\mathbb{C}^N$ PRESI N-VETTORI LIN. INDIPENDENTI $|u_i\rangle$ $i = 1 \ldots N$

$\forall |X\rangle \in \mathbb{C}^N$ $|X\rangle = \sum_{i=1}^{N} c_i |u_i\rangle$

SE $|u_i\rangle$ È ON INOLTRE

SI HA $\sum_i |c_i|^2 = \langle X|X\rangle$

$\Rightarrow$ IN $\mathbb{C}^N$ OGNI INSIEME DI N VETTORI

LIN. IND. È SEMPRE UNA BASE

(SISTEMA COMPLETO)

(2) IN V^∞ $\boxed{\text{NON}}$ È DETTO CHE

PRESI $\{|u_i\rangle\}$ $i=1 \ldots \infty$

VETTORI LIN. IND $\forall |x\rangle \in V^\infty$

$$|X\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i |u_i\rangle$$ ~~[illegible]~~

PROBLEMA N° 2

$\boxed{\text{COMPLETEZZA DELLA BASE}}$

INTERCONESSI CON QUESTI ABBIAMO DUE

ALTRI PROBLEMI

PROBLEMA N° 3

COMPLETEZZA DELLO SPAZIO E DELLA BASE

DIPENDE DA

(a) NORMA SCELTA

(b) CLASSE DI FUNZIONI SCELTO

IN CONCLUSIONE

① BISOGNA TROVARE UNO SPAZIO DI FUNZIONI ABBASTANZA ESTESO E DEFINIRE SU QUESTO UNA NORMA OPPORTUNA IN MODO CHE LO SPAZIO DI FUNZIONI SIA COMPLETO RISPETTO A QUESTA NORMA

② UNA VOLTA TROVATO LO SPAZIO E LA NORMA CHE SODDISFANO LA PROPRIETÀ ① BISOGNA DEFINIRE SU QUESTO SPAZIO SISTEMI COMPLETI, BASI DI FUNZIONI

QUANTO VISTO NELLE SERIE DI FOURIER
CI AIUTA FINO AD UN CERTO PUNTO

INFATTI

- POTREMMO SCEGLIERE COME SPAZIO
  C DELLE FUNZIONI CONTINUE.

  QUESTO SPAZIO NON È COMPLETO
  RISPETTO ALLA NORMA EUCLIDEA $\|f\|_E$
  (VEDI 1° TEOREMA DI FOURIER)

- C È INVECE COMPLETO RISPETTO
  ALLA NORMA $\|f\|_\infty$: SE LA
  CONVERGENZA È UNIFORME ~~...~~ SERIE
  DI FUNZIONI CONTINUE CONVERGONO
  A FUNZIONE CONTINUA

PROBLEMA SPAZIO C TROPPO
RISTRETTO !!

PER RISOLVERE IL PROBLEMA
SEGUIAMO L'ANALOGIA $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$

- L'INSIEME DEI RAZIONALI $\mathbb{Q}$ NON È COMPLETO (RISPETTO ALLA NORMA EUCLIDEA)
  INFATTI ESISTONO SUCCESSIONI DI CAUCHY $e_n \in \mathbb{Q}$ CHE NON CONVERGONO IN $\mathbb{Q}$

$$\lim_{n \to \infty} e_n \notin \mathbb{Q}$$

ALLORA COMPLETIAMO $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ CONTIENE TUTTI I PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ È DENSO IN $\mathbb{R}$)

- $\boxed{\mathbb{R} \text{ È COMPLETO}}$

TUTTE LE SUCCESSIONI DI CAUCHY $e_n \in \mathbb{R}$ CONVERGONO IN $\mathbb{R}$

NEL CASO DI V^∞ ABBIAMO

QUINDI

- SCEGLIERE LO SPAZIO CHE COMPLETA LO SPAZIO DELLE FUNZIONI GC

- SCEGLIERE LA NORMA

INDICAZIONE VIENE DAL 3 TEOREMA DI FOURIER

$$GC \rightarrow L^2(a,b)$$

NORMA MEDIA 2 $\|f\|_2$

1) SPAZIO COMPLETO

DEFINIZIONE

- DATO UNO SPAZIO METRICO (TOPOLOGICO) H CON $d(x,y)=\|x-y\|$
UNA SUCCESSIONE x_n SI DICE DI CAUCHY SE

$$\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0 \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$$

$\exists\, n_0$ tale che $\forall n,m > n_0$

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

- In uno spazio metrico ogni successione CONVERGENTE È DI CAUCHY

DIM:

IP $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ QUINDI $\exists\, n_0$ tale che $\forall n > n_0$ $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall m > n_0$ $\|x_m - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$

DALLA DIS. TRIANGOLARE

$$\|x_n - x_m\| \le \|x_n - x\| + \|x_m - x\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n,m\to\infty} |x_n - x_m| = 0$$

OPPOSTO NON SEMPRE VERO

- L'OPPOSTO NON È SEMPRE VERO

POSSONO ESISTERE SUCCESSIONI DI CAUCHY CHE NON CONVERGONO IN H

ESEMPIO: $H = \mathbb{Q}$

$e_1 = 3 \quad e_2 = 3.1 \quad e_3 = 3.14 \quad \ldots$

NON CONVERGONO IN $\mathbb{Q}$ MA IN $\mathbb{R}$ SU π

$\Rightarrow$ UNO SPAZIO METRICO H SI DICE COMPLETO RISPETTO ALLA NORMA $\|\cdot\|_{H}$ SE TUTTE LE S. DI CAUCHY CONVERGONO IN H $\in$

ESEMPIO $\mathbb{R}$ CON NORMA $|x-y|$

- DA NOTARE COMPLETEZZA DIPENDE DALLA NORMA

SPAZIO $L^2(a,b)$ USIAMO $L^2(I)$ $I=[a,b]$

$f(x) \in L^2(I)$ SE $\int_a^b |f|^2 dx =$ FINITO

- $L^2(I)$ HA STRUTTURA SPAZIO VETTORIALE LINEARE SU $\mathbb{C}$

(1) SE $f, g \in L^2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha f + \beta g \in L^2$$

INFATTI

- $|f+g|^2 \leq |f+g|^2 + |f-g|^2 = 2|f|^2 + 2|g|^2$

$$\Rightarrow \int_a^b |f+g|^2 dx \leq 2\left(\int_a^b |f|^2 dx + \int_a^b |g|^2 dx\right) = \text{FINITO}$$

SE $f, g \in L^2$

- SE $f \in L^2$ BANALMENTE $\int_a^b |\alpha|^2 |f|^2 dx$

$$= |\alpha|^2 \int_a^b |f|^2 dx = \text{FINITO}$$

- IMMEDIATO VERIFICARE LE ALTRE PROPRIETÀ CHE DEFINISCONO SPAZIO VETTORIALE LINEARE (ELEM. NEUTRO ETC.

- PRODOTTO SCALARE

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f^* g \, dx$$ È SEMPRE

FINITO SE $f, g \in L^2$

<u>INFATTI</u>

$$(|f|-|g|)^2 = |f|^2 + |g|^2 - 2|f||g| \geq 0$$

$$\Rightarrow |f||g| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$$

RISULTA ESSERE

$$|f^* g| = |f||g| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$$

$$\int_a^b |f^* g| \, dx \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2) = \text{FINITO}$$

SE $g, f \in L^2$

DATO CHE $\langle f|g\rangle$ DIFFERISCE PER UNA FASE ANCH'ESSO SARÀ FINITO

SPAZIO $L^2(a,b)$ CONTIENE $GC(a,b)$

È INOLTRE ABBASTANZA AMPIO

DA CONTENERE I CASI FISICAMENTE RILEVANTI

ESEMPIO DI $f(x) \notin GC$ MA $\in L^2$

$$f(x) = \frac{1}{(x)^{1/4}} \qquad [a,b]=[0,1]$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty \qquad \text{PERO} \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \text{FINITO}$$

$$\int_0^1 |f|^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2$$

- NORMA SU L^2

$$\|f\|_2 = \left[\int_a^b |f|^2 dx\right]^{1/2}$$

INDOTTA DAL PRODOTTO SCALARE

$$\|f\| = \left(\langle f|f\rangle\right)^{1/2}$$

TEOREMA DI FISCHER-RIESZ

LO SPAZIO $L^2(a,b)$

È COMPLETO RISPETTO

ALLA NORMA MEDIA DUE

$$\|f\|_2 = \int_a^b |f|^2 dx$$

- L^2 È IL COMPLETAMENTO DI $C(a,b)$ $\Rightarrow$ OGNI SUCCESSIONE DI FUNZIONI CONTINUE CONVERGE IN $L^2(a,b)$ RISPETTO ALLA NORMA $\|f\|_2$

CONVERGENZA IN MEDIA QUADRATICA

DEFINIZIONE SPAZIO DI HILBERT

SPAZIO VETTORIALE (FINITO O INFINITO DIMENSIONALE) H IN CUI È DEFINITO UN PRODOTTO SCALARE $\langle x|x\rangle$ CHE È COMPLETO RISPETTO ALLA NORMA INDOTTA DAL PRODOTTO SCALARE

$$\|x\| = \left(\langle x|x\rangle\right)^{1/2}$$

ESEMPIO $L^2(a,b)$

SPAZIO DI BANACH

SE H È COMPLETO RISPETTO AD UNA NORMA NON INDOTTA DA PRODOTTO SCALARE LO SPAZIO SI CHIAMA DI BANACH

ESEMPIO L_p

ESEMPIO DI SPAZIO DI HILBERT

- STATI DI UN SISTEMA QUANTISTICO IN SECONDA QUANTIZZAZIONE (NUMERI DI OCCUPAZIONE n)

$\{|n\rangle\}$ n = numero di particelle nello stato con numero quantico q

$n = \{0, 1 \ldots \infty\}$

$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ $H = a^+ a$

$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$

Generico stato

$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$

ESEMPI SPAZI DI HILBERT

① $\boxed{\text{SPAZIO} \quad \ell^2}$

$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}$ con

$$|V\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n |e_n\rangle \qquad \langle e_n|e_m\rangle = \delta_{nm}$$

con $\|V\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \Rightarrow$ CONVERG.

AL SOLITO ℓ^2 SPAZIO VETT.

SE

$$\|\alpha V + \beta W\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha c_n + \beta d_n|^2$$

FINITA

ABBIAMO $|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + ab^* + b^*a$

$\leq |a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, ab \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|ab|$

$\boxed{\mathrm{Re}\, z \leq |z|}$ D'ALTRONDE $(|a| - |b|)^2 \geq 0$

$\Rightarrow |a|^2 + |b|^2 \geq 2|a||b|$ SEGUE

$\Rightarrow \boxed{|a+b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha c_n + \beta d_n| \leq 2|\alpha|^2 \sum_n |c_n|^2 + 2|\beta|^2 \sum_n |d_n|^2$$

PRODOTTO SCALARE

$$\langle V|W\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* d_n$$

• SPAZIO È COMPLETO

(SEGUE DALLA CONVERGENZA)

$\sum_n |c_n|^2$

• NORMA INDOTTA DAL PRODOTTO SCALARE SPAZIO DI HILBERT

(2) SPAZIO $L^2_p(a,b)$ Funzione peso $p(x)$ DATA

$\int_a^b p(x)\,|f|^2\,dx$ FINITO

$\langle f|g\rangle_p = \int_a^b p(x)\, f^* g\, dx$

(3) SPAZIO $L^2 D$ PIÙ VARIABILI

$\int_D |f(x,y,z)|^2\, dx\, dy\, dz$ < FINITO

ESEMPIO BANACH

SPAZIO $C(a,b)$ f CONTINUE IN $[a,b]$ NORMA

$\|f\| = \sup_{(a,b)} |f|$

COMPLETO MA NORMA NON INDOTTA DA PRODOTTO SCALARE

Lo spazio ℓ^2

- Negli spazi V di dimensione finita V^N. Data una base $|e_i\rangle$ possiamo associare ad ogni vettore

$$|V\rangle \longrightarrow a_i = \langle e_i|V\rangle \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Ma anche

$$a_i \Longrightarrow |V\rangle$$

Questa corrispondenza biunivoca consente di stabilire un ISOMORFISMO TRA V^N e lo spazio delle matrici

$$|V\rangle \rightleftarrows \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

che sta alla base della rappresentazione degli operatori come MATRICI $N \times N$

- Per gli spazi di Hilbert abbiamo visto come per ogni $|V\rangle \in \mathcal{H}$

$$|V\rangle \longrightarrow a_i = \langle e_i|V\rangle$$

con $\sum_i |a_i|^2 = \langle V|V\rangle$

- Questo fatto suggerisce di considerare

Lo spazio definito da tutte le successioni $\{a_n\}$ convergenti in modulo^2

$$\sum_n |a_n|^2 < \infty$$

Questo spazio si chiama $\boxed{\text{SPAZIO } \ell^2}$

ESSO è uno spazio di HILBERT

in cui è definito il prodotto scalare

$$\langle a | b \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* \, b_n$$

$$|b\rangle = \{ b_n \}$$

$$|a\rangle = \{ a_n \}$$

- Dato uno spazio di Hilbert separabile e una base $\{|e_n\rangle\}$ e quindi sempre possibile stabilire un ISOMORFISMO

$$H \rightarrow \ell^2$$

$$|v\rangle \rightleftarrows \{ a_n \}$$

- Questo isomorfismo gioca lo stesso ruolo dell'isomorfismo

$$V^N \rightarrow C^N$$

che consente di rappresentare ogni spazio vettoriale V^N con delle matrici $N \times N$

- Formalmente anche lo spazio ℓ^2 (quindi ogni spazio di HILBERT) potrebbe quindi essere rappresentato con delle matrici (numero infinito di componenti)

$$|v\rangle = \sum_n a_n |e_n\rangle \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

- Su ℓ^2 possiamo quindi definire la base canonica

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ALTRI ESEMPI DI SPAZI DI HILBERT

TUTTI GLI SPAZI DI HILBERT

SONO ISOMORFI A

$L^2_w(a,b)$

$\hookrightarrow$ PESO w (FUNZIONE PESO

$$\int_a^b w|f|^2\,dx = \text{FINITO}$$

ABBIAMO RAGGIUNTO IL NOSTRO SCOPO

(1) ABBIAMO ESTESO COMPLETATO

$GC \to l^2$

(2) ABBIAMO PRECISATO IL SIGNIFICATO DI CONVERGENZA DELLA SERIE

MEDIA MODULO 2

ABBIAMO QUINDI RAGGIUNTO IL nostro scopo:

NO

① Abbiamo esteso l'insieme delle funzioni:

$$GC \to L^2(I)$$

② Abbiamo precisato il significato di CONVERGENZA DELLA SERIE DI FOURIER "IN MEDIA DI ORDINE 2"

NB: Il sistema $\{f_n\}$ si chiama sistema completo

La parola COMPLETEZZA ha qui un significato molto diverso da quello associato a SPAZIO COMPLETO MA SI RIFERISCE ALLA RELAZIONE DI COMPLETEZZA

- studiamo quindi le basi: sistemi COMPLETI NEGLI SPAZI DI HILBERT

ALTRI ESEMPI DI SPAZI DI HILBERT:

TEOREMA: Tutti gli spazi di Hilbert sono isomorfi a $L^2_w(a,b)$

- seconda quantizzazione

BASI

- Per costruire una base ON nello spazio di Hilbert si procede nello stesso modo degli spazi finito dimensionali:

(1) si prende un insieme di vettori LINEARMENTE INDIPENDENTI $|f_n\rangle$: comunque si fissi n $\sum_n c_n |f_n\rangle = 0 \Rightarrow c_n = 0$

- Un criterio utile per giudicare l'IL è il seguente:

CNS affinché $|f_n\rangle$ $n = 1 - \infty$ siano linearmente indipendenti è che il determinante di GRAHAM

$$G(|f_1\rangle, |f_2\rangle \dots) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \langle f_1|f_1\rangle & \langle f_1|f_2\rangle & \dots \\ \langle f_2|f_1\rangle & \langle f_2|f_2\rangle & \\ \dots & \dots & \end{pmatrix} \neq 0$$

si vede subito che se $\langle f_i | f_j \rangle = \delta_{ij}$

$$G = \prod_i \langle f_i | f_i \rangle \neq 0$$

- PARTENDO dagli f_M posso sempre costruire un SISTEMA ON USANDO GRAHAM SCHMIDT

$$|e_1\rangle = \frac{|f_1\rangle}{\||f_1\rangle\|}$$

$$|e'_k\rangle = |f_k\rangle - \sum_{\lambda=1}^{k-1} \langle e_\lambda | f_k\rangle |e_\lambda\rangle$$

$$|e_k\rangle = \frac{|e'_k\rangle}{\|e_k\|}$$

- COSTRUIAMO ORA LA SERIE DI FOURIER GENERALIZZATA

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_M \, |e_n\rangle \qquad a_n = \langle e_M | f\rangle$$

- DEVO ESSERE SICURO CHE $\forall |f\rangle$

(1) $S_N(x) = \sum_{M=1}^{N} a_M \, |e_n\rangle$

sia SUCC. DI CAUCHY

(2) $\lim_{N \to \infty} S_N(x) = |f\rangle$ E NON AD UN ALTRO VETTORE

COMPLETEZZA DELLA BASE

- PER DIRIMERE LA QUESTIONE CONSIDERIAMO

$$d = \left\| f - \sum_{\lambda=1}^{N} c_M \, |e_n\rangle \right|$$

e determina c_n in modo
che $d^2 \Rightarrow$ MINIMA

$$d^2 = \|f\|^2 + \sum_n |c_n|^2 - \sum_n c_n \langle f|e_n\rangle$$
$$- \sum_n c_n^* \langle e_n|f\rangle = \|f\|^2 + \sum_n |c_n - \langle e_n|f\rangle|^2$$
$$- \sum_n |\langle e_n|f\rangle|^2$$

MINIMA QUANDO

$$\boxed{c_n = \langle e_n|f\rangle = e_n}$$

CIOÈ c_n sono proiez. di $|f\rangle$ su $|e_n\rangle$

INOLTRE con $c_n = e_n$ usando $d > 0$, NB, si trova la DISEGUAGLIANZA DI BESSEL

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

ESSENDO $\|f\|$ FINITA

Succ. di Cauchy

$$\sum_n |c_n| \Rightarrow \text{CONVERGE}$$

CONDIZIONE DI CONVERGENZA QUINDI ASSICURATA DAL FATTO DI SCEGLIERE d MINIMO

DATO CHE $\Downarrow$ LO SPAZIO È COMPLETO
QUESTO IMPLICA CHE
$d \Rightarrow$ MINIMA CIOÈ

$$\Rightarrow C_n = \langle e_n | f \rangle$$

$\Rightarrow$ QUESTA ASSICURA CONVERGENZA DELLA SERIE GENER. DI FOURIER MA $\boxed{\text{NON}}$ CONVERGENZA A $f(x)$

$\Rightarrow$ PER AVERE CONVERGENZA A $f(x)$ BISOGNA RICHIEDERE CHE LA DISEGUAGLIANZ DI BESSEL SIA SATURATA

$$\boxed{d = 0}$$

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2$$

IDENTITÀ DI PARSEVAL

DEFINIZIONE DI SISTEMA ON COMPLETO

$\{|e_i\rangle\}$ $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$

si dirà set ON COMPLETO

SE $\forall |u\rangle \in H$

La serie di Fourier converge a $|u\rangle$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n |e_n\rangle = |u\rangle$$

con $c_n = \langle e_n|u\rangle$

$\{|e_n\rangle\}$ SI CHIAMERÀ $\boxed{\text{BASE}}$ DELLO SPAZIO DI HILBERT

GENERALIZZA AL CASO INFINITO DIMENSIONALE LA DEFINIZIONE DI SISTEMA COMPLETO PER GLI SPAZI VETTORIALI FINITO DIMENSIONALI

RELAZIONI DI COMPLETEZZA

- Un sistema $\{|l_n\rangle\}$ è COMPLETO (BASE) se sono verificate le seguenti relazioni (tutte equivalenti)

① $\forall\ |u\rangle \in H$

la serie di FOURIER

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, |l_n\rangle = |u\rangle \qquad c_n = \langle l_n|u\rangle$$

② OGNI VETTORE $|u\rangle$ può essere approssimato in norma dalle quali si vede che

$$\sum_{n=1}^{N} c_n\, |l_n\rangle$$

cioè $$\Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n\, |l_n\rangle - |u\rangle \Big\| \to 0$$

③ VALE L'IDENTITÀ DI PARSEVAL

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle l_n|u\rangle|^2$$

Segue dalla disuguaglianza di BESSEL

④ L'unico vettore ORTOGONALE AGLI $|l_n\rangle$ è il vettore nullo

- SPAZIO TOPOLOGICO SEPARABILE H CONTIENE UN SOTTOINSIEME NUMERABILE B DENSO IN H (H CONTIENE TUTTI I PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI B)

SPAZI SEPARABILI

- Non tutti gli spazi di HILBERT AMMETTONO un sistema completo (BASE)

- GLI spazi di Hilbert che ammettono un tale sistema si chiamano SEPARABILI (sono gli unici che interessano la fisica)

- L'esempio più importante (e anche l'unico che studieremo in dettaglio) di SPAZIO SEPARABILE È LO SPAZIO $L^2(I)$

- $L^2(I)$ ammette diverse basi.

(a) $u_n = \left\{ e^{i\frac{\pi n x}{L}} \right\}$ $\quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

(b) SET DI FOURIER $u_n = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\frac{n\pi}{L}x, \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\}$ $\quad n = 1, 2 \ldots$

$-L \leq x \leq L$

(c) $u_n = \left\{ \sin\frac{n\pi x}{L} \right\}$ $\quad n = 1, 2 \ldots$

$0 \leq x \leq L$

CON CONDIZIONI AL CONTORNO $u(0) = u(L) = 0$

Traslando $x \to x - \frac{L}{2}$ lo

si può riportare a $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$

N.B. Si ottiene un set diverso

dal set (b)

$\Rightarrow$ DIPENDENZA DALLE CONDIZIONI AL CONTORNO !

(c) SISTEMA DELLE POTENZE

$$u_n = \{ x^n \} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

- Il sistema è completo ma non ON

STONE

- La completezza segue da un teorema CLASSICO DI WEIERSTRASS CHE AFFERMA CHE L'INSIEME DEI POLINOMI È CHIUSO RISPETTO ALLA NORMA $\|f\| = \sup_I |f|$

Dato che

$$\|f-g\|^2_{L^2(I)} = \int |f-g|^2 dx \leq \sup_I |f-g|^2 \cdot \text{MIS}(I)$$

Sarà anche rispetto alla norma $L^2(I)$

- BASE NON ON $\Rightarrow$ POLINOMI ORTOGONALI CLASSICI

Il sistema delle potenze non è però ON $\Rightarrow$ opportuna procedura consente di definire i cosiddetti POLINOMI ORTOGONALI CLASSICI $P_n(x)$ che sono un SISTEMA ORTONORMALE (PIÙ AVANTI)

ALCUNI ESEMPI

$$u_n = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i\frac{n\pi x}{L}} \right\}$$

DIMOSTRIAMO L'ON

$$\langle u_n | u_m \rangle = \delta_{nm}$$

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} e^{i\frac{m\pi}{L}x}\,dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{\frac{i\pi x}{L}(m-n)}\,dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2L}\displaystyle\int_{-L}^{L} dx = 1 & \text{se } m = n \\[2ex] \dfrac{1}{2L}\dfrac{1}{\frac{i\pi}{L}(m-n)} e^{\frac{i\pi x}{L}(m-n)}\Bigg|_{-L}^{L} = 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}$$

ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x = 1 & x > 0 \end{cases}$$

$$C_n = \frac{1}{\sqrt{2L}}\int_{-L}^{L} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} f(x) = \int_0^L \frac{e^{\frac{in\pi}{L}x}}{\sqrt{2L}}\,dx = \frac{-iL}{\sqrt{2L}\,in\pi}\left(e^{in\pi}-1\right) \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \dfrac{\sqrt{2L}}{(2n+1)} & \end{cases}$$

$$C_0 = \sqrt{\frac{L}{2}} \qquad \langle f|f \rangle = L \qquad \frac{\pi^2}{8}$$

$$|C_0|^2 + 2\sum_{n=0}^{\infty} |C_n|^2 = \frac{L}{2} + 4L\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

OK

Si consideri ora $|f\rangle = x$

$$c_n = \langle u_n | f \rangle = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^{L} x\, e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\, dx$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2L}} \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-L}^{L} = 0$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2L}} \left\{ \frac{1}{-i\frac{n\pi}{L}} e^{-i\frac{n\pi}{L}x} x \Big|_{-L}^{L} + \frac{1}{i\frac{n\pi}{L}} \underbrace{\int_{-L}^{L} e^{-i\frac{n\pi}{L}x}}_{0} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2L}} \left\{ \frac{iL}{n\pi} L \left[e^{-in\pi} + e^{in\pi} \right] \right\}$$

$$= i \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{L^{3/2}}{\pi} \cos n\pi$$

$$|c_n|^2 = \frac{2}{\pi^2 n^2} L^3$$

Relazione di completezza

$$\langle f | f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

$$\langle f | f \rangle = \int_{-L}^{L} x^2\, dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-L}^{L} = \frac{2}{3} L^3$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 n^2} L^3 = \frac{4L^3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Serie NOTEVOLE

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n|^2 = \frac{4L^3}{\pi} \frac{\pi^2}{6} = \frac{2}{3} L^3 = \langle 1 | 1 \rangle$$

- L'uso di una base oppure di un'altra dipenderà dal problema che si deve risolvere in particolare dalle condiz. al contorno

Esempio ① supponiamo dal problema fisico che lo spazio che ci interessa è quello delle

FUNZIONI REALI PARI

$\in [-L, L]$

$\Rightarrow$ usiamo una base

$$|u_n\rangle = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}} \cos \frac{n\pi x}{L} \right\}$$

② CORDA VIBRANTE

$u(L) = u(0) = 0$

(PARTICELLA QUANTISTICA NELLA BUCA DI POTENZIALE

$\Rightarrow$ userem $u_n = \left\{ \frac{1}{\sqrt{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x \right\}$

oppure traslando $x \to x - \frac{L}{2}$

se $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$

OPERATORI NEGLI SPAZI DI HILBERT ED $L^2(I)$

- La definizione di operatore lineare T nello spaz. di HILBERT è la stessa che nel caso FINITO DIMENSIONALE

$$T: H \to H \qquad \forall\, |x, y\rangle \in H$$

$$T|x\rangle = |y\rangle$$

$$T(\alpha|x\rangle + \beta(|y\rangle)) = \alpha T|x\rangle + \beta T|y\rangle$$

- Ne CASO INFINITO DIMENSIONALE CI SONO PERÒ DUE DIFFERENZE CRUCIALI

1) Non è detto che l'azione di T sia definita su tutti i vettori di H. ES

$H = L^2(0,1) \qquad f \in L^2(0,1) \quad f = \sqrt{x}$

$T = \frac{d}{dx} \qquad T|f\rangle = |g\rangle = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \notin L^2(0,1)$

(2) Anche se l'azione di T su tutti i vettori della base è ben definita questo non implica sempre che esso sia definito su tutti i vettori dello spazio

$\Rightarrow$ molto differente dal caso finito dimensionale

se $T|e_i\rangle = |w_i\rangle$

allora $T|v\rangle = T\sum_i c_i |e_i\rangle$

$= \sum_i c_i T|e_i\rangle = \sum_i c_i |w_i\rangle$

ESEMPIO

$T|e_n\rangle = n|e_n\rangle$ definito tramite azione sulla base $|e_n\rangle$.

Sia ora $|u\rangle$ il vettore le cui componenti sono $\frac{1}{n} = c_n$

Nota $\sum_n |c_n|^2 = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow \langle u|u\rangle = \frac{\pi^2}{6}$

$|\bar{u}\rangle = \sum_n c_n |e_n\rangle = \sum_n \frac{1}{n} |e_n\rangle$

Consideriamo ora

$T|\bar{u}\rangle = \sum_n \frac{1}{n} T|e_n\rangle = \sum_n |e_n\rangle = \sum_n c'_n |e_n\rangle$

$c'_n = 1$

$\sum_n |c'_n|^2 = \infty$

$\Rightarrow$ l'azione di T sugli elementi della base è perfettamente definita ma non l'azione su $|u\rangle \in H$

$T|u\rangle \Rightarrow$ genera $|y\rangle \in H$

L'azione di T non può essere estesa a tutti gli elementi di H

- si definisce dominio $D \subseteq H$ di T il sottoinsieme di $|u\rangle \in H$ su cui è definita l'azione di T
- si definisce Immagine o CODOMINIO I l'insieme $I \subset H$ degli elementi trasformati $T|u\rangle = |y\rangle$

Come abbiamo visto $D \subset H$

può anche essere $I \subseteq H$

CONTINUITÀ E LIMITATEZZA

- Cerchiamo ora una proprietà che ci consente di estendere l'azione di un operatore dalla base $|e_i\rangle$ a tutto H

CONTINUITÀ

- Un operatore T si dice continuo in x_0 se

$$|x\rangle \to |x_0\rangle \Rightarrow T|x\rangle \to T|x_0\rangle$$

SIGNIFICA

$$\|x - x_0\| \to 0 \Rightarrow \|T|x\rangle - T|x_0\rangle\| \to 0$$

- DALLA LINEARITÀ SEGUE CHE se T è continuo nello zero $|0\rangle$ (o in un qualsiasi altro punto) allora è continuo ovunque. Per la linearità:

$$T|x\rangle - T|x_0\rangle = T(|x\rangle - |x_0\rangle)$$

se $|x\rangle \to |0\rangle \Rightarrow T|x\rangle \to 0$

ponendo $|x\rangle - |x_0\rangle = |y\rangle$

onde $|y\rangle \to |0\rangle \Rightarrow T|y\rangle \to 0$

$|x\rangle - |x_0\rangle \to |0\rangle \Rightarrow T|x\rangle - T|x_0\rangle \to 0$

- Negli SV a dimensione finita la continuità è sempre verificata. Nello spazio di Hilbert non è più vero: $T|e_n\rangle = n|e_n\rangle$ $\|T|e_n\rangle\|^2 = n^2$

$\Rightarrow \infty$ onde quando $|e_n\rangle \to 0$

- Se un operatore è continuo allora posso estendere la azione della base a un qualsiasi vettore $|x\rangle \in H$. Infatti

Dalla completezza della base segue che

$$|x_m\rangle = \sum_{K=1}^{m} a_K |e_K\rangle \qquad a_K = \langle e_K | x\rangle$$

$$\lim_{m \to \infty} |x_m\rangle \to |x\rangle$$

Per la continuità di T questo implica

$$T|x_m\rangle \to T|x\rangle$$

quindi

$$T|x_m\rangle = \sum_{K=1}^{m} a_K T|e_K\rangle \Rightarrow T|x\rangle = \sum_{K=1}^{\infty} a_K T|e_K\rangle$$

- Un operatore T si dice limitato se al variare di $|x\rangle$ nel dominio D

$$|T| = \sup_{D} \frac{\|T|x\rangle\|}{\||x\rangle\|} = K < \infty \qquad |x\rangle \neq 0$$

$$\|T|x\rangle\| = \frac{\|T|x\rangle\|}{\||x\rangle\|}\|x\| \leq \|T\|\,\|x\|$$

Norma di $\|T\| = \sup \frac{\|T|x\rangle\|}{\|x\|} \Rightarrow \|Tx\| = \frac{\|T\|}{\|x\|}$ $\|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\|$

- TEOREMA: LIMITATEZZA E CONTINUITÀ SONO EQUIVALENTI

A VALORE MASSIMO DI

① Se T per ipotesi è limitato

$$\| T|u\rangle - T|u_0\rangle \| = \| T(|u\rangle - |u_0\rangle) \| \leq \|T\| \, \|u - u_0\|$$

segue $T|u\rangle \to T|u_0\rangle$ se $|u\rangle \to |u_0\rangle$

quindi è anche continuo

② Si può anche mostrare che se continuo è anche limitato

- La limitatezza di un operatore può essere usata per estendere l'azione di T dalla base ad ogni vettore $|u\rangle \in H$
- Si considera l'azione sottospazio $F \subset H$ delle combinazioni lineari

$$|u_n\rangle = \sum_n a_n |e_n\rangle$$

se $\dfrac{\|T|u_n\rangle\|}{|u_n|}$ rimane sempre limitato $\forall u_n \Rightarrow$ l'azione di T può essere estesa a tutto H

Esempio:

(1) $T = \frac{d}{dx}$ non è limitato e quindi non è continuo in $L^2(0,1)$

$$|f\rangle = \sqrt{x} \qquad \|f\|^2 = \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$T|f\rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\| T|f\rangle \|^2 = \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{4} \ln x \Big|_0^1 \to \infty$$

- Operatore Aggiunto:

$$T|x\rangle = |y\rangle \qquad \langle x|T^+ = \langle y|$$

$$\langle y|T|x\rangle^* = \langle x|T^+|y\rangle$$

- Non è detto che T^+ esiste sempre nel dominio D di T

- Si dimostra che se T è limitato allora T^+ esiste sempre ed è limitato nello stesso dominio D di T

- Se T non è limitato in genere T^+ esiste in un Dominio $D_0 \subset D$.

ESEMPIO IMPORTANTE:

$$T = \frac{d}{dx} \qquad |f\rangle \in L^2(a,b)$$

$$\langle f|T|g\rangle = \int_a^b f^* \frac{dg}{dx}\, dx = g f^*\Big|_a^b - \int_a^b g \frac{df^*}{dx}$$

$$= g f^*\Big|_a^b - \left(\int_a^b g^* \frac{d}{dx} f\right)^* = -\langle g|T|f\rangle^*$$

$$+ g f^*\Big|_a^b$$

$\Rightarrow$ se $f(a) = f(b)$ per ES f periodica

o $f(a) = f(b) = 0$ per ~~ES~~ $a = -\infty$, $b = +\infty$, $f(\pm\infty) = 0$

$$\langle f|T|g\rangle = \langle g|(-T)|f\rangle^* \Rightarrow T^+ = -T$$

- Nel dominio così ristretto $\exists\, T^+$ e $T^+ = -T$

- Un operatore T per il quale è possibile trovare un dominio $D_0 \subset D$ in cui $T = T^+$ si dice HERMITIANO o SIMMETRICO

- Se poi il dominio $D_0 = D$ l'operatore T si dice AUTOAGGIUNTO

- l'operatore $P = i \frac{d}{dx}$ $\quad P = iT$
  è hermitiano in $D = L^2(0,b)$
  $P = P^+$

  Mentre è Autoaggiunto se definiamo P nel dominio D delle funzioni $L^2(0,b)$ periodiche in $[0,b]$.

- Si può dimostrare che un operatore hermitiano il cui dominio è tutto H è limitato

- L'operatore $X = x\cdot$ è autoaggiunto in tutto $L^2(0,b)$

  Banalmente:

$$\langle f | X | g \rangle = \int_0^b f^* x\, g = \left(\int_0^b g^* x f\right)^*$$

$$= \langle g | X | f \rangle^*$$

NB: $[P, X] f = i \frac{d}{dx}(x f) - i x \frac{df}{dx} = \cancel{ix\frac{df}{dx}} - \cancel{ix\frac{df}{dx}}$
$+ i f \Rightarrow [P, X] = i\, \mathbb{1}$

OPERATORI UNITARI

- La condizione è lo stesso che in V^N $\rightarrow$ NON NECESSARIAMENTE $[U,U^\dagger]=0$!!

$$U^\dagger U = I \iff \langle x|U^\dagger U|y\rangle = \langle x|y\rangle$$

- Il problema è che in V^N $U^\dagger U = I$ assicura l'$\exists$ di U^{-1}

Infatti in V^N U è rappresentabile tramite una matrice per cui

$$|\det U|^2 = 1 \quad \det U \neq 0 \quad \exists\, U^{-1}$$

NOTARE $[U,U^\dagger]\neq 0$

- Negli spazi di Hilbert la condizione $\langle x|U^\dagger U|y\rangle = \langle x|y\rangle$ assicura solo l'iniettività di U:

$$\text{se } \| U|x\rangle - U|y\rangle\| = \| U(|x\rangle - |y\rangle)\| = \|x-y\|$$

allora se $U|x\rangle = U|y\rangle \Rightarrow |x\rangle = |y\rangle$

Ma non la SURJETTIVITÀ DI U

- Per poter scrivere

$$U^\dagger = U^{-1} \quad \text{dobbiamo}$$

richiedere addizionalmente che

$$\operatorname{Im} U = H$$

ESEMPIO: OPERATORI CREAZIONE DISTRUZIONE

IN MQ $\qquad n = 0, 1 \dots \infty$

$\{|e_n\rangle\}$ SET COMPLETO DI H ON

$\langle e_n | e_m \rangle = \delta_{nm}$

$A^+ |e_n\rangle = |e_{n+1}\rangle$ CREAZIONE $\quad , \langle e_n| A = \langle e_{n+1}|$ (2)

$\langle e_n | A A^+ | e_n \rangle = \langle e_{n+1} | e_{n+1} \rangle = 1$

$\Rightarrow A A^+ = I \Rightarrow A^+$ UNITARIO

MA $\boxed{\text{NON INVERTIBILE}}$ NÉ NORMALE

$[A, A^+] \neq 0$

DALLA (2) SEGUE

$\langle e_n | A | e_{n+1} \rangle = \langle e_{n+1} | e_{n+1} \rangle = 1$

$\Rightarrow A |e_{n+1}\rangle = |e_n\rangle$ DISTRUZIONE

QUINDI $\quad A|e_0\rangle = 0$

A^+ INIETTIVO $\quad A^+|e_n\rangle = |e_0\rangle$ NON HA SOLUZIONE

MA NON SURIETTIVO $\quad |e_0\rangle$ NON È IMMAGINE

A SURIETTIVO $\quad A|e_1\rangle = |e_0\rangle$

MA NON INIETTIVO $\quad A|e_0\rangle = 0 \quad Ker(A) \neq |0\rangle$

- IN MQ e QFT

si definiscono operatori A, A^+ che non sono unitari ma soddisfano

$$A|e_n\rangle = \sqrt{n}\,|e_{n-1}\rangle$$
$$A^+|e_n\rangle = \sqrt{n+1}\,|e_{n+1}\rangle$$

$$A^+A|e_n\rangle = A^+\sqrt{n}\,|e_{n-1}\rangle = n|e_n\rangle$$

$A^+A \Rightarrow$ OPERATORE NUMERO PARTICELLE

$$\langle e_n|A^+A|e_n\rangle = n\langle e_n|e_n\rangle = n$$

NON È UNITARIO MA SODDISFA

$$A^+A = nI$$

$\boxed{\text{AUTOVALORI ED AUTOVETTORI}}$

- L'equazione agli autovalori negli spazi di Hilbert ha la stessa forma che in V^N

$$T|u\rangle = \lambda|u\rangle$$

$\Rightarrow$ In generale però non si può dire niente sull'esistenza o meno di soluzioni (AUTOVETTORI ED AUTOVALORI)

(DIVERSAMENTE DAL CASO V^N dove il numero degli autovalori era dat del numero delle soluzioni dell'equazione secolare. In particolare l'∃ di autoval. ed autovettori è legato alla linearità

Esempi

① l'operatore

$$A^+|l_n\rangle = |l_{n+1}\rangle$$

non possiede alcun autovettore $A^+|u\rangle = \lambda|u\rangle$

Infatti $|u\rangle = \Sigma_n c_n |l_n\rangle$

$$A^+|u\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |l_{n+1}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda c_n |l_n\rangle$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} |l_n\rangle + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda c_n |l_n\rangle = 0$$

$$\lambda c_0 |l_0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n-1} - \lambda c_n)|l_n\rangle = 0$$

$$c_0 = 0 \qquad \lambda c_n = c_{n-1} \Rightarrow c_n = 0$$

② L'operatore $X = x$ non ha autofunzioni

$$X f = \lambda f \Rightarrow (x - \lambda) f(x) = 0$$

$$f(x) \neq 0 \text{ solo per } x = \lambda$$

$f(x)$ non può quindi essere una normale funzione, può però essere una distribuzione

$\delta(x - \lambda) \Rightarrow$ FUNZIONE DELTA DI DIRAC

- Continua a valere il teorema sugli autovalori ed autovettori degli operatori Hermitiani (va solo aggiunto la frase SE TALI AUTOVETTORI ESISTONO)

- SPETTRO DI UN OPERATORE

si dice che σ numero complesso $\in$ allo spettro di T

se $K = (T - \sigma I)$ non ammette inverso o ammette inverso non limitato

- Il problema dell'esistenza degli autovettori di un operatore T di H e della possibilità di usarli come base di H va quindi risolto CASO PER CASO

ESEMPI

- l'operatore Hermitiano

$$P = i\frac{d}{dx}$$ nello spazio delle funzioni periodiche in $[-L, L]$ possiede un set ON DI AUTOVETTORI che sono una BASE DI L^2

Infatti

$$P|f\rangle = \lambda\,|f\rangle$$

$$+i\frac{df}{dx} = \lambda f$$

condizioni al contorno
$f(-L) = f(L)$

$$\frac{df}{f} = -i\frac{\lambda}{L}\,dx$$

$$\ln f = -i\frac{\lambda}{L}x \qquad f = Ae^{-i\frac{\lambda}{L}x}$$

$$f(-L) = f(L) = \quad e^{+i\lambda} = e^{i\lambda} \Rightarrow e^{2i\lambda} = 1$$

$$\lambda = n\pi \qquad n = 0 \pm 1$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{2L}}\,e^{\frac{in\pi}{L}x}$$ SISTEMA COMPLETO

- L'operatore

$$H = -\frac{d^2}{dx^2}$$ ammette un set ON di autovettori COMPLET. nello spazio $L^2(0,L)$ delle funz che verificano le condiz al bordo $f(0) = f(L) = 0$

$$H|f\rangle = \lambda^2|f\rangle$$

$$-L^2\frac{d^2 f}{dx^2} = \lambda^2 f$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\lambda^2}{L^2}f = 0 \qquad f = A\cos\frac{\lambda}{L}x + B\sin\frac{\lambda}{L}x$$

$$f(0) = f(L) = 0 \Rightarrow \qquad A = 0 \qquad \lambda = n\pi$$
$n = 1, 2$

ATTENZIONE ALLE CONDIZIONI AL CONTORNO